

50639

N. 49.

MATHEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESITŐ.

A M. TUD. AKADEÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

FRÖHLICH IZIDOR

OSZTÁLYTITKÁR.

HARMINCZKETTEDIK KÖTET.

1914.

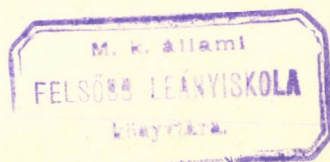
TIZENÖT TÁBLÁVAL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEÉMIA.

1914.

A BUDAPESTI
M. KIR. ÁLLAMI Mária Terézia Leánynevelőintézet
TANÁRI KÖNYVTÁRA.



~~N
131
1914~~



TARTALOM.

| | <i>Lap</i> |
|--|------------|
| ABONYI SÁNDOR: Kísérleti adatok az <i>Artemia</i> -nem megismeréséhez (hat táblával) | 94 |
| ANDERKÓ AURÉL: A hőmérséklet szakaszos ingása a pseudoisotrop talajban | 426 |
| BERCZELLER LÁSZLÓ: Diffusio a felszínbe | 332 |
| CSORBA GYÖRGY: Az egész számok többszörös particziói | 565 |
| DOBY GÉZA: Növényi enzimekről. 1. A burgonyagumó amyláza | 712 |
| DOBY GÉZA és BODNÁR JÁNOS: Növényi enzimekről. 2. A burgonya amyláza és pathológiai elváltozása | 737 |
| FEJÉR LIPÓT: Konjugált trigonometrikus sorokról | 85 |
| — Bizonyos, a Fourier- és Laplace-féle sorokkal értelmezett közép-görbéről és középfelületekről | 462 |
| FEKETE MIHÁLY: Vizsgálatok az abszolút summabilis sorokról, alkalmazással a Dirichlet- és Fourier-sorokra | 389 |
| FRANZENAU ÁGOST: A diósgyőri kálcaitról (egy táblával) | 318 |
| HAAR ALFRÉD: Egy orthogonális függvényrendszerről | 60 |
| HANKÓ BÉLA: A <i>Nassa mutabilis</i> nevű csiga regeneráló képességéről és különböző szerveinek regenerációjáról (négy táblával) | 164 |
| KONEK FRIGYES: Organikus festéksynthesis alkaloidákkal | 31 |
| KONEK FRIGYES és MITTERHAUSER RIKÁRD: Néhány új naphtylpyrazolon synthesiséről | 695 |
| MAUTHNER NÁNDOR: A piceinnek, a <i>Pinus picea</i> glukosidjának synthesisise és új mesterséges glukosidek | 41 |
| — A dimethyl- α -resorcylnsachlorid kondenzációja phenol-ætherekkel | 247 |
| — A pyrogallolcarbonsav depsidjeinek synthesisise | 499 |
| SZ. NAGY GYULA: Algebrai függvények arithmetikai tulajdonságairól | 69 |
| PÓLYA GYÖRGY: Positiv quadratikus alakokról, a melyeknek mátrixa Hankel-féle | 656 |
| OLTAY KÁROLY: A függővonal deviatiója Kesztej és Tiglamortutului pontok között | 523 |
| REJTŐ SÁNDOR: A maradó, vagyis az ideig tartó és a maradandó alakváltozások mechanikájának alaptételei és alkalmazásuk | 257 |

| | <i>Lap</i> |
|--|------------|
| ROHONYI HUGÓ: Vizsgálatok az élettani elektromos áramok keletkezéséről | 341 |
| RÓNA ERZSÉBET: Az urán átalakulásairól | 350 |
| RUSZNYÁK ISTVÁN: Dispersitasfok és katalytikus hatás | 48 |
| RYBÁR ISTVÁN: A teljes fényvisszaverődés absolut phasisváltozásainak kísérleti meghatározása (három táblával) | 1 |
| — Vizsgálatok a fényvisszaverődés phasisváltozásairól | 531 |
| SCHAFFER KÁROLY: Az átöröklődő idegbajok kórszövettani jellemzése | 514 |
| SZATHMÁRY LÁSZLÓ: A phenanthrén új kétmolekulás nitroszármazékairól | 680 |
| TANGL FERENCZ: Adat az izomtonus ismeretéhez | 327 |
| — Thermo-elektromos kalorimeter kis állatok számára | 642 |
| TERKÁN LAJOS: A β Lyræ, az η Aquilæ és a δ Cephei változó csillagok fényváltozása a különböző színekben | 357 |
| VADÁSZ M. ELEMÉR: Magyarország mediterrán tüskésbőrűi | 508 |
| VENDL ALADÁR: A velencei hegység geológiai és petrográfiai viszonyai | 487 |
| ZEMPLÉN GYÖZÖ: A fényforrás mozgásának hatása a fényjelenségekre | 225 |
| ZEMPLÉN GYÖZÖ és POGÁNY BÉLA: Vizsgálatok a folyadékok surlódásáról. Harmadik közlemény. Cseppfolyós testek belső surlódása és csuszamlása | 603 |
| ZIMÁNYI KÁROLY: Arsenopyrit és bournonit Rozsnyóról (egy táblával) | 705 |

A TELJES FÉNYVISSZAVERŐDÉS ABSOLUT PHASIS-VÁLTOZÁSAINAK KÍSÉRLETI MEGHATÁROZÁSA.¹

RYBÁR ISTVÁN-tól.

Három táblával.

TARTALOM:

1. §. E tárgyra vonatkozó eddigi eredményekről és a vizsgálat céljáról.
 2. §. A kísérleti mód alapgondolatáról.
 3. §. Az előzetes kísérleti próbálkozásokról.
 4. §. A mérési módszerről: *a)* A kísérleti egybeállítás. *b)* A mérések anyaga és módja. *c)* Megjegyzések a mellékelt photographikus felvételekhez.
 5. §. A kísérleti módszer elemi elméletéről: *a)* A folyadék absolut törésmutatója az üvegénél kisebb. *b)* A folyadék absolut törésmutatója az üvegénél nagyobb.
 6. §. A kísérlet és az elmélet eredményeinek egybevetése.
 7. §. Eredmények.
-
1. §. E tárgyra vonatkozó eddigi eredményekről és a vizsgálat céljáról.

Közel 100 esztendeje annak, hogy FRESNEL² (1818) kísérletileg igazolta azt az először theoretikusan nyert fontos eredményét, hogy egy meghatározott polározású fény polározási

¹ A budapesti kir. m. tudomány-egyetem I. sz. physikai intézetében készült dolgozat.

² A. FRESNEL: Annales de Chimie et de Physique (2), 29. page 175 1818. Oeuvres complètes 1. page 782—796. 1866.

állapota megváltozik, ha e fény két homogén és isotrop közeg sík határfelületéről *teljesen* visszaverődik.

Elméleti alapon a beesés szögének és a közegek relatív törésmutatójának szigorú matematikai függvényeivel fejezte ki azt a phasisváltozást, melyet a beeső fény vektorának két főkomponense: a beesés síkjával *parallel* és az erre *merőleges* irányú összetevője a teljes visszaverődés alkalmával szenved. E két komponens abszolút phasisváltozása egy és ugyanannál a beesési szögnél különböző. Az elmélet értelmében az abszolút-phasisváltozások különbsége (a komponensek *relatív* phasisváltozása) a teljes visszaverődés határszögénél zérus, a beesésszög növekedésével folytonosan nő, felvesz egy maximális értéket, ezután fogy és a rasans beesésnél ismét zérus.

FRESNEL ez elméleti úton nyert eredményeinek igazolására 1751 törésmutatójú üvegből készült ferde paralelepipedonokat használt. E paralelepipedonok méreteit úgy választotta meg, hogy a ferde alaplaphoz merőlegesen eső fény a paralelepipedon belsejében az oldallapon ama szög alatt verődjék vissza, melynél a két fővektorkomponensnek az elméletből adódó relatív phasisváltozása 45° . E beesési szög megválasztása lehetséges volt, mert a fenti törésmutatóra nézve a relatív phasisváltozás maximuma $45^\circ 56'$. FRESNEL azt tapasztalta, hogy ha a beeső fény a beesés síkjához 45° azimuthban polárizott, akkor a paralelepipedonból *kétszeri* totális reflexio után körben poláros, *négyszeri* teljes visszaverődés után pedig síkban poláros fény lép ki s i. t.

FRESNEL-nek e kísérletei elméletét fényesen igazolták.

FRESNEL kísérleti igazolásait követték JAMIN,¹ később pedig QUINCKE² ily irányú kísérleti vizsgálatai és részletes quantitativ mérései. Ők különböző beesési szögek mellett BABINET-féle kompenzátorral mérték azt a különbséget, mely az üveg és levegő,

¹ M. J. JAMIN: Annales de Chimie et de Physique (3) 30. page 257—267. 1850.

² G. QUINCKE: Annalen der Physik und der Chemie 127, Seite 1—29 und 199—237. 1866.

továbbá az üveg és különböző folyadékok határfelületéről *teljesen* visszaverődött fény fenti két komponensének phasisdifferentiája és a beeső fény ugyane két komponensének phasisdifferentiája között észlelhető.

Az előrebocsátottak alapján világos, hogy úgy FRESNEL, mint JAMIN, továbbá QUINCKE és a többi, e tárggyal foglalkozó megfigyelései csupán ama *relatív* phasisváltozásra vonatkoztak, mely a beeső fény két fő vektorkomponensének: a beesés síkjával *parallel* és a beesés síkjára *merőleges* irányú összetevőjének phasisa között előáll akkor, ha a fényvisszaverődés *teljes*. E vizsgálatok mind a phasisváltozás e differentiáját tették kutatás tárgyává, nem pedig egymástól függetlenül, külön-külön magát az egyes komponenseknek, nevezetesen külön a beesés síkjában polározott és külön a beesés síkjára merőleges síkban polározott komponens phasisának *absolut* változását.

E kérdést érinti BABINET-nek ¹ egy kísérlete, melyet ő rövid, egy oldalas ismertetésben leír. E kísérletnek alapgondolata meg-egyezik azzal, melyet mi is vizsgálatainknál felhasználtunk, a miért is kívánatos, hogy kísérletét és eredményét teljességében közöljük.

BABINET egy hasadékon átjövő fénynyalábot egy prizmatikus lappal interferentiára képes két sugárnyalábra bontott s a fényt egy üvegprisma belsejében *totálisan* reflektáltatta. Az üvegprisma határlapjának egyrészét nagy törésmutatójú folyadékkal meg-nedvesítette úgy, hogy a fény innen *partiálisan* reflektálódott. BABINET e fényreflexiónak három esetét különböztette meg: 1. mindkét fénynyaláb a *nem nedvesített* felületről reflektálódott; 2. az egyik nyaláb a *nem nedvesített*, a másik ellenben a *nedvesített* felületről verődött vissza; 3. mindkét fénynyaláb a *nedvesített* felületen szenvedett reflexiót. Eredménye az volt, hogy a 2. módon előállított, tehát a totálisan és a partiálisan reflektált fény interferentia-csíkjai oly irányban tolódtak el azoktól az interferentia-csíkoktól, melyeket az 1. módon, azaz a két totálisan reflektálódott, vagy a 3. módon, tehát a két partiálisan visszavert fénynyel állítgatott elő, mintha a totálisan

¹ J. BABINET: Comptes Rendus 8 I. page 709. 1839.

visszavert fény a partiálisan *reflektálódott* fénnyel rövidebb utat futott volna be.

Ebből látható, hogy BABINET e kísérletével nagyon is kezdetleges és sokat nem mondó qualitativ eredményre jutott. Ő csak azt állapította meg, hogy «a totálisan reflektált sugár oly sugárral azonos, a mely a *nem* totálisan reflektált sugár által befutott útnál rövidebb utat fut be». Arról, hogy az interferenciacsíkok ez eltolódása a beeső fény poláros állapotától, a beesés szögétől és a közegek optikai állandóitól függ, továbbá, hogy a két fővektorkomponens phasisában különböző a változás, nem quantitativ, de még qualitativ szempontból sincs egy szó sem említve. Úgy látszik maguk a francia physikusok sem tulajdonítottak e kísérletnek nagyobb jelentőséget, mert a jelesebb francia kézikönyvekben, mint pl. M. E. MASCART *Traité d'Optique*-jában sincs e közleményre utalás. E kísérletet egyedül WINKELMANN *Handbuch der Physik*-je¹ említi fel mint olyant, melylyel az absolut phasisváltozás mérhető. A 3. §-ban mondottakból azonban kitűnik, hogy BABINET kísérleti összeállítása önmagában, minden kiegészítés nélkül nem alkalmas az absolut phasisváltozás tanulmányozására.

Itt óhajtom még felemlíteni, hogy WINKELMANN *Handbuch der Physik*-je tévesen közli azt, hogy a BABINET-féle kísérlet a *direkt* fény és a *totálisan* reflektált fény interferenciáján alapul. Miként láttuk, az interferencia a *partiálisan* és a *totálisan* reflektált fénnyel jön létre.

Ezek azok az összes eddigi eredmények, a melyek e dolgozat tárgyára vonatkoznak s melyeket az irodalom tüzetes áttanulmányozásakor találtam. Nincs ezek szerint oly munka, mely az absolut phasisváltozás tényleges meghatározási módját és a tapasztalati eredményeket ismertetné.

Kíváncos tehát, hogy oly kísérleti berendezésről gondoskodjunk, a mely az absolut phasisváltozást megfigyelhetővé teszi és lehetővé teszi azt, hogy e phasisváltozás nagyságát különböző beesési szögek mellett meghatározhassuk.

¹ A. WINKELMANN, *Handbuch der Physik*. 2 Aufl. 6. Seite 1274. 1906.

E tárggyal való foglalkozásra dr. FRÖHLICH Izidor egyet. tanár úr buzdított akkor, mikor én egy hasonló, de nem ugyane kérdés kísérleti megvizsgálásának lehetősége tárgyában az ehhez szükséges eszközök átengedése céljából hozzá fordultam. Az ő folytonos szives érdeklődése kíséretében és jó tanácsaival támogatva végeztem a kísérleti vizsgálatokat.

Törekvésem tehát oda irányult, hogy oly kísérleti berendezésről gondoskodjam, mely az absolut phasisváltozások pontos kísérleti meghatározását lehetővé teszi.

A jelen dolgozatban ez irányban végzett vizsgálataim eredményét, melyre a BABINET-féle kísérlettől függetlenül, annak ismerete nélkül jutottam, óhajtom összeállítani. BABINET kísérletéről csak az experimentális vizsgálatok befejezése után (a dolgozat írásban való összeállításakor) az irodalom tüzetes áttanulmányozása alkalmával szereztem tudomást. Előbb kísérleti próbálkozásaimat, melyek azonban bizonyos zavaró körülmények miatt elfogadható mérési eredményekre nem vezettek, sorolom fel s csak azután térek ama kísérleti berendezés ismertetésére, melynek segélyével sikerült a jelenséget — tehát azt a phasisváltozást, melyet a beesés síkjával *parallel* síkban polározott fény, nemkülönben a beesés síkjára *merőleges* síkban polározott fény a *teljes visszaverődés* alkalmával szenved — teljes tisztaságában előállítani. Ezt fogja követni a kísérleti módszer elemi elméletének ismertetése, majd a kísérleti eredmények összeállítása és az elméletnek a tapasztalattal való egyeztetése.

Mielőtt azonban tárgyalásaimat megkezdeném, kötelességemnek tartom, hogy báró EÖTVÖS Loránd úr ő excellentiájának, kinek intézetében, a budapesti kir. magy. tudományegyetem I. sz. physikai intézetében e dolgozat készült, és FRÖHLICH Izidor úr ő méltóságának, ki értékes JAMIN-körét és a hozzá tartozó összes præparatumokat rendelkezésemre bocsátani szives volt, mély hálámat kifejezzem. Nekik köszönhetem vizsgálataimnak sikerét: állandó érdeklődésükkel buzdítottak a munkára, gazdag tapasztalataikkal és értékes tanácsaikkal, melyekkel mindenkor készségesen segíteni szivesek voltak, juttattak sikeres és eredményes vizsgálathoz. Mély tanítványi tisztelettel és odaadó hálával mondom mindezekért nekik itt is köszönetet.

2. §. A kísérleti mód alapgondolatáról.

Ismeretes, hogy ha egy meghatározott polározás-állapotú fény optikailag sűrűbb közegben ritkább közeg felé halad és a két közeg határfelületén közönséges visszaverődést szenved, akkor a fény phasisa a visszaverődéssel nem változik. Ha ellenben a fény haladása optikailag ritkább közegben sűrűbb felé történik, a fény phasisa a határfelületen történő visszaverődés alkalmával minden beesésszögnél 180° -kal változik.

Ezek szerint bármiként is jön létre a közönséges visszaverődés — akár úgy, hogy a fény sűrűbb közegben ritkább felé, akár pedig ritkábban sűrűbb felé halad —, a fény phasisa, ha csak a fény a határfelületről *közönségesen* verődik vissza, vagy egyáltalában nem, vagy pedig egy ismeretes mennyiséggel, 180° -kal változik. Tehát a visszaverődött fény phasisának ismerete tökéletesen megállapítja a beeső fény phasisát.

Ez az általánosan ismert kísérleti tapasztalat volt kísérleti berendezésem kiindulási pontja.

Ugyanis tegyük fel azt, hogy a beesés síkjában vagy erre merőlegesen polározott fény üveg és levegő határfelületéről *teljesen* visszaverődik. Ekkor a visszaverődött fény phasisa a beesőéhez képest az 1. §-ban foglaltak alapján bizonyos mennyiséggel megváltozik. Most kísérleti berendezésünkben minden mást változatlanul hagyva, létesítsük csak azt a változtatást, hogy a levegő helyébe egy optikailag sűrűbb közeget (folyadékot) hozunk úgy, hogy a visszaverődés már nem teljes, hanem *közönséges* legyen. Az eredmény az lesz, hogy a fény phasisa e visszaverődés folytán vagy egyáltalában *nem* változik, vagy ha a folyadék optikai sűrűsége az üvegénél nagyobb, 180° -kal változik.

Ha tehát sikerül a teljesen és e közönségesen visszavert fény phasiskülönbségét kísérleti úton meghatározni, akkor ezzel a teljesen visszaverődött és a beeső fény phasiseltérése s így a teljes fényvisszaverődés abszolút phasisváltozása is ismeretes lesz.

Kísérleteinket tehát úgy kell egybeállítanunk, hogy e két fajta visszaverődött fény phasiskülönbsége meghatározható legyen.

3. §. Az előzetes kísérleti próbálkozásokról.

Az előzőek szerint a vizsgálatot visszavezettük az üveg-levegő és az üveg-folyadék határfelületről reflektálódó fény phasiskülönbségének meghatározására.

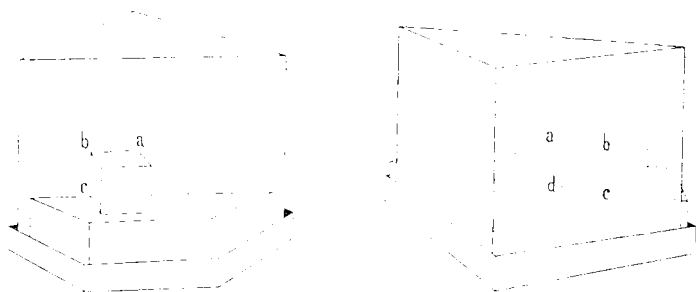
Hogy e phasisdifferentiát megállapíthassuk, két czél megvalósításáról kellett gondoskodnunk. Az egyik czél abban állott, hogy a két fénynyalábot: a *teljesen* és a *közönségesen* visszavert fényt egyidőben és egymás mellett állítsuk elő, a második pedig, hogy interferentiát létesítsünk egyrészt a *teljesen* és a *közönségesen* visszaverődött sugarak, másrészt pedig a *teljesen* és a *teljesen* reflektált fénysugarak között, mert várható volt, hogy a keresett phasisdifferentia az előálló két interferentia-csík sor eltolódásában nyilvánul.

1. Hogy a két fénynyalábot egymás mellett egyszerre állítsuk elő, még pedig úgy, hogy e berendezés a további lépésre, nevezetesen az interferentia létesítésére is alkalmas legyen, a folyadékkal egy kocka alakú (vékony, 18×18 mm-es, mikroszkopi vizsgálatokhoz használatos fedőlemezekből készített) edénykét teljesen színig megtöltöttünk. E folyadékkal megtöltött edényke nyitott szájához üvegprismánkat ama lapjával szorítottuk, a melyen a fényt reflektálni kívántuk. Ezután az egészet, egyik kezünkben az üvegprismát, a másikban a folyadékkal megtöltött edénykét tartva és állandóan egymáshoz szorítva, 90° -kal megforgattuk és úgy helyeztük egy e czélra készült üveg-tálczára, hogy az üvegprisma kérdéses határfelülete függőlegesen állott.

Az így felszerelt üvegprismát az 1. ábra két oldalról nézve tünteti elő. Az üvegprisma közvetlenül a tálcácskán van; a folyadékkal megtöltött kockaalakú edény *abcd* nyitott lapjával az üvegprismával érintkezik.

Az így összeállított, folyadékkal megtöltött edénykébe könnyen légbuborékok jutottak. Hogy e légbuborékok által okozott zavart elkerüljük, később az edénykének kissé más alakot adtunk, olyant, minőt a 2. ábra tüntet elő. Az edénykének nyitott lapja az *abcd* oldal; a felső határlap nem vízszintes, mint az előző esetben, hanem felfelé hajlik.

Ez alak megválasztásával elérjük azt, hogy az edénykébe bejutó légbuborék nem tapad a prizához, hanem azonnal az edényke felső részébe jut, a hol az az előállítandó jelenségre már nincs zavaró hatással. Így tehát az üvegprisma határlapjára eső fény a határlapnak a folyadékkal érintkező $abcd$ quadratikus alakú részének minden pontjáról közönséges reflexiót szenved. Az edénykének ezen alakja rendkívül előnyös volt, mert egy és ugyanazon összeállítást 3—5 napig is használhattunk



1. ábra.

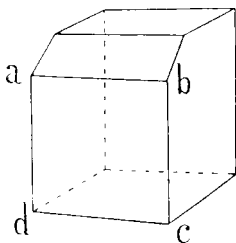
a nélkül, hogy az $abcd$ határfelületen a légbuborékok legkisebb nyomát is észrevehettük volna.

Ha már most az üvegprismára parallel, széles sugárnyaláb érkezik és a fenti határlapján belső visszaverődést szenved, akkor mindenkor elérjük azt, hogy a fénynyaláb egy része a lapnak az $abcd$ részéről reflektálódjék. Ha a sugárnyaláb keresztmetszet hosszúkas függélyes parallelogramma és a prismát úgy helyezzük el, hogy az a csúcs (1. ábra, jobboldalt) a parallelogramma közepébe jusson, akkor a visszaverődött fényben a 3. ábrában elötüntetett intensitási viszonyokat figyeljük meg. A visszavert fénynyaláb $ab'c'd'$ részében a közönségesen visszavert fény, ellenben a többi részében a teljesen visszaverődött fény egymás mellett, egymással parallel halad.

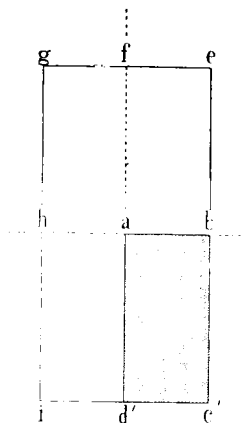
E berendezéssel elértük célunk első részét, azt, hogy a közönségesen és a teljesen visszaverődött fényt egyidőben, egymás mellett előállítottuk. Kísérleti berendezésünknek ez a része végérvényesen mindvégig megmaradt.

2. Következett célunk második, már jóval nehezebb részének megvalósítása: a teljesen és a teljesen, továbbá a teljesen és a közönségesen visszavert fény interferentia-jelenségének előállítása.

E cél megvalósításakor mindenekelőtt arról kellett gondoskodnunk, hogy a visszaverődött sugarak egymás között, vagy legalább is az egy és ugyanabban vízszintes síkban haladók koherensek legyenek. Ezt könnyen elértük oly módon, hogy egy



2. ábra.



3. ábra.

finom, függőleges, az ad éllel (1. ábra) parallel állított hasadékszerű rést a prizmatól kb. 30 cm távolságban helyeztünk el, melyet kívülről erős fényvel, pl. parallel napfényvel megvilágítottunk.

A résen átjövő, kissé divergens fénysugarak közül azok, a melyek egy és ugyanazon vízszintes síkban haladtak, egymás között koherensek. E sugárnyaláb az üvegprisma határfelületének fent említett részéről visszaverődött; a visszavert fénynyaláb különböző részeinek intenzitás-viszonya hasonló ahhoz, a melyet a 3. ábrán feltüntettünk. Az ab egyenes darabon (1. ábra) keresztül menő vízszintes és az ad élen át fektetett függőleges sík a látótér négy quadransra osztja. Az $ab'ef$, $fgba$ és $hid'a$ quadransban (3. ábra) a teljesen, az $ab'c'd'$ -ben ellenben a közönségesen visszaverődött fény halad; az $ab'ef$ és $fgba$ quadrans ama sugarai koherensek egymással, a melyek egy és ugyanazon vízszintes síkban haladnak, hasonlóképen az $ab'c'd'$ és $hid'a$ quadrans sugarai is.



Hátra marad most már csak az, hogy az interferentiát, az ezt létesítő alkalmas eszköz közbeiktatása által a teljesen és a teljesen, továbbá a teljesen és a közönségesen visszaverődött sugarak között tényleg elő is állítsuk.

E czélból sorra kísérletet tettem az interferentia-jelenség előállítására használatos különböző eszközökkel.

A legelső próbálkozások FRESNEL-féle biprismával történtek. A biprismát a visszaverődött fényben állítottam fel, az üvegprismától kb. 20–30 cm távolságban úgy, hogy a látótér α pontja (3. ábra) a biprisma közepére jutott és az ad' határvonal pontosan a biprisma függélyes élére esett.

Az így előállított interferentia-jelenséget úgy a fény útjába helyezett papírlapon pusztá szemmel, mint még jobban közvetlenül közönséges okulárral jól és élesen láthattam, de a csíkok között semminemű eltolódást sem észlelhettem. — Ugyanis a két interferentia-csíksor között, az ab -n (1. ábra) keresztül menő vízszintes sík feletti és az ez alatti csíksor között a valóságban folytonos az átmenet. E folytonos átmenet miatt a keskeny interferentia-csíkok közötti eltolódás nem látható oly okulárral nézve, mely a jelenséget minden irányban egyenlően megnagyítja. Ellenben igenis annak láthatónak kell lennie, ha ez okulár helyett oly okulárt használunk, mely a vízszintes síkban lejátszódó jelenséget nagyítja, de a függélyes síkban lévő vagy egyáltalában véve nem nagyítja, vagy (még előnyösebben) kicsinyíti. Valóban, mihelyt az előző közönséges okulárt egy kb. 1 cm gyújtótávolságú, tehát igen erősen nagyító hengerlencsével helyettesítettük és azt úgy állítottuk, hogy a henger tengelye a résnek az üvegprismán való reflexio által létesített virtuális képével parallel volt, a várt jelenség azonnal előállt: a két csíksor egymáshoz képest a vízszintes határvonal mentén eltolódott. A jelenség még élesebb és határozottabb lett, mikor a függélyes síkokban előálló jelenségek kicsinyítése czéljából szemünk elé egy kis hasadékszerű diaphragmát, vagy még inkább, a mikor egy 25–30 cm gyújtó távolságú szóró hengerlencsét helyeztünk el úgy, hogy ennek alkotói vízszintesek voltak. A két egymáshoz képest eltolódott csíksort ekkor egy rendkívül éles és igen vékony vízszintes vonal választotta el egymástól.

Ez volt az a legelső összeállítás, melynél a keresett jelenséget észleltük.

De a jelenségnek pusztá megtekintése meggyőzött bennünket arról, hogy a csíkok közötti eltolódás nem csupán a keresett abszolút phasisváltozástól származott. A különböző csíkok különböző mértékben tolódtak el. Ennek okát abban láttam, hogy az interferáló sugarak a folyadékkal telt edényke *ad* éléhez igen közel reflektálódtak; már pedig itt sem a közönséges, sem a teljes visszaverődés a határ okozta zavaró hatásoktól mentesen nem állott elő.

Jobb volt a jelenség, mikor a határvonal közelségéből jövő fénysugarak eltávolítása céljából a biprisma éléhez, ezzel párhuzamosan 0.7 mm vastag drótot erősítettünk; még határozottabbá vált a csíksor eltolódása, a mikor a biprismát eltávolítva, csupán a dróton elhajlított sugarakkal hoztuk létre az interferenciát.

Mindezek a kísérletek meggyőztek arról, hogy a csíksornak a teljes fényvisszazverődésnél jelentkező phasisváltozás okozta eltolódása teljesen tisztán csak akkor állhat elő, ha ezen interferenciát csupán oly sugarakkal hozzuk létre, melyek az *ad* határvonaltól elég nagy távolságban, tehát az általa okozott zavartól teljesen mentesen reflektálódnak.

A kísérleti berendezésnek ez irányban való tökéletesítésére és célunk megvalósítására rendkívül előnyösnek kínálkozott az az először FRÖHLICH tanár úr által használt összeállítás, mely nála hasonló, de nem ugyane interferencia-jelenség előállításánál sikeresen bevált. Az ő szíves tanácsára e berendezéssel is kísérletet végeztem.

E FRÖHLICH-féle kísérleti berendezésnek lényege abban áll,¹ hogy egy nagy achromatikus lencse a reális hasadékszerű rés ama virtuális képeinek, melyek a biprisma általi fénytöréshez, vagy még előnyösebben a FRESNEL-féle ikertükrőről való visszaverődéshez tartoznak, reális képeit hozza létre. Ez összeállításnak igen nagy előnye az, hogy az interferenciára képes, koherens két

¹ FRÖHLICH I.: Mathematikai és Physikai Lapok 17. 100. oldal. 1903.

fénynyaláb egymástól izoláltan áll elő s ezeknek egymástóli távolsága részint az achromata helyzetének, részint a FRESNEL-féle tükrök hajlásszögének változtatásával igen nagy közben, 0—8 cm közben, kényelmesen és tetszés szerint változtatható.

Eljárásom, melyet részletesen a következő §-ban óhajtok tárgyalni, most már abban állott, hogy a lenese által létrehozott két éles vonalszerű fényforrást az üvegprisma lapján állítottam elő. E reális képek függélyesek s így egymással és az *ad* éllel (1. ábra) paralelek voltak. Mindkettő egyenlő távolságra volt az *ad* éltől; az *ab* élen keresztül fektetett vízszintes sík mindkét fényvonalat hosszában felezte.

Ezek szerint az egyik fénynyaláb minden sugara üveg-levegő határfelületről, a másik fénynyaláb ama sugarai, melyek az *ab* élen át fektetett vízszintes sík felett haladtak, szintén üveg-levegő, de a sík alatt levők üveg-folyadék határfelületről és hozzá az összes sugarak az *ad* határvonaltól távol, egy pár milliméter távolságban reflektálódtak.

A jelenség hengerlencsével nézve az előzőhöz hasonló volt azzal a különbséggel, hogy az utóbbi esetben a két csíksor eltolódása az összes csikoknál a fényhullámhossz törtrészában kifejezve egyforma volt.

Ez összeállítással kezdtem meg quantitativ méréseimet. A különböző mérési sorozatokból nyert eredmények azonban egymástól nagy mértékben eltértek. A míg egy és ugyanannál az összeállításnál végzett mérések elég szépen egyező eredményre vezettek, addig a különböző, de egymással teljesen azonosan történt összeállításoknál végzett mérésekből nyert eredmények egymástól nagy mértékben, a mérési hiba határán messze túl eltértek.

Hosszú kísérletezést és több ezernyi quantitativ mérést kellett végeznem, míg ennek okát felismernem sikerült.

Észrevettem tudniillik azt, hogy abban a vékony vízszintes sávban, mely a két csíksort egymástól elválasztja, szintén interferentia-csíkok vannak. Ezek úgy e sáv feletti, mint az alatti csíkokhoz képest eltolódtak. Ehhez járul, hogy a nagy achromata által előállított két fényforrásból divergens sugarak lépnek ki, minek folytán a vízszintes sáv a prizmatól való

távolodással mindjobban és jobban szélesedik. Így, ha a hengerlencse alkotta okulárunkat a prismától csak kissé távolabb állítjuk fel, a hengerlencsén keresztül nézve, szemünkbe már nem juthat a tulajdonképeni két interferentia-csík, hanem csak az egyik és a fent említett vízszintes sáv egy része. A csíkoknak látható eltolódása tehát nem az, a mit keresünk. Ez eltolódás a hengerlencsének a prismától való távolságával is változik. Hogy ez így van, azt több egyenes kísérlettel, melyekről itt szólni nem kívánok, sikerült eldöntennem.

Miután ily módon e zavaró körülményt felismertem, tudtam, hogy kísérleteimet mily irányban folytassam. Törekvésem oda irányult, hogy az üvegprisma határlapjának valós képét előállítva, láthatóvá tegyem azt az optikai jelenséget, mely a prisma lapján lejátszódik. E valós képet azonban úgy kellett előállítanom, hogy e kép helyén az interferentia-csíkok zavartalanul álljanak elő. Ezt pedig az által értem el, hogy a prisma határlapján lévő *ab* vízszintes (1. ábra) határvonalnak éles képét oly hengerlencsével állítottam elő, melynek tengelye ezzel parallel. S valóban, mihelyt ezt megvalósítottam, a csíkok eltolódása e reális kép helyén felállított tejüvegen pusztán szemmel minden okulár nélkül is oly szépen és határozottan látszott, hogy szebbet és tökéletesebbet már kívánni sem lehetett.

Ez volt az a végérvényes összeállítás, melylyel a kvantitatív mérések történtek s melyről, mint ilyenről, a következő §-ban szólni óhajtok.

4. §. A mérési módszerről.

a) *A kísérleti egybeállítás.*

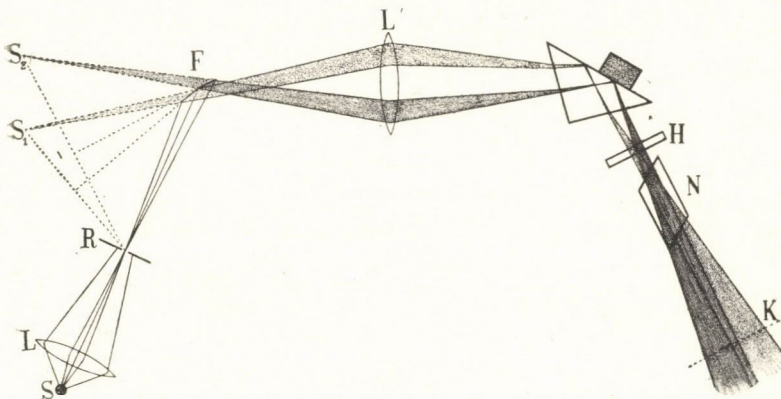
Az előzőekben részletesen kifejtettem azokat az indító okokat, amelyek a már fent jelzett végérvényes kísérleti összeállításra vezettek.

Kísérleti egybeállításom eme végérvényes alakjának megvalósztatására kényszerítő indító okok részletes leírásával arra törekedtem, hogy világosan előtüntessem és megkülönböztessem azokat a szerepeket egymástól, a melyeket a kísérleti összeállítás

egyes alkotó részei az optikai jelenség létrehozásában külön-külön csakugyan betöltenek.

Azt hiszem, hogy a jelenséget elég részletességgel írtam le, úgy, hogy talán szabad lesz a végérvényes összeállításról és a quantitativ mérési módszerről most már szólni a nélkül, hogy azoknak a czéloknak felemlítésére ismét kiterjeszkedném, amelyeket az összeállítás egyes alkotó részeivel elérni óhajtottam.

A kísérleti összeállítást vízszintes metszetben a 4. ábra tünteti fel. S a fényforrásul használt, függélyesen elhelyezett NERNST-fonál. E fényforrástól 50 cm-re elhelyezett L kb. 45 cm gyújtó-



4. ábra.

távolságú achromatikus lencse a NERNST-fonál reális képét a lencsétől 448 cm távolságban lévő R hasadékszerű résre veti. A kísérleti berendezésnek ez a része csupán a rés megvilágítására szolgál.

A résből jövő kissé divergens fénynyaláb a réstől 34 cm-re felállított F FRESNEL-féle ikertükörről reflektálódik. E visszaverődésekhez tartozó S_1 és S_2 virtuális képek reális képeit a FRESNEL-féle kettőstükörről 128 cm-re elhelyezett nagy, 10 cm átmérőjű és kb. 70 cm gyújtótávolságú, kitűnő achromatikus lencse L' a lencsétől 121 cm távolságban állítja elő. — Kísérleteinkben a két igen éles fényvonal szélessége 0.088 mm, hossza 20 mm és egymástóli távolsága 2.137 mm volt. — Ide helyeztük a vízszintesre állított nagy JAMIN-féle kört, melynek forgási

tengelye e két reális fényvonal közé, ezektől egyenlő távolságra esett.

A kísérleti egybeállításnak eddig ismertetett része, mely kizárólag arra szolgált, hogy a két koherens fényforrást reálisan és egymástól izoláltan állítsuk elő, quantitativ méréseinknél mindvégig változatlanul megmaradt; ellenben az összeállításnak ama folytatása, melyről ezek után még írni óhajtok, minden egyes alkalommal újból és újból megismétlődött.

A fényvisszazерődésnek tényleges megvalósítása céljából ide, a JAMIN-kör asztalkájára helyeztük a folyadékkal telt edénykével a 3. §-ban leírt módon összeállított üvegprismát. Gondoskodtunk arról, hogy az üvegprisma két lapja a JAMIN-kör forgási tengelyével parallel legyen.

Az üvegprismanak az a beállítása, melynél a fény a prismában egy előre meghatározott szög alatt reflexiót szenved, oly módon történt, hogy a törési és visszazерődési törvények alapján a prisma adataiból kiszámítottuk azt a szögleletet, a melylyel a JAMIN-kör asztalkájával az üvegprismát abból az állásából, melynél a fény a prisma egyik befogó lapjáról merőlegesen verődik vissza, elforgatnunk kell, hogy a belső reflexiónál a kívánt beesési szög tényleg előálljon. E beállítás nagy pontossággal történt. Az ismételt leolvasások egymástóli eltérése 30"-nél mindig kisebb volt, a mi a használt Jamin-kör kiválóságát dicséri.

Ezután az így beállított üvegprisma átlólapjával érintkező, folyadékkal telt edénykét az átlólappal parallel óvatosan eltoltuk mindaddig, míg az edényke *ad* éle (1. ábra) a két fényvonal-tól egyenlő távolságra esett. Ha már most a megismételt szögbeállítás után az egybeállítás helyesnek bizonyult, azaz ha a folyadékkal telt edényke fent említett éle az újbóli szögbeállítás után is a fényvonalaktól egyenlő távolságra volt, akkor a prismához többé nem nyúltunk.

A prismától körülbelül 22—23 cm távolságban, a visszavert fényben állítottuk fel a 20 cm gyújtótávolságú hengerlencsét *H*-t, mely a folyadékkal telt edényke vízszintes *ab* (1. ábra) élének reális képét a prismától körülbelül 200—250 cm távolságban, a *K*-val jelölt síkban állította elő. Ezt, a fénysugár körül, mint tengely körül forgathatóan felállított hengerlencsét

úgy forgattuk, hogy a kép helyén éles interferentia-csík alakul elő.

A hengerlencse után helyeztük el az N nagy nikolt, melynek segítségével a visszavert fény két főkomponensének csak az egyikével: vagy a beesés síkjában, vagy erre merőleges síkban polárizott fénnyel hoztuk létre az interferenciát.

Az üvegprisma határlapjának a H hengerlencse által létesített reális képe helyére, a K -síkba jutott quantitativ méréseinknél a dupla fonálkereszttel ellátott okulármikrometer; photographikus felvételeink alkalmával pedig a fényérzékeny lemez.

b) *A mérések anyaga és módja.*

Miután kísérleti egybeállításomat már ismertettem, még csak röviden tényleges quantitativ méréseimről óhajtok megemlékezni.

Vizsgálataimhoz egy nagy derékszögű, egyenoldalú, kitűnően csiszolt üvegprismát használtam. Az edényt destillált vízzel töltöttem meg. Az üvegprismának a levegőre vonatkoztatott törésmutatója a quantitativ méréseknél használt vörös fényre¹ nézve 1.526, a vízre vonatkoztatott törésmutatója pedig ugyancsak e fényre nézve 1.147 volt. Kiszámítván a totális reflexio határszögét úgy az 1.526, mint az 1.147 törésmutatójú közegekre nézve, nyerjük, hogy a teljes visszaverődés az üveg-levegő határfelületről $40^{\circ} 57'$ -nél, az üveg-vízhatárfelületről pedig $60^{\circ} 43'$ -nél kezdődik.

A vizsgálatainknál felhasznált eset tehát nem az az egyszerű, melyről az előzőekben szözlöttünk. Ugyanis az üveg-víz felületről reflektált fény $60^{\circ} 43'$ beesési szögnél szintén totális lesz s így e visszavert fény phasisában is a visszaverődés folyamán változás áll elő. De e phasisváltozás, miként azt látni fogjuk, nem egyenlő az üveg-levegő határfelületről ugyane szög alatt visszaverődött fény phasisváltozásával. E kétfajta visszavert fénysugár között tehát ekkor is phasisdifferentia van, melyet ezért módszerünkkel direkt mérhetünk, a FRESNEL-féle for-

¹ E fényt az R rés elé állított vörös üveggel állítottuk elő.

mulákkal pedig kiszámíthatunk. S így módunkban áll az elméletnek a kísérleti számértékekkel való egybevetését ez esetben is végezni.

Az egyszerűbb eset áll elő, ha folyadék gyanánt az üvegnél optikailag sűrűbb folyadékot, pl. szénkéneget választunk. A combinatio e fajára nézve is kimerítő, de csak qualitativ megfigyeléseket végeztem.

Quantitativ méréseim mindenkor vörös fényben a középső 7 csíkon történtek; kivétel csak a 45° alatt beeső fénynek a beesés síkjára merőleges síkban polározott komponense volt, melynél csupán a középső 3 csíkot és azt is csak fehér fényben mérhettem. Ezért e mérési eredményt a 29. oldalon közölt táblázatos összeállításban *-gal jelöltük. Ugyanis e komponens fény intenzitása rendkívül kicsiny.

Az egy és ugyanahoz a beesési szöghöz tartozó összeállítást újból meg újból megismételtem, sőt az üveg-víz határfelületről egyszer az S_1 fényforrás, máskor pedig az S_2 fényforrás sugarait reflektáltattam. Ez értekezésben foglalt, a 6 §-ban összeállított minden egyes kísérleti számadat legalább is 330-780 beállításnak az eredménye.

c) *Megjegyzések a mellékelt photographikus felvételekhez.*

A dolgozathoz mellékelt photographikus felvételek az eredeti negativoknak négyszeres nagyítású másolatai; különben egyéb tekintetben az eredeti felvételekkel teljesen azonosak, azokon semminemű retusálás vagy javítás nem történt.

A mellékelt 3 pár (összesen 6) felvételt a jelenség karakteristikus eseteiből választottuk.

Az I. táblázat képei 55° beesési szög mellett, tehát ott készültek, a hol a fény az üveg-víz határfelületről közönségesen reflektálódik. E felvételeken látnató is, hogy az egymástól eltolódott két csíksor intenzitása jelentékenyen különböző. Az egyes képeken felül vannak a közönségesen és a teljesen visszaverődött fénynyaláb interferentia-csíkjai, alul pedig a teljesen és a teljesen visszaverődött fényéi.

A II. táblázat felvételeinél a fénybeesés szöge 60° , tehát

a fény az üveg-víz felületről még mindig közönséges értelemben reflektálódik, de a beesés szögével már egész közel vagyunk a totális reflexio határszögéhez, $60^{\circ} 43'$ -hez. A két csik-sor közötti intenzitás-differentia már alig észrevehető.

Végül a III. táblázat képei azt a jellemző esetet tüntetik elő, amelynél a fény 65° szög alatt esik a prisma határfelületére, azaz melynél a fény az üveg-víz határfelületről is teljesen verődik vissza. A fényintenzitás közötti különbség itt eltűnik.

A mi az összes felvételeket jellemzi, feltűnő, hogy a beesés síkjára merőleges síkban polározott fény interferenciacsíkjai (táblázatainkon mindig az első kép) elmosódottabbak a beesés síkjában polározott fény csíkjainál. Egy és ugyane táblázat két képének összehasonlításakor látható, hogy a csikok eltolódása a beesés síkjára merőlegesen polározott fénynél nagyobb, mint a beesés síkjában polározott fénynél. Ez különösen akkor szembetűnő, ha a csikokat hosszában a lap síkjához közel helyezett szemmel nézzük.

5. §. A kísérleti módszer elemi elméletéről.

A megelőző §-ban ismertetett kísérleti módszerrel végeztük quantitativ méréseinket.

E mérési eredmények birtokában kíváncsiak, hogy az észlelt phasisváltozást a FRESNEL-féle theoretikus formulával számított phasisváltozással egybevevessük. Hogy azonban ezt tehessük, először is a teljes fényvisszaverődés phasisváltozásainak FRESNEL-féle theoretikus értékeit kell idéznünk, másodsor pedig kísérleti berendezésünk elemi elméletéről kell szólnunk, azaz meg kell állapítanunk azt, mely esetben lesz a kísérleti úton lemért csikeltolódásnak megfelelő phasisváltozás a teljes fényvisszaverődés phasisváltozásával egyenlő, mely esetben nem, s mi lesz az utóbbi esetben a kettő közötti összefüggés.

Miként már bevezető sorainkban is jeleztük, a FRESNEL-féle fényelmélet értelmében az optikailag sűrűbb közegben a ritkább felé haladó és a két közeg határfelületéről visszaverődő

fény phasisa a visszaverődés folytán nem változik mindaddig, míg a visszaverődés a közönséges értelemben történik. Ha azonban a beesés szögének növelésével átlépjük a teljes visszaverődés határszögletét, azaz, ha a fény teljesen visszaverődik, akkor úgy a beesés síkjával parallel, mint az erre merőleges vektorkomponensnek phasisa külön-külön egymástól teljesen függetlenül változást szenved. Jelöljük a beesés síkjával parallel vektorkomponensnek (azaz a beesés síkjára merőleges síkban polározott fénynek)¹ phasisváltozását ϑ_p -vel, a beesés síkjára merőleges komponensnek (azaz a beesés síkjában polározott fény) phasisváltozását ϑ_m -el. A FRESNEL-féle elmélet a ϑ_p és ϑ_m értékeit a közegek relativ törésmutatójának n -nek és a fénybeesés szögének i -nek következő függvényeivel állítja elő:²

$$\begin{aligned}\sin \vartheta_p &= \frac{2n \cos i \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}}{\cos^2 i + n^2 (n^2 \sin^2 i - 1)} \\ \sin \vartheta_m &= \frac{2n \cos i \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}}{n^2 - 1}.\end{aligned}\quad (1)$$

A FRESNEL-féle theoretikus eredmények ismertetése után rátérünk kísérleti berendezésünk elemi elméletének tárgyalására.

De már itt jelezzük, hogy az elméletet csupán ama specziális esetre vonatkozólag tárgyaljuk, a melyre e dolgozat vonatkozik, azaz a fővektorkomponensek (a beesés síkjával parallel és az erre merőleges komponens) phasisváltozásának meghatározására. Kísérleti berendezésünk általános elméletét, mely arra az esetre vonatkozik, ha a fényt tetszésszerinti azimuthban, vagy egyáltalában nem polározzuk, melyre nézve már kísérleti

¹ Ugyanis a FRESNEL-féle elmélet szerint a fényvektor merőleges a fény polározássíkjára. De e kijelentésünk után azonnal folytatólag fel kell említenünk, hogy az, a mi FRESNEL-nél csak theoretikus következmény volt, ma már FRÖHLICH I. tanár úr nagyfontosságú kísérleti megfigyelései alapján kísérletileg igazoltnak tekintendő: Lásd FRÖHLICH I.: Mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen. 22. kötet 303. old. 1904. Über die Polarisation des gebeugten Lichtes. TEUBNER. Seite 328, 353, 376, 379. 1907.

² A. FRESNEL: Oeuvres complètes. Tome 1. page 786. 1866.

megfigyeléseket is végeztünk, egy később közlendő dolgozat tárgya lesz.

Kísérleti módszerünk útján mi azt a phasisváltozást mérjük, mely megfelel ama csikeltolódásnak, mely az okularmikrométer fonálkeresztje helyén előáll. De kérdés már most az, hogy e direkt mért phasisváltozás mennyiben egyenlő a teljes fényvisszaverődés phasisváltozásával, és ha azzal nem egyenlő, mérési eredményeinkből mi módon következtethetünk a teljes fényvisszaverődéskor előálló phasisváltozásra?

Tárgyalásaink folyama alatt folyton felhívtuk a figyelmet kísérleti berendezésünk ama optikai okaira, melyeknél fogva a fény phasisa változhat, illetve változik, úgy hogy könnyen beláthatólag itt két esetet kell megkülönböztetnünk. Az egyik esetben az edénykében lévő folyadék abszolút törésmutatója az üvegénél kisebb (pl. ha a folyadék víz), a második eset pedig az, melynél a folyadék abszolút törésmutatója az üvegénél nagyobb (például ha a folyadék szénkéneg). Rövidség kedvéért e két esetet együtt tárgyaljuk. A két eset különválasztását csakis tárgyalásaink végén eszközöljük.

Meggondolásainkat úgy végezzük, hogy mindenekelőtt külön-külön meghatározzuk az interferáló sugarak vektorainak értékét az okularmikrométer fonálkeresztje síkjában. Ezután e vektorkifejezések ismeretével az interferenciacsikok helyét állapítjuk meg, a miáltal a két csiksor egymástól való eltolódását a keresett phasisváltozásokkal kifejezve nyerjük.

A fényvektorok eme kifejezéseinek meghatározása céljából kísérleti berendezésünkben fel kell keresnünk azokat az optikai okokat, melyek folytán a fény phasisában változás áll vagy állhat elő. Az S_1 és az S_2 virtuális fényforrásból (4. ábra) jövő fénynyalábok sugarai egyenlő phasisban indulnak. E sugarak az L' lencse felületére közel merőlegesen esnek s ezért e törés folytán phasisváltozást nem szenvednek. A fénynyalábok ezek után a prisma befogó lapjához érnek, ahol megtörnek. A két fővektorkomponensnek e törés alkalmával előálló phasisváltozását, a mely a felületnek esetleges tisztátalansága folytán származhat, jelöljük δ_p illetve δ_m -el. Most következik a fényvisszaverődés. Az S_1 fényforrás összes sugarai üveg-levegő határfelületről re-

reflektálódnak, minek folytán a fenti vektorkomponensek phasisa ϑ_p illetve ϑ_m -mel növekszik. Az S_2 -ből jövő sugarak közül azok, melyek az edényke ab -élén (1. ábra) keresztül fektetett vízszintes sík felett haladnak, szintén üveg-levegő határfelületről reflektálódnak, ellenben a többi sugár, azaz azok, melyek a sík alatt haladnak, üveg-folyadék határfelületről verődnek vissza. A határfelületet alkotó közegek relatív törésmutatójának különbözősége folytán az előbbi sugarak vektorkomponenseinek phasisai szintén ϑ_p illetve ϑ_m -mel növekednek; az üveg-folyadék felületről visszaverődött fény phasisai ellenben más értékkel, ϑ'_p illetve ϑ'_m -mel változnak. A fénynek a prizmából kifelé való törése a phasisokat az előbb említett esetleges okból ϑ'_p illetve ϑ'_m -mel növeli. A sugarak a H hengerlencsére közel merőlegesen esnek, ezért a fény phasisa e törés folytán nem változik.

A közbeiktatott N nikol segítségével a fővektorkomponenseknek csak az egyikét vagy csak a másikat, tetszés szerint bocsáthatjuk az okularmikrométerhez.

1. Ha a nikolt úgy forgatjuk el, hogy a rövidebb diagonális a beesés síkjában fekszik, akkor a nikol a beesés síkjára merőlegesen polározott fényt, azaz csakis azt a komponensfényt bocsátja át, melynek vektora a beesés síkjában fekszik. Ez esetben az interferáló fénysugaraknak vektorkifejezéseit könnyen előállíthatjuk.

A mikrométerhez érkező fénysugarakat négy csoportba sorozzuk. Egy ily csoportot alkotnak az S_1 fényforrás ama sugarai, a melyek a prisma felületéről a folyadékkal telt edény ab (1. ábra) élén keresztül fektetett vízszintes sík felett reflektálódnak, ezek vektorait jelöljük így: $(\mathcal{A}'_p)_1$; egy másik csoport, mely ugyan az előzővel azonos jellegű, melyet azonban megkülönböztetni célszerű, ugyancsak az S_1 fényforrásból jövő, de a fenti vízszintes sík alatt visszaverődő sugarak csoportja. Ezek vektorkifejezése legyen $(\mathcal{A}''_p)_1$. Az S_2 fényforrásból jövő, az előbb említett sík felett reflektáló sugarak vektorát $(\mathcal{A}'_p)_2$ -vel, a vízszintes sík alatt, tehát az üveg-folyadék felületéről reflektáló sugarak vektorát $(\mathcal{A}''_p)_2$ -vel jelöljük.

E vektorok a fentebb mondottak figyelembe vételével következőkép fejezhetők ki:

$$(\mathfrak{M}'_p)_1 = A_p \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{s_1}{\lambda} + \delta_p + \vartheta_p + \delta'_p \right)$$

$$(\mathfrak{M}'_p)_2 = A_p \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{s_2}{\lambda} + \delta_p + \vartheta_p + \delta'_p \right)$$

$$(\mathfrak{M}''_p)_1 = A_p \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{s_1}{\lambda} + \delta_p + \vartheta_p + \delta'_p \right)$$

$$(\mathfrak{M}''_p)_2 = A'_p \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{s_2}{\lambda} + \delta_p + \vartheta'_p + \delta'_p \right).$$

Az e vektorok által kifejezett sugarak között jön létre az interferencia, még pedig úgy, hogy a ' -vel jelöltek egymással, a '' -vel jelöltek pedig szintén egymással interferálnak. Miután a *H* hengerlencse a sugarak egymáshoz viszonyított helyzetét megfordítja, ezért a ' -vel jelölt vektoroknak megfelelő függélyes interferenciacsíkokat a látótérben alul, a '' -vel jelöltekét pedig felül figyeljük meg. Az előálló fényintenzitást az ismeretes szabály szerint képezük:

$$I' = C \left[A_p^2 + A_p^2 + 2A_p A_p \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right]$$

$$I'' = C \left[A_p^2 + A_p'^2 + 2A_p A'_p \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta'_p - \delta_p \right) \right],$$

hol *C* az arányossági tényező.

Az első kifejezésben az $A_p A_p$ szorzat *mindig pozitív*, ellenben a második kifejezésben az $A_p A'_p$ szorzat *vagy pozitív, vagy negatív*.

A parallel vektorkomponens amplitudója ugyanis a polárizás szögleténél az előjelét megváltoztatja s ezért az A'_p -nek az előjele a levegő, illetőleg a folyadék határfelületéről történő visszaverődésekhez tartozó polárizásszögletek, a *P*, illetőleg a *P'* által határolt intervallumon *kívül* mindenütt az A_p előjélével *megegyezik*, de a *P* és *P'* közötti *közben* az A'_p előjele *ellentett*.

Ezek figyelembe vételével az *I'* és az *I''* szélső értékeire vonatkozólag a következő eredményekre jutunk:

$\alpha)$ I' szélső értéket ott vesz fel, ahol az $x = 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda}$ kielégíti a $\left(\frac{dI'}{dx}\right) = -2CA_p A_p \sin x'_0 = 0$ egyenletet, azaz I' maximum, ha

$$x'_0 = 0 \quad \pm 2\pi \dots$$

és minimum, ha

$$x'_0 = \pm \pi \quad \pm 3\pi \dots$$

$\beta)$ I'' -nek az x oly értékeivel vannak szélső értékei, a mely x -re nézve a $\left(\frac{\delta I''}{\delta x}\right) = -2CA_p A'_p \sin (x''_0 + \vartheta'_p - \vartheta_p) = 0$ egyenlet érvényes, azaz

$\beta)_a$ A P és a P' közötti intervallumon kívül az I'' maximum, ha

$$x''_0 = \vartheta_p - \vartheta'_p \quad \vartheta_p - \vartheta'_p \pm 2\pi \dots$$

és minimum, ha

$$x''_0 = \vartheta_p - \vartheta'_p \pm \pi \quad \vartheta_p - \vartheta'_p \pm 3\pi \dots$$

$\beta)_b$ A P és a P' által határolt *közben* pedig I'' maximum, ha

$$x''_0 = \vartheta_p - \vartheta'_p \pm \pi \quad \vartheta_p - \vartheta'_p \pm 3\pi \dots$$

és minimum, ha

$$x''_0 = \vartheta_p - \vartheta'_p \quad \vartheta_p - \vartheta'_p \pm 2\pi \dots$$

Tehát az I'' csíksorát úgy foghatjuk fel, hogy az az I' csíksorából a csíkokra merőleges irányban való

illetőleg

$$x_p = \vartheta_p - \vartheta'_p \quad (2)$$

$$x_p = \vartheta_p - \vartheta'_p + \pi$$

nagyságú eltolódásával származott.

Ez egyenletek fejezik ki azt az összefüggést, amely az észlelt csíkeltolódás és a levegő, továbbá a folyadék határfelületéről visszavert fény a beesés síkjával parallel komponensének phasisváltozásai között fennáll. Az első formulát akkor alkalmazzuk, ha a beesés szöge i a P és a P' által határolt kö-

zön *kívül* van, a másodikat ellenben akkor, ha az i szög a F és a P' szögek *közé* esik.

2. Ha a beesés síkjára merőleges vektorkomponens phasis-változását óhajtjuk meghatározni, akkor a nikolt előbbi állásából 90° -kal kell elforgatnunk.

Az A'_m előjele minden beesési szögnél megegyezik az A_m előjelével, úgy, hogy a jelen esetben a csikeltolódás és a phasis-változások közötti összefüggést egyetlen egy egyenlettel fejezhetjük ki. Minden egyéb tekintetben az előző meg gondolások változatlanul érvényesek, csak a p index helyébe mindenütt az m indexet kell helyettesítenünk. Ezek szerint az eltolódást kifejező egyenlet most a következő:

$$x_m = \vartheta_m - \delta'_m. \quad (2^*)$$

Mindezek a meg gondolások eddig függetlenek attól, hogy a folyadék abszolút törésmutatója az üvegénél kisebb vagy pedig nagyobb. E két esetet eddig együtt tárgyaltuk, de fejtegetéseink további részében e két esetet egymástól külön kell választanunk

a) *A folyadék abszolút törésmutatója az üvegénél kisebb.*

A (2) és a (2*) alatti összefüggések azt fejezik ki, hogy a csikoknak egymástól eltolódása az üveg-levegő és az üveg-folyadék határfelületén végbemenő reflexio alkalmával előálló phasis-változás különbségével egyenlő.

Csak a parallel összetevő eltolódása a két polározási szöglet közötti intervallumban kivétel.

Ha ugyanis a beesés szöge *nagyobb* F -nél, de a mellett *kisebb* P' -nél, akkor a phasisváltozások *különbségét* az interferenciacsikok eltolódásának meghatározása céljából π -vel kell növelnünk.

Ezek szerint a csikeltolódás megállapításához csupán az *abszolút phasisváltozások* ismerete szükséges.

Ez abszolút phasisváltozások értéke a fény *partialis* reflexiója alkalmával minden beesési szögnél zérus, de a fény *teljes* visszaverődésekor *zérustól különböző* s azzal az értékkel egyenlő, amelyet a FRESNEL-féle formulák (1) nyújtanak.

Jelöljük a *levegő határfelületén* történő teljes visszaverődés *határszögét* Φ -vel, akkor a

$$0 \leq i \leq \Phi \text{ intervallumban } \vartheta_p = 0, \vartheta_s = 0,$$

ellenben a

$$\Phi < i \leq \frac{\pi}{2} \text{ intervallumban } \vartheta_p \neq 0, \vartheta_s \neq 0;$$

hasonlóképen, ha Φ' a *folyadék határfelületén* végbemenő totális reflexio *határszögét* jelenti, akkor a

$$0 \leq i \leq \Phi' \text{ intervallumban } \vartheta'_p = 0, \vartheta'_s = 0,$$

ellenben a

$$\Phi' < i \leq \frac{\pi}{2} \text{ intervallumban } \vartheta'_p \neq 0, \vartheta'_s \neq 0.$$

Mint hogy pedig a leggyakoribb esetben $P < \Phi < P' < \Phi'$, ezért az interferenciásíkok eltolódásai a következők:

| | | | | | |
|---|--------------------------------|----------------|------------------------------------|---|------------------------------------|
| A | $0 \leq i \leq P$ | intervallumban | $x_p = 0$ | , | $x_m = 0$ |
| | $P < i \leq \Phi$ | " | $x_p = +\pi$ | , | $x_m = 0$ |
| | $\Phi < i \leq P'$ | " | $x_p = \pi + \vartheta_p$ | , | $x_m = \vartheta_m$ |
| | $P' < i \leq \Phi'$ | " | $x_p = \vartheta_p$ | , | $x_m = \vartheta_m$ |
| | $\Phi' < i \leq \frac{\pi}{2}$ | " | $x_p = \vartheta_p - \vartheta'_p$ | , | $x_m = \vartheta_m - \vartheta'_m$ |

Az x_p illetőleg az x_m értékeivel igen könnyen megszerkeszthetjük ama görbéket, amelyek a csikeltolódásnak a beesés szögétől való függését ábrázolják.

A 6. §-ban alkalmunk lesz e görbéket egy speciális esetben feltüntetnünk. A következőkben ez összefüggésekről csak teljesen általános szempontból óhajtunk szólni.

Ha a fény a *beesés síkjára merőlegesen polárizott*, akkor a csikeltolódás, az x_p a merőleges beesés és a P polárizációs szöglet között mindenütt zérussal egyenlő, a P szögletnél ugrászerűen veszi fel a $+\pi$ értéket, a melyet megtart mindaddig, a míg a beesés szöge a totális reflexio határszögét Φ -t eléri, ezután folytonosan nő, a P' polárizációs szögletnél ismét ugrászerűen változik, még pedig a teljes visszaverődés abszolút phasisváltozásának értékére redukálódik, ezután a növekedő be-

esési szög mellett folytonosan nő, s végül mikor a fény a folyadék határfelületéről is teljesen visszaverődik, folytonosan (zérusig) csökken.

A x_p eltolódást ábrázoló görbének tehát két singularis pontja van (lásd az 5. ábrát).

Ha azonban a fény a beesés síkjában polárizott, akkor a csikeltolódásnak a beesés szögétől való függését egy mindenütt folytonos görbe ábrázolja. A csikeltolódás értéke a fény partialis reflexiója alkalmával zérus, a levegő határfelületén végbemenő totális reflexio alkalmával a FRESNEL-féle formuláknak megfelelőleg folytonosan növekszik, a mikor pedig a beesési szög a φ' határszögnél is nagyobb lesz, akkor a csikeltolódás folytonosan zérusig csökken (lásd a 6. ábrát).

b) *A folyadék abszolút törésmutatója az üvegénél nagyobb.*

Ha azonban a folyadék abszolút törésmutatója az üvegénél nagyobb, akkor nincs oly beesési szög, a melynél a fény a határfelületről teljesen visszaverődne, a fényreflexio az üveg-folyadék határfelületről minden beesési szögnél a közönséges értelemben megy végbe. A ϑ'_p és a ϑ'_m értéke tehát a beesésszöggel nem változik; de a ϑ'_p és ϑ'_m a jelen esetben nem zérus, hanem egy állandó számérték, még pedig π vagy másként 180° .

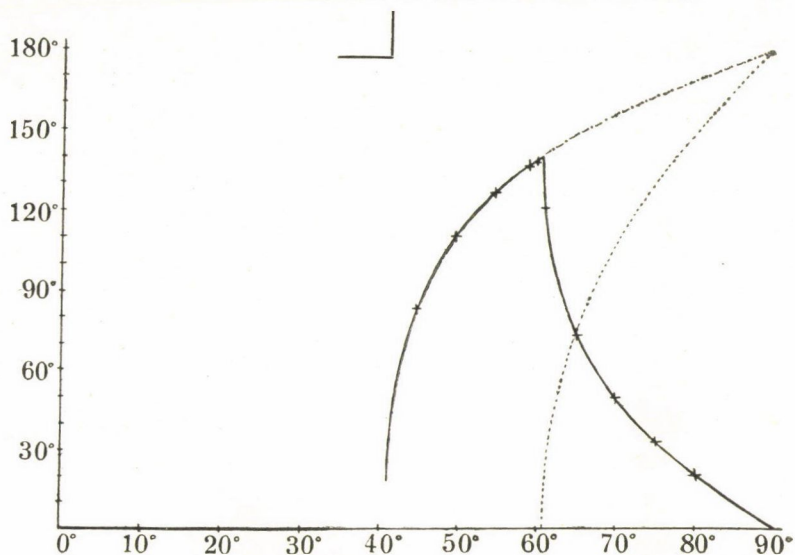
A csikeltolódások tehát:

$$\begin{array}{ll} \text{A} & 0 \leq i \leq P \text{ intervallumban } x_p = -\pi, \quad x_m = -\pi \\ & P' \leq i \leq \varphi \quad \quad \quad \text{''} \quad x_p = 0, \quad x_m = -\pi \\ & \varphi \leq i \leq P' \quad \quad \quad \text{''} \quad x_p = \vartheta_p, \quad x_m = \vartheta_m - \pi \\ & P' \leq i \leq \frac{\pi}{2} \quad \quad \quad \text{''} \quad x_p = \vartheta_p - \pi, \quad x_m = \vartheta_m - \pi. \end{array}$$

Ezzel kísérleti berendezésünk elemi elméletét megadtuk. Az általános elméletről, miként azt már előbb is említettük, egy későbbi alkalommal szólunk.

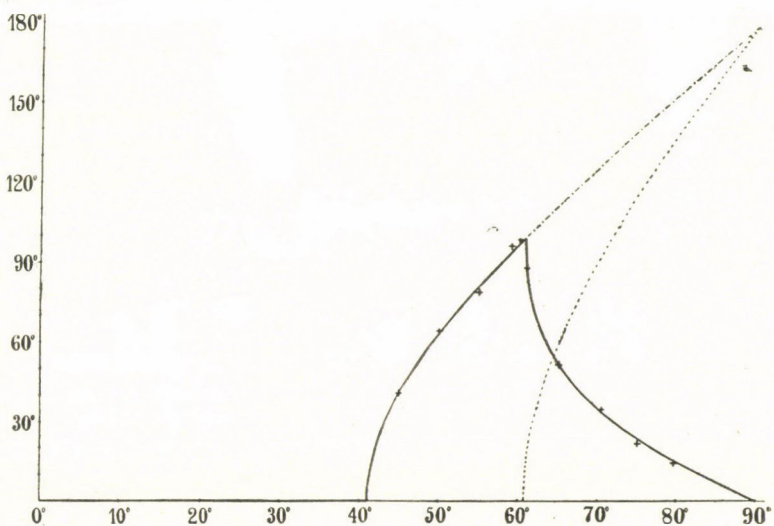
6. §. A kísérlet és az elmélet eredményeinek egybevetése.

Az (2) és a (2*) alatti egyenlet, kombinálva az (1) alatti összefüggésekkel, lehetővé teszi azt, hogy a csikeltolódásnak



5. ábra. A beesés síkjára merőleges síkban polározott fény phasisváltozása.

- az üveg-levegő határfelületről visszaverődő fény phasisváltozása.
- az üveg-víz határfelületről visszaverődő fény phasisváltozása.
- a theoretikusan nyert esikeltolódásoknak megfelelő phasisváltozások görbéje.
- + az észlelt értékek.



6. ábra. A beesés síkjában polározott fény phasisváltozása.

- az üveg-levegő határfelületről visszaverődő fény phasisváltozása.
- az üveg-víz határfelületről visszaverődő fény phasisváltozása.
- a theoretikusan nyert esikeltolódásoknak megfelelő phasisváltozások görbéje.
- + az észlelt értékek.

megfelelő phasisdifferentiát adott esetben az üvegprisma és a folyadék ismeretes törésmutatójának segítségével minden beesési szögre nézve kiszámíthatjuk. Más oldalról pedig az okulármikrométer segítségével e phasisdifferentiát kísérletileg meghatározhatjuk. Módunkban áll tehát ugyanazt a mennyiséget theoretikus alapon kiszámítani és kísérleti úton megmérni és így az elméletet a tapasztalattal összehasonlítani.

Quantitativ méréseinknél, mint már említettük, folyadék gyanánt vizet használtunk. Minthogy a víz abszolút törésmutatója, 1·331, az üvegprismának törésmutatójánál, 1·526-nál kisebb, ezért, az előző § a. alatti esetével találkozunk.

A ϑ_p és a ϑ_m -nek értéke az 1·526 törésmutatójú közegek határfelületén végbemenő teljes visszaverődés határszögénél, $40^\circ 57'$ -nél kisebb beesési szögnél mindenütt zérus, ezután a beesési szögnek növekedésével az (1) alatti függvények szerint úgy ϑ_p , mint ϑ_m folytonosan, de nem egyformán, egészen $+180^\circ$ -ig nő, mely értéket mindkettő a rasans beesésnél vesz fel.

A ϑ_p -nek a fény beesés-szögétől való függését az 5. ábrában, a ϑ_m -ét pedig a 6. ábrában — — — vonallal húzott görbe tünteti elő. E görbéknek 0° -tól $60^\circ 43'$ -beesési szögig eső részét vastag vonallal ábrázoltuk.

A ϑ'_p és ϑ'_m értéke az $\frac{1.526}{1.331} = 1.147$ relativ törésmutatójú közegek határfelületén végbemenő totális reflexióhoz tartozó határszögnél, $60^\circ 43'$ -nél kisebb beesési szögnél szintén mindenütt zérus. Ha a beesés szögével e határszöget átlépjük, akkor a fény e határfelületről is teljesen visszaverődik, amiért is a ϑ'_p és ϑ'_m ekkor már nem zérus, hanem azzal az értékkel egyenlő, a melyet az (1) alatti függvények az 1·147 törésmutató esetén a kérdéses beesési szögre nézve nyújtanak. A ϑ'_p illetve a ϑ'_m értékeit az ábrákon a vonallal húzott görbék tüntetik fel.

A theoretikus csikeltőlódás görbéit rajzainkon vastagon húztuk ki.

Ábráinkon + -tel jelöljük az észlelt értékeket, a következő táblázatban pedig numerikusan foglaljuk össze a számított és észlelt értékeket:

| A fény beesés szöge | $\vartheta_p - \vartheta'_p$ | | | $\vartheta_m - \vartheta'_m$ | | |
|---------------------------|------------------------------|-----------|-----------|------------------------------|-----------|-----------|
| | észlelt | számított | különbség | észlelt | számított | különbség |
| 40° | | 0° | — | 0° | 0° | 0·0° |
| 45° | 83·0* | 82·4 | +0·6° | 40·9 | 41·2 | 0·3 |
| 50° | 110·1 | 110·4 | - 0·3 | 64·4 | 63·4 | +1·0 |
| 55° | 126·4 | 126·8 | - 0·4 | 78·8 | 81·3 | - 2·5 |
| 59° | 136·4 | 136·4 | -0·0 | 96·5 | 94·0 | +2·5 |
| 60° | 137·7 | 138·5 | - 0·8 | 99·0 | 97·1 | +1·9 |
| 61° | 120·6 | 120·5 | +0·1 | 88·2 | 85·0 | +3·2 |
| 65° | 72·9 | 72·8 | +0·1 | 51·8 | 51·5 | +0·3 |
| 70° | 49·7 | 48·7 | +1·0 | 34·9 | 34·8 | +0·1 |
| 75° | 32·9 | 33·0 | 0·1 | 21·9 | 23·8 | - 1·9 |
| 80° | 20·3 | 20·7 | - 0·4 | 14·5 | 15·0 | -0·5 |

Látható, hogy a számított értékek az észlelt értékekkel jól megegyeznek.

E quantitativ észleléseimen kívül részletes megfigyelést végeztem az 5. §. második esetére, azaz arra az esetre nézve is, melynél a folyadék abszolút törésmutatója az üvegénél nagyobb. Kísérleteimhez folyadék gyanánt szénkéneget használtam.

E kísérleti megfigyeléseimmal is igazoltam azt a már ismeretes eredményt, hogy a ϑ'_p illetve ϑ'_m 180°-kal egyenlő, azaz, hogyha a fény optikailag ritkább közegben sűrűbb felé halad és a határfelületről visszaverődik, akkor mindkét főkomponens phasisa $1/2$ hullámhossznyi változást szenved.

7. §. Eredmények.

Vizsgálatom eredményeit a következőkben foglalom össze:

Sikerült oly kísérleti berendezést megalkotnom, melylyel a teljes fényvisszazерődés abszolút phasisváltozásai nagy pontossággal mérhetők. A kísérleti egybeállítás alkalmas nem csupán a fény fővektorkomponenseinek, nevezetesen a beesés síkjában

* Jelentését lásd a 17. oldalon.

fekvő és az erre merőleges összetevők phasisváltozásának tanulmányozására, hanem egyszersmind a tetszés szerint polározott, sőt a természetes fény phasisváltozásainak vizsgálatára is.

A kísérleti berendezés elemi elméletét kifejtettem. Ez elmélet kizárólagosan csakis a fővektorkomponensek phasisváltozásaira érvényes.

Kimerítő quantitativ vizsgálatok alapján a FRESNEL-féle elméletnek a tapasztalattal való igen jó egyezését konstatálhattam.

Igazoltam azt a már ismeretes eredményt, hogy ha a fény optikailag ritkább közegben sűrűbb felé halad és a két közeg határfelületéről visszaverődik, akkor úgy a beesés síkjában fekvő, mint az erre merőleges vektorkomponensnek a phasisa minden beesés szögnél 180° -kal megváltozik.

A beesés síkjával parallel vektorkomponensnek a polározás szögleténél történő előjelváltozását észleltem.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1913 május 19.-én tartott üléséből.)

ORGANIKUS FESTÉKSYNTHESIS ALKALOIDÁKKAL.

KONEK FRIGYES-től.¹

I. rész. Cinchonin és tetramethyldiaminobenzhydrol.

Közismert dolog, hogy a tetramethyldiaminobenzhydrol kiválóan alkalmas triphenylmethanfestékek synthesis útján való készítésére. Az ide vágó óriási terjedelmű szak- és szabadalmi irodalomból csak egy pár fontosabb csoportreactióról kívánok itt egészen röviden megemlékezni. Így péld. kondenzálható ez a hydrol aromás szénhidrogénekkel, azok halogén vagy nitro-származékaival, sulfosavjaival és phenolætherekkel,² már forró alkoholban simán egyesül primær aromás aminekkel substituált leukauraminekké: $R \cdot NH \cdot CH \cdot [C_6H_4 \cdot N(CH_3)_2]_2$; ³ ortho substituált anilinekkel pedig, conc. kénsavval való kondenzálás révén zöld festékek leukobázisait szolgáltatja. Anilin és naphtylamin sulfosavakkal,⁴ továbbá alkylált és acylált aminekkel, vagy azok sulfosavjaival könnyen ad triphenylmethan festékeket.⁵ Conc. kénsavval, phenolokkal, azok sulfo- és carbonsavjaival szintén triphenylmethan szerkezetű festékek leukovegyületeivé kondenzálható,⁶ a melyek oxydálva, zöld, viola és kék festékeket szolgáltatnak. Kondenzálták továbbá ezen hydrolt alkoxy-diarylaminekkel,⁷ oxazinekkel,⁸ aminonaphtolsulfosavakkal, dioxynaphtalin-

¹ Közlemény az orsz. chem. int. technol. laboratoriumából.

Ezzel a kérdéssel már évekkel ezelőtt FENHORN A. tanárral kezdtem foglalkozni, még a müncheni egyetem organikus laboratoriumában; de csak most jutottam hozzá kísérleteim folytatásához.

² FRIEDLANDER: III. 128. IV. 212.

³ MÖHLAU: Ber. 33. 800.

⁴ FRDL.: IV. 209—212.

⁵ FRDL.: III. 130—136. IV. 204—207.

⁶ FRDL.: III. 120—127.

⁷ FRDL.: III. 144.

⁸ FRDL.: III. 137; IV. 216.

sulfosavakkal,¹ carbonsavakkal,² *p*-chinonokkal és nitrosophenolokkal; *m*-phenylendiaminnal acridinfestékeket ad;³ egyesül végül *p*-oxyazotestekkel⁴ és aromás hydrazinekkal stb. stb.

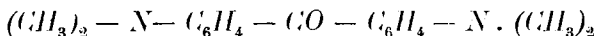
Ha már most végigtekintünk a kondenzációs reakciók e rengeteg tömegén, szemünkbe ötlük, hogy majdnem valamennyi komponens, a mely tetramethyldiaminobenzhydrollal kondenzálva festékjelleggel bíró termékeket szolgáltat, egy vagy több chromophor csoportot, azaz hydroxylt, vagy aminocsoportot, vagy pedig mindkettőt tartalmaz. Mivel továbbá a természetes növényi bázisok vagy alkaloidák molekuláiban szintén megvan e két feltétel, a mennyiben azok csaknem kivétel nélkül egy vagy több alkoholos vagy phenolos functióval bíró hydroxylcsoportot tartalmazó tertiar (vagy elvéve secundær) bázisok: közelfekvőnek látszott az a gondolat, hogy az alkaloidmolekulák is kondenzálhatók lesznek a benzhydrollal festékjelleggel bíró vegyületekké. Hogy ez a következtetésem nem volt helytelen, azt az alábbiakban röviden összefoglalt kísérleteim bizonyítják, a melyek a legközönségesebb chinaalkaloidának, a cinchoninnak (egy bitertiar bázisnak, a melyben egy harmadrendű alkoholos, functióiban a phenoljellegét megközelítő hydroxylcsoport van) a benzhydrollal való kondenzálásával foglalkoznak. Természetes dolog, festéksyntheticai szempontból csak azok az alkaloidák jöhetnek tekintetbe, a melyek nagyobb mennyiségben és így olcsóbban állanak rendelkezésünkre és valami más, nemesebb tulajdonsággal, physiologiai hatással nem bírnak. Ép ezért választottam első festéksyntheticai kísérleteimhez a cinchonint, a mely egyrészt jelentékeny mennyiségben fordul elő a chinakéregben, másrészt pedig igen csekély antifebrilis hatásánál fogva kisebb forgalmi értékkel bír. Kísérleteimhez a chinin anyalúgjaiból előállított tiszta és kristályos cinchonin-præparatumot használtam. A benzhydrol készítésekor pedig következőkép jártam el: 50 gramm kereskedelmi tetramethyldiaminobenzophenont⁴ (dimethylanilin és phosgénből)

¹ FRDL.: IV. 214.

² FRDL.: IV. 211.

³ FRDL.: IV. 1043.

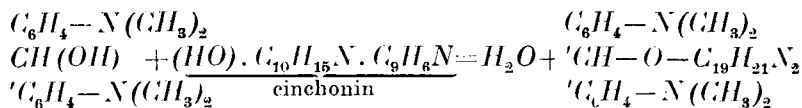
⁴ MÖHLAU: Ber. 33. 2858.



erős falú lombikban, sok borszeszben oldottam és folytonos forralás közben adagoltam bele 300 gramm frissen előállított 4%-os natrium-amalgamot mindaddig, míg az oldatnak eredetileg zöld színe teljesen eltűnt, jelölül annak, hogy a ketonnak a megfelelő secundar alkohollá való reductiója immár teljesen befejeződött. Kihűléskor a termék főtömege kristályosan leválik, a többit az anyalúgok koncentrációjával nyerhetjük. A hydrolnak a cinchoninnal való kondenzálását egyszerű molekuláris arányban végeztem, mint kondenzáló szert pedig feles conc. kénsavat használtam. Péld.: 50 gramm conc. kénsavba adagolunk kis mennyiségben 5 gramm finom porrá szétdőrsölt hydrolt. míg az gyenge melegedés közben feloldódik; majd 5.5 grm porított cinchonint adunk hozzá és a lombikot olajfürdőben 10—15 órán át 100 fokra hevítjük. A kondenzálás be van fejezve, ha az olvadéktan változatlan hydrolt már nem lehet kimutatni. E célból egy kis próbát vízzel való hígítás után nátronlúggal túltelítünk és ha a kiváló kékes színű pelyhek vízben forralva sem oldódnak, akkor a kondenzálást befejezettnek tekinthetjük. Vagy pedig a vizes oldat jégecettel forralva, ne mutasson többé intenzív kékülést, mert ez a színreactio még változatlan hydrolnak a jelenlétét bizonyítaná. Ezután a sötét színű és kénessav szagú olvadékot sok vízbe öntjük s ammoniákkal túltelítve, addig melegítjük, míg a kicsapott leukobázis jól összetömrül és így jobban szűrhető. A szűrőn teljesen kimossuk és vacuumban kénsav felett teljesen kiszárítjuk. Az ily módon nyert hydrol-cinchonin kondenzációs termék, zöldes színű, amorf, poralakú test, a mely a szokásos organikus oldószerekben annyira könnyen oldódik, hogy ily módon nem volt sem tisztítható, sem kristályosítható. Alkalmilag 20 gramm hydrol és 22 grm cinchoninból, így eljárva, 46 grm szárított

¹ E helyen is köszönetet mondok a «Farbwerke vorm. Meister Lucius & Brüning Höchst a. Main» festékgyárnak, a mely az ezen kísérletekhez szükséges MICHLER-féle ketont a legnagyobb előzékenységgel, tetszőleges mennyiségben díjtalanul rendelkezésemre bocsájtotta.

nyers kondenzációs terméket kaptam, a mi arra látszik mutatni, hogy a kondenzáció nem egyszerű értelemben, t. i. egy molekula víz kilépése közben ment végbe, a hogy az várható volt:



hanem, hogy a kénsav ilyen körülmények között nemcsak víz-elvenőlag kondenzált, hanem egyúttal sulfurált is; azaz a keletkezett termék nehezen szétbontható keveréke a fentebbi, várható rendes kondenzációs terméknek, annak mono- vagy diszulfosav származékaival. Ez a felfogás annál is inkább látszik jogosultnak, mivel SKRAUP-nak és munkatársainak kutatásaiból tudjuk azt, hogy a cinchonin egymagában is szolgáltat conc. kénsavval bizonyos körülmények között cinchonin szulfosavakat, továbbá az általam nyert kondenzációs terméknek úgy qualitativ, mint quantitativ elemzése is erre látszanak mutatni. Ez a szulfosav forró vízzel való digerálás által sem különíthető el a nem sulfurált kondenzációs terméktől. Sőt mint főtermék keletkezik, ha 60—70 fokon 8—10 óráig kondenzálunk. Ha ezután fölös vízbe öntjük az olvadékot és nátronlúggal túltelítjük, a szulfosav nátriumsója zöldes színű, szárunemű tömeg alakjában csapódik ki, a mely tiszta, nem alkalikus vízzel maczerálva kristályossá lesz és oldatba megy, míg az egyidejűleg keletkezett nem sulfurált kondenzációs termék rendkívül finom emulziót alkot, a melyet szűréssel ugyan nem, de ætherrel — többszöri kirázás után — eltávolíthatunk; és így végül egy chromzöld, de kristálytiszta vizes oldatot kapunk. Ha ezt a feles alkali letompítása végett szénsavgázzal telítjük, finom eloszlású, fehér csapadék keletkezik, a mely az egész oldatot tejszerűen megalvasztja. Ez az emulzió ætherben oldhatatlan, de felvehető benzollal; a mely ledestillálva, az anyagot zöldes színű, amorf, törekeny tömeg alakjában hagyja vissza. Ez a benzolmaradék kis híján feloldódik hig ammoniában; ammoniás oldata pedig ætherrel való kirázás után chlorbaryummal amorf, fehér csapadékot ad, a mely azonban csakhamar megzöldül és elszarusodik. Hig alkoholból a szulfosav barytsója fehér pelyhek alakjában válik ki, a melyek

a levegővel érintkezve, csakhamar ismét megzöldülnek. Mindezekből kitűnik, hogy a cinchoninból és a hydrolból a kénsavval való kondenzálás útján keletkezett termék nem egyöntetű, hanem nehezen elválasztható keveréke sulfurált és nem sulfurált vegyületeknek. Hogy azonban valóban egy festőanyag leukobázisáról, az első «alkaloidfestékről» van itt szó, azt a leukobázis oxydatiója bizonyítja, a mely által valóságos festékbázissá változik. E célból az eredeti kondenzációs terméket, azaz a leukobázist feles vízben suspendálva, feloldjuk három molekula sósavban és egy molekula 50%-os ólomsuperoxydpastát (a festékiparban használatosból) adagolunk az oldatba, miután azt előbb vízzel jól iszapoltuk. Az oldat színe azonnal átesap intenzív sötétkék árnyalatba, a mi azt bizonyítja, hogy a leukovegyület festékbázissá oxydálódott. Az ólmot nátriumsulfáttal kicsapva, leszűrjük, a szűrletet pedig 1 molekula chlorzinkkel és telített konyhasóoldattal elegyítjük, mire a festék rézfémfényű, finom poralakú chlorzink kettős sója azonnal kicsapódik. Ezt leszűrjük és forró vízben oldjuk, miáltal elérjük azt, hogy a nem festékjellegű piszok visszamarad. Az oldatból chlorzinkkel és konyhasóval újra leválasztjuk a festékbázis chlorzink kettős sóját, a mely ilyen alakban még konyhasót tartalmaz, a melytől abszolút alkohollal való kivonással lehet megtisztítani. Így eljárva, 5 grm eredeti leukobázisból 2 grm chlorzink kettőssőt sikerült kinyernem.

Ezen alkaloidfesték elemzéséről, szerkezetéről, tinktorális és gyakorlati értékéről egy későbbi közleményben kívánok beszámolni, de már itt jelzem, hogy a tetramethyldiaminobenzhydrollal való kondenzálást ki fogom terjeszteni a többi china- és egyéb hasonszerkezetű alkaloidákra is, és hogy a kénsav sulfuráló hatását elkerüljem, a kondenzálást alkalmas organikus oldószerben chlorzinkkel vagy hasonló vízelvonó anyagokkal fogom végezni, a midőn is jobb százalékos eredmény és egyöntetű kondenzációs termékek keletkezése várható. Ebbeli feltevésemet igazoló kísérletekről szintén a közeljövőben fogok beszámolni.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1913 június 16.-án tartott üléséből.)

A SELEN ÚJ OXYGÉNVEGYÜLETE.

KONEK FRIGYES-től.¹

Midőn a selenchlorür szerkezetének a megfelelő kénchlorürével való összehasonlítása czéljából ezzel a halogénvegyülettel organikus synthesiseket végeztem, új selentartalmú szerves vegyületek birtokába jutottam, a melyeket a bennök levő selen quantitativ meghatározása végett a többi között a BERTHELOT-MAHLER-féle calorimeter bombájában, 25—27 atmosphaera nyomás alatt levő oxgyénben is elégettem. Kísérleteimhez egészen platinával bélelt bombát használtam, a melynek fenekét még egy külön, erős platinából való betétlemezzel védtem és ugyanazt az óvó-intézkedést alkalmaztam a bomba gyújtó tégltyében is. Így elérhető, hogy a készülék költséges platinabélése nem rongálódik és csak az anyagpastilla alatt fekvő kisebb platinabetétlemezek pusztulnak el előbb-utóbb, a mennyiben a gyújtás pillanatában felszabaduló — de még nem oxydált — selen beleolvad a platina-aljba, vele platinaselen-ötvözetet alkotva, a melyből izzítással többé a selent egészen eltávolítani nem sikerül és így idővel a platina teljes szétmállása áll be. A midőn az így felszerelt bombában a selenchlorürből és antipyrinből nyert sárga színű, kristályos antipyrilselenoselenidet² elégettem, legnagyobb meglepetésemre azt tapasztaltam, hogy a bomba fenekére és oldalfalaira egy fehér, külsejében a metaantimonsavra emlékeztető csapadék rakódott le, a mely vízben — még forralva is — alig oldódik és alkoholban is oldhatatlan. Első pillanatra azt

¹ Közlemény az Orsz. chem. int. technologiai osztály. laboratoriumából.

² KONEK : Mathem. és természettud. ért. 1913.

hittem, hogy a BERZELIUS óta keresett, de még elő nem állított selensavanhydridet sikerült ily módon felfedeznem. A terméket mechanikai úton platinspatulával és alkohollal lehet a bomba belső falairól, a melyekhez erősen hozzátapad, eltávolítani, keményített szűrőre gyűjteni, alkohollal jól kimosni és 100—105 fokon kiszáritani. Több kísérlet után 1 gr. selenvegyületből körülbelül 100 milligramm terméket sikerült ily módon előállítanom. A száraz állapotban fehér, poralakú test tiszta nátronlúggal leöntve azonnal megfeketedik, illetve selentartalmának egy részét fekete selen alakjában leválasztja, míg annak főtömege valószínűleg mint nátriumseleniát oldatba megy. A termék elemzéseit is ezen viselkedéséből kifolyólag oly módon végeztem, hogy lemerített mennyiségű anyagot feles tiszta nátronlúggal néhány perczig forraltam, a levált fekete szelent 105 fokon szárított mért szűrőre hoztam és az alkálit forró vízzel quantitative kimostam belőle. A szűrletet conc. sósavval túltelítve bekonzcentráltam és hidegen telítettem kénessavgázzal, a mikor a selen főtömege a fehérből a vörösbe átmenő színű csapadék alakjában kiválik, a mely forralásra csakhamar tömörül és megfeketedik. Több órai állás után ezt a második selencsapadékot is 105 fokon kiszáritott mért szűrőre hoztam és forró vízzel kimostam belőle quantitative a konyhasót. A selencsapadékok 105 foknál súlyállandóságig lettek száritva. A második selencsapadék szűrleteit bepárololtam; újból főztem sósavval, telítettem kénessavgázzal; és ha forralás és hosszabb idei állás után már nem válik ki selen, az oldatot egészen bepároljuk: ekkor, ha a selen teljesen le volt választva, fehér színű konyhasó marad vissza; ha azonban a maradék barnás vagy vöröses színű, újra feloldjuk és a selen leválasztását megismételjük.

Elemzések:

1. 0·1340 gr. 105 fok száraz anyag adott I. nátronlúggal 0·0295 gr. selent és II. SO_2 -vel 0·0756 gr. selent vagyis összesen 0·1051 gr. selent.

2. 0·0860 gr. 105 fok száraz anyag (más kísérletből) adott I. 0·0153 gr. és II. 0·0517 gr., vagyis összesen 0·0670 gr. selent.

Eszerint tehát az összes selen talált mennyisége az első elemzés szerint 78·43, a második szerint pedig 77·91 %. Mivel

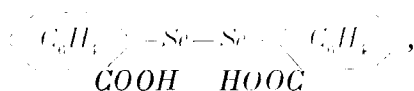
ez a termék — már keletkezése körülményeinél fogva is — a selennek csakis valamely oxigénvegyülete lehet, a fentebbi és nagy gonddal végzett elemzésekből és az anyagnak nátronlúggal szemben tanúsított magatartásából és egyéb tulajdonságaiból is arra kell következtetni, hogy olyan selenoxydról van itt szó, a mely nem azonos az eddig előállított és ismert selenoxygénvegyületeknek egyikével sem, és a melynek a molekulájában legalább is két vagy több selen-atom kell hogy foglaltassék; mert alkali az összes selennek körülbelül csak egy negyed részét hasítja le, míg a többi háromnegyed rész mint savképző gyök alkalikus oldatba megy. Mindezeknek a követelményeknek a Se_3O_4 képlet — 78.78% színselennel — felelne meg legjobban, a melyet azonban most csak fentartással közlök. Ezen selenoxyd belső szerkezetére, strukturájára vonatkozólag teljes határozottsággal ez idő szerint még nem nyilatkozhatom, de említésre méltónak tartom az eddig is ez irányban végzett kísérleteimet. Mindenekelőtt fontos az a kísérletileg is beigazolt tény, hogy ezen új és oldhatatlan selenoxydot eddig csakis az antipyrilselenoselenidnek a bombában való elégetésekor sikerült megkapnom, míg az egy selenatommal bíró diantiprylmonoselenid ugyanazon körülmények között még nyomát sem adja az új selenoxydnak. Minthogy bebizonyítottnak vehető,¹ hogy a diantiprylselenoselenid szerkezete: $R-Se-R$, vagyis két, két-

Se

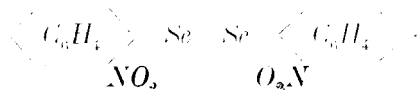
szeresen kapcsolt selenatomot tartalmaz molekulájában, közel-fekvő az a feltevés, hogy valamely okozati összefüggés forog fenn ezen szerkezet és az oldhatatlan selenoxyd keletkezése között; vagyis más szóval, nem látszik erőltetettnek az a hypothesis, a mely azt tételezi fel, hogy ez az új és nehezen oldható selenoxyd csak oly organikus selenvegyületek elégetésekor keletkezik, a melyek a fentemlített strukturával bírnak, azaz két egymással kétszer kapcsolt selenatomot tartalmaznak; a miből viszont az következne, hogy ezen oxydban is hasonló strukturát tételezhetünk fel, és hogy talán éppen ez a lazán (kétszeresen) kapcsolt selenatom az, a mely nátronlúggal való érintkezésre

¹ KONEK : L. a megelőző közleményt „Organikus selenidek és sulfidek”.

azonnal fekete színselen alakjában lehasad. Ezen érdekes összefüggés további megvilágítása végett kísérleteket végeztem olyan szerkezetű, más sze. ves selenvegyületekkel is, melyek tartalmazzanak ugyan molekulájukban két atom selen, csakhogy ezek szimmetrikus elhelyezésűek és a köztük való kapcsolódás csak egyszerű: $R-Se-Se-R$. Ilyen anyagok közül, a melyek a legnagyobb és legdrágább organikus ritkaságok közé tartoznak, az illető felfedezők szívesességéből (a melyért nekik e helyen is köszönetet mondok) egyelőre kettő állott rendelkezésemre; ú. m. 1. a LESSER R. által Berlin-Charlottenburgban előállított diphenyldiselenid-di-o-carbonsav¹



a melyből a szerző a FRIEDLÄNDER-féle thioindigonak megfelelő selenindigot készíti; és azután 2. a BAUER H. által Majna mellett Frankfurtban az EHRLICH-féle laboratóriumban előállított o-dinitrodiphenyldiselenid:²



Ha ezen selenidekből, a melyeknek szerkezete éppen keletkezésüknél fogva egészen biztos, 1—1 gramm súlyú pastillákat a calorimeter bombájában egészen azonos körülmények között elégetünk, a bomba belsejében, annak fenekén és oldalfalain csakis az égési víz páráját találjuk; ez a víz a benne feloldott selenes- illetve selensavtól savanyú kémhatású; míg a nehezen oldható, fehér, szilárd selenoxydnak, a melyről fentebb szóltam, nyoma sincsen. Ezen kísérleti eredmény tehát szintén támogatni látszik előbb hangoztatott feltevésemet, a mely szerint az általam feltalált, nehezen oldható, nátronlúgtól — selenkiválás közben — megfeketedő komplex selenoxyd keletkezésé-

¹ LESSER R.: Ber. d. deutsch. Chem. Ges. XLV.

² BAUER H.: Ber. d. deutsch. Chem. Ges. XLVI. 92.

hez szükséges, hogy az elégetett szerves selenid a $R-SeR$ komplexumot tartalmazza.

Befejezésül álljon itt végül rövid összefoglalása az eddig előállított és több-kevesebb biztonsággal ismert selenoxygén-vegyületeknek:

1. SeO , gáz?, létezése bizonytalan. BERZELIUS nyomán későbbi kutatók nem tudták előállítani. CHABRIE (Bull. soc. chim. (3) 2. (1889) 788) szerint nem gáz, hanem szilárd test. PEINCE szerint ezen vegyület nem létezik (Amer. J. sci. (Sill.) (4). 2. (1896) 163. Ztschr. anorg. Chem. 13. (1897) 121.) LEHNER szintén tagadja létezését (J. Am. Chem. Soc. 20 (1898) 555. C. Bl. 1898. 2. 657).

2. Se_2O_3 ; selensesquioxyd? CAMERON és MACALLAN (Proc. Roy Soc. 46. (1890) 13. Chem. N. 59. (1889) 267. Monit. scient. (4) 3. (1889) 1036; J. B. 1889/388). Létezése nem feltétlenül biztos.

3. SeO_2 ; selendioxyd. Berzelius. Thomsen, Ber. 2. (1869) 598. Hinsberg, Ann. 260 (1890) 40. Ber. 22. (1889) 862. és 2895. 23. (1890) 1393; 24 (1891) R. 5. A litteratúrában felsorolt, sokszor nagyon is ellentmondó tulajdonságainál és selen-tartalmánál fogva nem azonos az általam talált selenoxyddal.

4. SeO_3 ? Előállítása eddig nem sikerült. (Gerichten Ann. 168 (1873) 214. J. B. 1873/212. CAMMERON és MACALLAN Proc. Roy. Soc. 46. (1890) 32. Monit. Scient. (4) 3. 1889. Chem. N. 59268. J. B. 1889/391. METZNER Compt. rend. 123. (1896) 1061; C. Bl. 1897. 1220. Ann. chim. Phys. (7) 15. 228.)

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1913 június 16.-án tartott üléséből.)

A PICEINNEK, A PINUS PICEA GLUKOSIDJÁNAK SYNTHESISÉ ÉS ÚJ MESTERSÉGES GLUKOSIDEK.¹

MAUTHNER NÁNDOR-tól.

Több évvel ezelőtt TANRET CH.² a *Pinus picea* tűiből egy szépen kristályosodó glukosidet különített el, a melynek a picein nevet adta. TANRET, úgyszintén CHARON és ZAMANOS³ vizsgálatai kimutatták, hogy a picein hydrolysiskor paraoxyacetophenonra és glukosera bomlik. Rövid ideje,⁴ hogy ezen folyóiratban a glukoparaoxyacetophenon synthesisét paraoxyacetophenonból és β acetobromglukoseból közzétettem. Ezen glukosid további vizsgálata kimutatta, hogy összes tulajdonságaiban azonos a TANRET által elkülönített természetes piceinnel. A synthesis így a fentebbi kutatók által felállított szerkezeti képletet beigazolta. Synthesisem első phasisa hosszú időt igényel és így annak egyszerűsítésére törekedtem. Újabban sikerült is ezt teljesen elérnem és így az acetophenonnak β acetobromglukoseval való kondenzációja⁵ egynehány óra alatt eszközölhető. Ezen módosított synthesisem oly könnyen eszközölhető, hogy természetes kiindulási anyag híjján, a piceinneK kis mennyiségben való előállítására is igen alkalmas.

További vizsgálataim folyamán új ketonglukosidek synthe-

¹ A budapesti kir. m. tud. egyetem II. sz. chemiai intézetében készült dolgozat.

² Compt. rend. 119, 80; Bull. soc. chim. 3 série, Tome 19, 944 (1894).

³ Compt. rend. 133, 741.

⁴ Mathematikai és Természettudományi Értesítő, 31. köt. 89. lap; Journ. f. prakt. Chemie (2) 85, 564 (1912).

⁵ C. MANNICH: Ann. Chem. 394, 225.

sisével is foglalkoztam, mert ezen vegyületcsoportnak több képviselője fordul elő a természetben. E célból a paraoxybenzophenon glukosidjának synthesisét eszközöltem. Paraoxybenzophenont lúgos közegben β acetobromglukosevel kondenzálunk, miáltal a tetraacetylglukoparaoxybenzophenon létesül, a mely vegyületet baryumhydroxyddal elszappanosítva, a glukoparaoxybenzophenont nyerjük.

Ezen kísérletekkel kapcsolatban a glukosidsavaknak egy új képviselőjét is előállítottam. A glukosidsavak újabban nagyobb fontosságot nyertek FEIST¹ azon megfigyelése alapján, hogy a gubacsból ætherrel való hosszabb extrakció útján a glukogallussav nyerhető. A glukosidsavak csoportja az általam rövid ideje feltalált eljárás² segítségével synthesis útján is előállítható. Ezen eljárás abban áll, hogy valamely phenolcarbonsav esterjét β acetobromglukoseval kondenzáljuk és az így előálló tetraacetylglucosidsavestert híg baryumhydroxyddal elszappanosítjuk, miáltal a carboxylgyök egyidejű elszappanosítása által a szabad glukosidsavat nyerjük. Eddig ezen eljárást csak a paraoxyphenolcarbonsavaknál használtam, de érdekel bir a másik két ismerre is kiterjeszteni ezen reakciót, mert a természetben már észlelték ezeknek több képviselőjét. Ezen okból a glukometaoxybenzoësav synthesisét végeztem. Metaoxybenzoësavmethylesterből és β acetobromglukoseból kondenzáció útján a tetraacetylglukometaoxybenzoësavmethylestert nyertem. Híg baryumhydroxyddal ez utóbbi vegyületet elszappanosítva, a glukometaoxybenzoësav létesül.

Szándékom a jövőben ezen eljárást a glukosidsavak újabb képviselőinek synthesisére is alkalmazni.

¹ Chem. Ztg. 32, 918 (1908).

² Mathematikai és Természettudományi Értesítő, 29. k. 36. lap, ugyanott 970. lap; Journ. f. prakt. Ch. (2) 82, 271 (1910), ugyanott 83, 556 (1911).

Kísérleti rész.

A picein synthesise.

A p. oxyacetophenonnak β -acetobromglukoseval való kondenzációját előzőleg¹ akképpen eszközöltem, hogy az oxyketon lúgos oldalát az acetobromglukose ætheres oldatával összeráztam. Sokkal gyorsabban és egyszerűbben eszközölhetjük a reakciót a következő módon: 3 gr p. oxyacetophenont és 9 gr kristályos β -acetobromglukoset, 20 cm³ tiszta acetonban oldunk és vízzel való hűtés közben 0.9 gr natriumhydroxydból meg 10 cm³ vízből készített natronlúgot keverés közben hozzásepegtetünk, miközben ügyelünk arra, hogy a folyadék hőmérséklete 16 C° fölé ne emelkedjen. Az elzárt edényt fél óra hosszat állni hagyjuk és ekkor még 20 cm³ acetont adunk a keverékhez. Az aceton egész mennyiségét nem lehet egyszerre hozzáadni, mert ez esetben az oxyacetophenon natriumsója kiválik. Miután a reakcióelegyet 5 óra hosszat szobahőmérsékleten állni hagytuk, a fölös acetont vacuumban alacsony nyomás alatt közönséges hőmérsékleten ledestilláljuk. A frakcionáló lombikban egy olaj marad vissza, a mely vízzel elegyítve és az edény falainak üvegpálczával való dörzsölése közben mihamar kristályosodni kezd. A kristályokat ránczos szűrőn át leszűrjük és vízzel jól kimossuk. A kristályokat agyagtányéron szárítjuk és ezután meleg methylalkoholból kristályosítjuk át. Hozadék 1.5 gr. Olv. p. 172—173 C°.

0.1543 gr anyag adott: 0.3194 gr CO₂-t, 0.0791 gr H₂O-t.

C₂₂H₂₆O₁₁ képlet alapján a számított értékek: C = 56.65%, H = 5.57%.

Kísérletileg talált értékek: C = 56.44%, H = 5.69%.

A tetraacetylglukosid elszappanosítását egész akképen eszközöljük, mint azt előzőleg már ismertettem és ezért itt csak utalok ezen adataimra.² A nyers glucosidet kétszer meleg vízből átkristályosítjuk és ezután két héten át közönséges hőmér-

¹ Loc. cit.

² Loc. cit.

sékleten szárítjuk. Mint az alábbi analysis bizonyítja, a glukosid TANRET adataival egyezően egy molekula kristályvizet tartalmaz.

0.1482 gr anyag adott: 0.2902 gr CO_2 -t, 0.0819 gr H_2O -t.

$C_{14}H_{18}O_7 + H_2O$ képlet alapján a számított értékek: $C = 53.16\%$, $H = 6.32\%$.

A kísérletileg talált értékek: $C = 53.40\%$, $H = 6.13\%$.

Az optikai vizsgálathoz a glukosid vizes oldatát alkalmaztam. A lemért anyag súlya = 0.1724 gr. Az oldat súlya = 11.1514 gr és sűrűségét $d^{20} = 1.0044$ -nek találtam. Egy decziméter hosszúságú csőben az oldat D fényben $20^\circ C$ -on $\alpha = -1.38^\circ$ csavaróképességet mutatott. Ennélfogva:

$$[\alpha]_D^{20} = -88.87^\circ$$

A kristályvizet tartalmazó glukosid olvadáspontját $193-194^\circ C$ -nak észleltem. A mesterséges glukosid oldhatósági viszonyait már előzőleg ismertettem. Minthogy a synthesissel létesített termék összes tulajdonságai egyeznek a TANRET által a természetes piceinen észleltekkkel, ebből ezen két terméknek azonossága következik. A piceinnek szerkezete így ezen synthesis alapján *d*-glucosidoparaoxyacetophenon.

Tetraacetylglukoparaoxybenzophenon.

A fentebbi vegyület előállításához szükséges paraoxybenzophenont paramethoxybenzophenonból állítjuk elő bromhidrogénsav segítségével STÖRMER¹ czélszerű eljárása szerint.

A kondenzálást következőképen eszközöljük: 4 gr paraoxybenzophenont 1.5 gr natriumhydroxydból és 80 cm³ vízből készített oldatban feloldunk és 8 gr kristályos acetobromglukose ætheres (80 cm³) oldatával 16 óra hosszat a rázógépen össze-rázzuk. A reakció befejezte után a kondenzációs termék vagy kiválik, vagy pegig az oldat lehűtése által a reakciókeverékből leválasztható. A kristályokat leszűrjük, előbb hígított nátron-

¹ Ber. 41, 321 (1908).

lúggal, majd vízzel jól kimossuk. A további tisztítás céljából az acetylszármazékot meleg methylalkoholból átkristályosítjuk. Hozadék 0.25 gr. Az ætheres anyalúgnak nátronlúggal való többszöri átrázása után még kis mennyiségű kevésbé tiszta kondenzációs terméket nyerhetünk.

0.1223 gr anyag adott: 0.3742 gr CO_2 -t, 0.0596 gr H_2O -t.

$\text{C}_{27}\text{H}_{28}\text{O}_{11}$ képlet alapján a számított értékek: $\text{C} = 61.36\%$, $\text{H} = 5.30\%$.

A kísérletileg talált értékek: $\text{C} = 61.13\%$, $\text{H} = 5.41\%$.

A tetraacetylglukoparaoxybenzophenon színtelen tűkben kristályosodik, a melyek 167—168 $^\circ\text{C}$ -on olvadnak. Az acetylszármazék alkoholban könnyen oldódik. Aetherben a vegyület hidegen nehezen oldódik.

Glucoparaoxybenzophenon.

Az előbb ismertetett acetylszármazék elszappanosítását legcélszerűbben hígított baryumhydroxydoldattal eszközöljük és a glukosidet alkohollal való extrakció útján különítjük el.

1.8 gr egészen tiszta és finomra porított acetylszármazékot 200 cm^3 6%-os baryumhydroxydoldattal 20 óra hosszat a rázógépen összerázunk. A reakció bevégezte után a változatlan kiindulási anyagról (0.7 gr) leszűrünk és az oldatba a fölös baryumhydroxyd eltávolítására széndioxydet vezetünk. A baryumcarbonatot leszűrjük és vízzel jól kimossuk. A szűrletet vacuumban 12 mm nyomás alatt és 45 $^\circ\text{C}$ -on szárazra bepároljuk, a maradékot vacuumexsiccatorban kénsav felett kiszáritjuk és ezután porítjuk. A nyersterméket háromszor tömény meleg alkoholal kivonjuk. Az egyesített alkoholos kivonatokat vacuumban bepároljuk és a maradékot meleg eczetesterből kétszer átkristályosítjuk. Olv. p. 178—179 $^\circ\text{C}$. Hozadék a változatlan kiindulási anyag levonásával 76%.

0.1435 gr anyag adott: 0.3329 gr CO_2 -t, 0.0740 gr H_2O -t.

A $\text{C}_{19}\text{H}_{20}\text{O}_7$ képlet alapján a számított értékek: $\text{C} = 63.33\%$, $\text{H} = 5.55\%$.

Kísérletileg talált értékek: $\text{C} = 63.26\%$, $\text{H} = 5.73\%$.

Az optikai vizsgálatokhoz a glukosid alkoholos oldatát alkal-

maztam. A lemért anyag súlya = 0.0974 gr. Az oldat súlya = 8.8546 gr és sűrűségét 20 C°-on $d^{20} = 0.8099$ -nek találtam. Nátriumfényben ezen oldat egy decziméteres csőben 20 C°-on $\alpha = -0.50^\circ$ csavaróképességet mutatott. Ennélfogva:

$$[\alpha]_D^{20} = -55.58^\circ$$

A glukosid szintelen tűkben kristályosodik. Vizben és alkoholban a termék könnyen oldódik. Aetherben a vegyület majdnem oldhatatlan. Eczetesterben hidegen a glukosid nehezen oldódik, könnyen ellenben melegen.

Tetraacetylglucometaoxybenzoësavmethylester.

3.6 gr metaoxybenzoësavmetaylestert és 9 gr acetobromglukoset 20 cm³ tiszta acetonban oldunk. A folyadékot hűtés közben 0.9 gr nátriumhydroxydból és 10 cm³ vízből készített oldattal elegyítjük. Félórai állás után újból 20 cm³ acetont adunk a reakciókeverékhez és 5 óra hosszat állni hagyjuk. A fölös acetont ezután közönséges hőmérsékleten a vacuumban alacsony nyomás alatt ledestilláljuk, miközben egy sárga olaj marad vissza. Az olajat vízzel többször jól kimossuk és végül a vizet dekantálás útján eltávolítjuk. A terméket ezután kevés tömény methylalkoholban oldjuk és hevítés közben csontszén-nel szintelenítjük. A leszűrt oldathoz melegen cseppenként vizet adunk és előzőleg már híg methylalkoholból nyert kristályokat teszünk a meleg folyadékba, miközben a folyadék kihűlésekor a kristályosodás beáll. Hozadék 0.8 gr.

0.1551 gr anyag adott: 0.3129 gr CO₂-t, 0.0757 gr H₂O-t.

C₂₂H₂₆O₁₂ képlet alapján a számított értékek: C = 54.76%, H = 4.39%.

Kísérletileg talált értékek: C = 55.01%, H = 5.32%.

A tetraacetylglucometaoxybenzoësavmethylester híg methylalkoholból szintelen, 114—115 C°-on olvadó tűkben kristályosodik. Az acetylzármazék alkoholban és aetherben könnyen oldódik. Hideg vízben oldhatatlan.

Glucometaoxybenzoësav.

Az előbb ismertetett acetylszármazékot híg baryumhydroxyd-oldattal elszappanosítjuk és a fölös baryumhydroxydet szén-savval eltávolítjuk. A glucosidsavnak így előálló baryumsóját pedig híg kénsavval szétbontjuk.

3 gr finomra porított acetylszármazékot 12 gr baryumhydroxydból és 200 cm³ vízből készített oldattal 16 óra hosszat összerázunk. Ezután a még változatlan acetylszármazékot leszűrjük és a szűrletbe széndioxydet vezetünk. A kiváló baryumcarbonatot leszűrjük és vízzel jól kimossuk. A szűrletet hidegen híg kénsavval pontosan semlegesítjük. A baryumsulfatot az oldattól egy PUKALL-féle porcellánhenger segítségével távolítjuk el és a szűrletet vacuumban bepároljuk. A maradékot vízből kristályosítjuk át. Termelési hányad 70%. 0.1354 gr anyag adott: 0.2490 gr CO₂-t, 0.683 gr H₂O-t.

C₁₃H₁₆O₈ képlet alapján a számított értékek: C = 50.20%, H = 5.33%.

Kísérletileg talált értékek: C = 50.14%, H = 5.58%.

Az optikai analysishez a glukosid vizes oldatát használtam. A lemért anyag súlya = 0.1012 gr. Az oldat súlya = 11.0088 gr és sűrűségét 20 C°-on $d^{20}_D = 1.0019$ -nek találtam. Nátriumfényben ez az oldat egy decziméteres csőben 20 C°-on $\alpha = -0.63^\circ$ csavaróképeséget mutatott. Ennélfogva:

$$[\alpha]_D^{20} = -68.41^\circ$$

A glukometaoxybenzoësav szintelen tüket alkot, a melyek 143—144 C°-on olvadnak. Vizben és alkoholban a glukosid könnyen oldódik. Aetherben a vegyület oldhatatlan.

E vizsgálataimat különben folytatom.

DISPERSITASFOK ÉS KATALYTIKUS HATÁS.¹

RUSZNYÁK ISTVÁN-tól.

Bevezetés.

A heterogén rendszerekben lefolyó chemiai reakciók törvényszerűségeit NERNST és BRUNNER (1) állapította meg legelőször. Mivel a fémek kolloidos oldatait mikroheterogen rendszereknek tekinthetjük, közelfekvő a törekvés ezeket a törvényszerűségeket a fémhydrosolok okozta katalytikus reakciókra is alkalmazni. NERNST és BRUNNER szerint heterogen rendszerekben a reakciósebesség *ceteris paribus* arányos a felület nagyságával. A hydrogensuperoxyd elbomlása finoman elosztott platina jelenlétében régóta mintája mindenféle katalytikus reakciónak. BREDIG és TELEFOW (2) csakugyan azt találták, hogy ha platinizált platinalemezt használtak, a hydrogensuperoxyd elbomlásának sebessége a lemez felületével volt arányos. Azonban, a mint már BRUNNER is kiemeli, nem annyira a felület valódi nagysága lényeges, hanem csak a felület «quadratikus dimenziója». Szigorúan véve tehát a reakciósebesség nem a tényleges felülettel, hanem annak csak egy törtrészevel arányos. Valamely platinizált platina-lemez valódi felülete két komponens összegéből áll: az ú. n. «quadratikus dimenzióból» és a platinizálás által előidézett felület-nagyobbodásból.

Simára csiszolt platinalameznek alig van katalytikus hatása. Apró érdességek a felületen vagy még inkább platina-korommal való bevonás a platinalemez katalytikus hatását rendkívül megnövelik. A platinizálás további növelése, mint azt

¹ A m. kir. állatorvosi főiskola vegytani intézetében készült dolgozat.

BREDIG és TELETOW vizsgálataiból tudjuk, már alig növeli a reakciósebességet, úgy hogy a reakciósebesség a felületnek éppen azzal a komponensével nem áll arányban, melyet a finoman elosztott platinarészecskék képviselnek. Ennek a körülménynek csak az lehet a magyarázata, hogy ilyen kis fémrészecskék-nél más, még eddig ismeretlen faktorok is szerepelnek, melyek a felület hatását csökkentik.

A platinizált platinalemezt úgy tekinthetjük, mint platinalemezre fixált finom fémsuspensiót. A valódi suspensióknál és a kolloidos fémoldatoknál ez a fixáló felület hiányzik és az egész fémfelületet kizárólag az apró fémrészecskék felületei alkotják; az előbb mondottak után könnyen érthető, hogy a NERNST-BRUNNER-féle egyenletet nem lehetett a kolloidfémek által okozott katalysisra is változtatás nélkül alkalmazni. Már az első számítások, melyeket HENRI eszközölt és BREDIG és TELETOW kijavított, valószínűtlen értékeket szolgáltatottak; a később SAND (3) által kiszámított konstansok közül pedig a legkisebb is 16-szor akkora, mint a kísérletileg meghatározott értékek. [L. még SENTER (4), WAENTIG és STECKE (5).] Igaz, hogy a kolloidfémekkel való katalyzisnál a reakciót még egész sor mellékkörülmény is komplikálja (BROWN-féle mozgás, adsorptio, konvekciós áramok etc.), az előbbi megfontolások után azonban az eddigi számításoknak még a kiindulási pontjában is kételkednünk kell, hogy t. i. a NERNST-BRUNNER-féle egyenlet mikroheterogen rendszereknél is változatlanul fennállana. A fentebb mondottak szerint valószínűtlen ugyanis, hogy ultramikroszkopos fémrészecskéknél a reakciósebesség arányos volna a felülettel.

Újabbán lehetségessé vált különböző dispersitású, de azonos koncentrációjú fémhydrosolok előállítása és dispersitásfokuk megközelítő meghatározása is, úgy, hogy feladatul tűzhettem magamnak ilyen solok hydrogensuperoxydot bontó hatását összehasonlítani, hogy ily módon a dispersitásfok és katalytikus hatás közti összefüggésbe betekintést nyerhessünk.

Kísérleti rész.

1. A solkészítés.

Vizsgálataimat aransolokon végeztem, melyek jelen esetben már azért is alkalmasnak bizonyultak, mert dispersitásfokbeli különbségeik már a solok színében is nagyrészt kifejezésre jut. A solokat GUTBIER (6) előírása szerint állítottam elő, a mely abból áll, hogy híg aurichlorid-oldatot gyengén alkalikus közegben hydroxylammonium-hydrochloriddal redukálunk. VÁRADI (7) megfigyelte, hogy ilyenkor az elegy hőmérséklete szerint különböző színű, ill. különböző dispersitású solok keletkeznek, még pedig alacsony hőfokon nagy részecskékből álló kékszínű solok, magasabb hőfokon lila, ill. piros solok, melyek kis részecskékből állanak. Ily módon 20° és 90° C. között dolgozva, egész sorozat solt állíthatunk elő, melyek egymástól csak színben és dispersitásfokban különböznek, míg koncentrációjuk egyforma. Az összes oldatokat természetesen kétszer destillált és ezüstcsöves hűtőben kondenzált vízzel készítettem és jénai üvegből készült edényekben tartottam el.

VÁRADI előírása szerint a solokat következő módon állítottam elő. Az I—VII. és a IX. kísérleti sorozatban egy 200 cm^3 -es ERLÉNMEYER-féle lombikba $46\cdot30\text{ cm}^3$ kétszer destillált vizet, $1\cdot00\text{ cm}^3$ $1^{\circ}/_{\infty}$ aranyoldatot (Goldchlorid Merck) és $2\cdot00\text{ cm}^3$ $0\cdot015\text{ n}$ *NaOH*-oldatot (natriumhydroxyd e natrio Kahlbaum) bocsátottam. Az elegyet vízfürdőn a kívánt hőfokra hevítettem és azután $0\cdot70\text{ cm}^3$ $1^{\circ}/_{\infty}$ hydroxylaminhydrochloridoldatot (KAHLBAUM) pipettáztam hozzá. A VIII., X. és XI. sorozatban $0\cdot80$, $1\cdot25$ és $1\cdot50\text{ cm}^3$ aranyoldatot használtam, a *NaOH* és a hydroxylamin mennyiségét is megfelelően változtatva.

A koncentráltabb oldatoknál könnyen megesik, hogy zavaros, erősen fluoreskáló solok keletkeznek, melyek ultramikroszkop alatt igen különböző nagyságú részecskékből állónak bizonyulnak. Az ilyen solok összehasonlító vizsgálatokra alkalmatlanok részint azért, mert dispersitásfokuk meghatározása bizonytalan, részint mert a reakció alatt könnyen kicsapódnak, a mit arról lehet észrevenni, hogy a reakcióelegy elszíntelenedik; ilyenkor természetesen a reakció nagyon meglassul.

2. *A hydrogensuperoxydoldat.*

A kereskedésbeli hydrogensuperoxyd (peroxygenol RICHTER) tisztításakor BREDIG és BERNECK (8) utasítását követtem. Ez abból áll, hogy H_2O_2 -t baryumhydroxiddal kicsapunk, a keletkezett baryumsuperoxydhydratot kénsavval elbontjuk és a keletkező H_2O_2 -t alacsony nyomáson átdestilláljuk. Az ilyen oldat jénai üvegben eltartva, mint azt BREDIG is említi, igen állandó. A szükséges hígításokat egytől-egyig a már említett kétszer destillált vízzel eszközöltem.

3. *A részecskék nagyságának meghatározása.*

A részecskék nagyságának meghatározására az eredetileg SIEDENTOPF és ZSIGMONDY (9) által kidolgozott eljárást használtam, a mely abból áll, hogy ultramikroszkop segélyével meghatározzuk egy ismert dimensiójú solhasámban látható submikronok átlagos számát. (Az ultramikroszkop szerkezetét és a vele való bánásmódot illetőleg utalok SIEDENTOPF és ZSIGMONDY értekezésén kívül, VÁRADI már említett dolgozatára).

Ha a részecskéket gömbalakúnak tekintjük, akkor

$$P = \sqrt[3]{\frac{3Mv}{4\pi as}},$$

a hol P a részecskék sugarát, M az arany tömegét 1 mm³-ben, v az elhatárolt solhasáb térfogatát, a a hígítás fokát, n a v térfogatban levő submikronok számát és s az arany fajsúlyát jelenti.

Az általam használt berendezésnél a megvilágított solhasáb mélysége 0.02166 mm volt, az okulárdiaphragma által elhatárolt négyzet oldala 0.045 mm. v , tehát az elhatárolt solhasáb köbtartalma $0.045 \times 0.045 \times 0.02166 = 0.000043861$ mm³. A használt hígítások 40 és 140 között ingadoztak, aszerint, hogy a részecskék száma előreláthatólag mekkora volt. A részecskék számának meghatározására (n) 100—100 számlálásból két középértéket számítottam ki; ennek a két értéknek megfelelő P érték között, mint a kísérleti adatokból látható, legfeljebb 2μ kü-

lönbség van. A legkisebb részecskékből álló solnál P 28 $\mu\mu$ volt, a legnagyobb részecskékből állónál 45 $\mu\mu$.

ZSIGMONDY (10) ajánlatára még azt is megvizsgáltam, hogy van-e a solokban még arany-ion vagy suspendált aranyoxydul; sem az egyiket, sem a másikat nem sikerült kimutatni, úgy, hogy legfeljebb csak nyomokban lehetnek jelen és a számítást nem befolyásolhatják.

4. A reakciósebesség meghatározása.

A hydrogensuperoxyd elbomlásának kinetikáját különösen BREDIG és munkatársai (11) tanulmányozták behatóbban. A mint ismeretes, azt találták, hogy neutrális vagy gyengén savanyú közegben a platinakatalysis monomolekuláris reakciónak felel meg, nagyobb OH' koncentrációnál azonban zavaró hatások jelentkeznek, melyeket BREDIG a H_2O_2 megváltozásának tulajdonít. Az aranyhydrosolok által okozott H_2O_2 -bomlás, a mint BREDIG és REINDERS észlelte, neutrális és savanyú közegben igen lassan megy végbe, lúg jelenléte a reakciót gyorsítja, mely hatásnak egy bizonyos OH' koncentrációnál maximum a van. Aranysolokkal dolgozva kényszerítve voltam a reakciósebességet lúgos közegben mérni és ily módon előre le kellett mondanom arról, hogy a reakció pontosan az ismert monomolekuláris egyenletet

$$0.4343k = \frac{1}{t} \log_{10} \frac{c_0}{c_t}$$

kövesse.

A reakciósebesség mérését a következő módon eszközöltem: 25—25 cm^3 H_2O_2 oldathoz 2.0 cm^3 $\frac{n}{1}$ $NaOH$ oldatot és 20 cm^3 aranyolt adtam (az összes oldatok 25° C.-ra voltak előmelegítve), gyorsan összekevertem, azután az edényeket 25.0° C.-ra beállított thermostatba helyeztem. 10 percenként minden edényből gyorsan folyó pipetták segélyével 5—5 cm^3 -t vettem ki, körülbelül 20 cm^3 híg kénsavba (1 : 5) bocsátottam és 0.01 n kaliumpermanganát-oldattal a még elbontatlan H_2O_2 -t meghatároztam. A kísérleti adatoknál a H_2O_2 conc. az elhasznált permanganát-oldat köbcentimétereit jelenti.

5. Kísérleti eredmények.

Az alábbi kísérleti sorozatokban (I—VII) az arany koncentrációja mindenütt 0·000028 grammatom literenként.

I. sorozat.

25·0° C.

1. sol kék, $P = 38 - 38 \mu\mu$ 2. sol lila, $P = 31 - 32 \mu\mu$

| 1. sol | | | 2. sol | | |
|-------------------------|----------------|----------|----------------|----------|--|
| Idő | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | |
| 0 | 8·2 | — | 8·7 | — | |
| 10 | 5·0 | 0·0214 | 6·2 | 0·0147 | |
| 20 | 2·8 | 0·0233 | 4·0 | 0·0168 | |
| 30 | 1·6 | 0·0236 | 2·5 | 0·0180 | |
| 40 | 1·1 | 0·0218 | 1·6 | 0·0183 | |
| 50% elhom- lás ideje | 13·3' | . | 17·8' | | |

II. sorozat.

25·0° C.

1. sol kék, $P = 39 - 39 \mu\mu$ 2. sol lila, $P = 34 - 35 \mu\mu$ 3. sol. vöröseslila, $P = 31 - 32 \mu\mu$

| 1. sol | | | 2. sol | | | 3. sol | |
|-------------------------|----------------|----------|----------------|----------|----------------|----------|--|
| Idő | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | |
| 0 | 13·0 | — | 14·4 | — | 15·7 | — | |
| 10 | 7·75 | 0·0224 | 9·8 | 0·0167 | 13·1 | 0·0078 | |
| 20 | 4·9 | 0·0218 | 7·0 | 0·0156 | 11·2 | 0·0073 | |
| 30 | 3·2 | 0·0204 | 5·1 | 0·0150 | 9·6 | 0·0071 | |
| 40 | 2·3 | 0·0188 | 3·8 | 0·0144 | 8·4 | 0·0067 | |
| 50% elhom- lás ideje | 14·6' | | 19·2' | | 42·3' | | |

III. sorozat.

25·0° C.

1. sol kék, $P = 37 \mu\mu$ 2. sol lila, $P = 29 \mu\mu$ 3. sol. piros, $P = 28 \mu\mu$

| Idő | 1. sol | | 2. sol | | 3. sol | | sol nélkül | |
|-------------------------|-------------------|----------|-------------------|----------|-------------------|----------|-------------------|----------|
| | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k |
| 0 | 6·6 | — | 4·05 | — | 8·1 | — | 14·4 | — |
| 10 | 3·1 | 0·0328 | 2·1 | 0·0285 | 6·3 | 0·0109 | — | — |
| 20 | 1·4 | 0·0336 | 1·2 | 0·0264 | 4·7 | 0·0118 | — | — |
| 30 | 0·7 | 0·0324 | 0·6 | 0·0276 | 3·1 | 0·0139 | 14·1 | 0·0003 |
| 60 | — | — | — | — | — | — | 13·9 | 0·00025 |
| 50% elhom- lás ideje | 9·1' | | 10·9' | | 24·6' | | 1114·1' | |

IV. sorozat.

25·0° C.

1. sol kék, $P = 38 - 39 \mu\mu$ 2. sol lila, $P = 35 - 36 \mu\mu$ 3. sol pirosas, $P = 31 - 31 \mu\mu$

| Idő | 1. sol | | 2. sol | | 3. sol | |
|-------------------------|-------------------|----------|-------------------|----------|-------------------|----------|
| | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k |
| 0 | 13·2 | — | 14·7 | — | 15·2 | — |
| 10 | 7·9 | 0·0222 | 10·3 | 0·0154 | 11·7 | 0·0113 |
| 20 | 4·9 | 0·0215 | 7·4 | 0·0149 | 9·0 | 0·0113 |
| 30 | 3·3 | 0·0200 | 5·4 | 0·0144 | 7·2 | 0·0108 |
| 40 | 2·4 | 0·0185 | 3·9 | 0·0144 | 5·6 | 0·0108 |
| 50% elhom- lás ideje | 14·6' | | 20·4' | | 27·2' | |

V. sorozat.

25·0° C.

1. sol kék, $P = 38 - 39 \mu\mu$ 2. sol lila, $P = 34 - 35 \mu\mu$ 3. sol piros $P = 28 - 28 \mu\mu$

| | 1. sol | | 2. sol | | 3. sol | |
|-------------------------|----------------|----------|----------------|----------|----------------|----------|
| Idő | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k |
| 0 | 13·8 | — | 14·6 | — | 14·9 | — |
| 10 | 9·3 | 0·0171 | 10·5 | 0·0143 | 10·9 | 0·0135 |
| 20 | 6·7 | 0·0156 | 7·8 | 0·0134 | 8·2 | 0·0129 |
| 30 | 4·9 | 0·0149 | 5·9 | 0·0131 | 6·4 | 0·0122 |
| 40 | 3·8 | 0·0140 | 4·6 | 0·0125 | 4·8 | 0·0122 |
| 50% elhom- lás ideje | 19·5' | | 22·6' | | 23·7' | |

VI. sorozat.

25·0° C.

1. sol lila, $P = 35 - 36 \mu\mu$ 2. sol kékeslila, $P = 31 - 32 \mu\mu$ 3. sol pirosaskék $P = 29 - 31 \mu\mu$

| | 1. sol | | 2. sol | | 3. sol | |
|-------------------------|----------------|----------|----------------|----------|----------------|----------|
| Idő | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k |
| 0 | 14·8 | — | 14·6 | — | 14·3 | — |
| 10 | 10·8 | 0·0136 | 11·7 | 0·0096 | 11·9 | 0·0079 |
| 20 | 8·2 | 0·0128 | 9·5 | 0·0093 | 9·5 | 0·0088 |
| 30 | 6·4 | 0·0121 | 7·9 | 0·0088 | 7·8 | 0·0087 |
| 40 | 4·8 | 0·0122 | 6·65 | 0·0085 | 6·3 | 0·0089 |
| 50% elhom- lás ideje | 23·8' | | 33·6' | | 35·4' | |

VII. sorozat.

25·0° C.

1. sol kék, $P = 42 - 42 \mu\mu$ 2. sol pirosaskék, $P = 31 - 32 \mu\mu$ 3. sol kékespiros, $P = 30 - 31 \mu\mu$ (kissé zavaros)

| | 1. sol | | 2. sol | | 3. sol | |
|-------------------------|----------------|----------|----------------|----------|----------------|----------|
| Idő | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k |
| 0 | 16·9 | — | 22·5 | — | 24·3 | — |
| 10 | 9·1 | 0·0268 | 14·5 | 0·0190 | 21·2 | 0·0059 |
| 20 | 6·0 | 0·0224 | 9·8 | 0·0180 | 19·7 | 0·0045 |
| 30 | 4·3 | 0·0198 | 7·3 | 0·0162 | 18·2 | 0·0041 |
| 40 | 3·3 | 0·0177 | 5·4 | 0·0154 | 16·7 | 0·0040 |
| 50 | 2·7 | 0·0159 | 4·3 | 0·0143 | 15·5 | 0·0039 |
| 50% elhom- lás ideje | 14·6' | | 18·2' | | 68·4' | |

A konstansok, mint az előrelátható volt, ingadozásokat tüntetnek fel, különösen, ha a bomlás erőlyesen ment végbe. BREIDIG szerint ennek oka a hydrogensuperoxyd sóképzése; FREUNDLICH szerint az alkali a solra hat; valószínűleg az is szerepet játszik, hogy a reakció elején az oldatban levő számos gáz-buborék miatt tulajdonképen kevesebb folyadékot pipettázunk ki, mint később; azonban bármi okozza is a konstansok egyenlőtlenségét, ez a kísérleti eredményeket nem zavarja.

Az eddigi kísérleti sorozatokban az arany koncentrációja mindenütt 0·000028 grammatom volt literenként; ezután megvizsgáltam, hogy a solok eddig észlelt viselkedése (t. i., hogy a kék solok erősebben katalyzálnak, mint a pirosak) más arany-concentrációnál is kimutatható-e.

VIII. sorozat.

25·0° C.

Literenként 0·000022 grammatom Au.

1. sol kék, $P = 42-42 \mu\mu$

2. sol lila, $P = 31-32 \mu\mu$

3. sol piros, $P = 29-29 \mu\mu$

| | 1. sol | | 2. sol | | 3. sol | |
|-------------------------|----------------|----------|----------------|----------|----------------|----------|
| Idő | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k |
| 0 | 12·5 | — | 21·9 | — | 22·6 | — |
| 10 | 7·0 | 0·0251 | 16·5 | 0·0122 | 17·4 | 0·0113 |
| 20 | 4·5 | 0·0221 | 13·2 | 0·0109 | 14·3 | 0·0099 |
| 30 | 2·9 | 0·0211 | 10·9 | 0·0101 | 12·0 | 0·0091 |
| 40 | 2·0 | 0·0198 | 9·0 | 0·0096 | 10·0 | 0·0088 |
| 50 | 1·5 | 0·0184 | 7·7 | 0·0090 | 8·6 | 0·0083 |
| 50% elbom- lás ideje | 13·9' | | 29·2' | | 32·0' | |

IX. sorozat.

25·0° C.

Literenként 0·000028 grammatom Au.

1. sol kék, $P = 41-43 \mu\mu$

2. sol lila, $P = 30-32 \mu\mu$

3. sol piros, $P = 29-29 \mu\mu$

| | 1. sol | | 2. sol | | 3. sol | |
|-------------------------|----------------|----------|----------------|----------|----------------|----------|
| Idő | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k |
| 0 | 16·2 | — | 23·1 | — | 24·6 | — |
| 10 | 8·4 | 0·0285 | 18·0 | 0·0108 | 22·0 | 0·0048 |
| 20 | 5·3 | 0·0242 | 14·7 | 0·0098 | 20·3 | 0·0041 |
| 30 | 3·7 | 0·0213 | 11·2 | 0·0104 | — | — |
| 40 | 2·8 | 0·0190 | 10·5 | 0·0085 | 17·9 | 0·0034 |
| 50 | 2·3 | 0·0169 | 9·2 | 0·0079 | 16·2 | 0·0036 |
| 50% elhom- lás ideje | 13·7' | | 31·6 | | 77·1' | |

X. sorozat.

25·0° C.

Literenként 0·000035 grammatom Au.

1. sol kék, $P = 45-45 \mu\mu$ 2. sol pirosaslila, $P = 31-33 \mu\mu$

| | 1. sol | | 2. sol | |
|-------------------------|----------------|----------|----------------|----------|
| Idő | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k |
| 0 | 10·8 | — | 21·4 | — |
| 10 | 3·4 | 0·0501 | 11·9 | 0·0254 |
| 20 | 1·5 | 0·0428 | 6·8 | 0·0248 |
| 30 | 0·9 | 0·0355 | 4·5 | 0·0225 |
| 50% elhom- lás ideje | 7·0' | | 11·4 | |

XI. sorozat.

25·0° C.

Literenként 0·000042 grammatom Au.

1. sol kék, $P = 41-42 \mu\mu$ 2. sol lila, $P = 35-36 \mu\mu$ (kissé zavaros)3. sol piros, $P = 32-34 \mu\mu$

| | 1. sol | | 2. sol | | 3. sol | |
|-------------------------|----------------|----------|----------------|----------|----------------|----------|
| Idő | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k | H_2O_2 conc. | 0·4343 k |
| 0 | 7·7 | — | 20·2 | — | 20·8 | — |
| 10 | 1·6 | 0·0682 | 12·0 | 0·0226 | 12·4 | 0·0224 |
| 20 | 0·65 | 0·0526 | 7·8 | 0·0206 | 8·3 | 0·0199 |
| 30 | — | | 5·4 | 0·0190 | 6·0 | 0·0179 |
| 50% elhom- lás ideje | 4·9' | | 14·5' | | 15·0' | |

Összefoglalás.

Kísérleteimből kiderül, hogy aranyhydrosoloknál a kisebb dispersitású soloknak erősebb a katalytikus hatása, mint a nagyobb dispersitásúakénak. Dispersitásfok és katalytikus hatás között azonban egyelőre még nem állapíthatunk meg állandó összefüggést, hiszen a részecskék nagyságának a meghatározása a mostani módszerekkel csak megközelítő értékeket szolgáltat. (Lásd HENRI 13.)

Soljaim vegyi összetétele minden sorozatban azonos volt, úgy, hogy a hydroxylamin, a mely erős katalysatorméreg, mindenütt egyenlő concentrációban volt jelen; a hydroxylamin különben is a reductionál nagyrészt elhasználódik. A solok hatásában észlelt különbségeket tehát nem lehet vegyi összetételben való különbségekre visszavezetni. Ezek a különbségek annál feltűnőbbek, mert a kisebb részecskékből álló soloknál nemcsak a felület növekedése, hanem a BROWN-féle molekuláris mozgás élénkülése miatt is inkább fokozott katalytikus hatást várhatnánk. A solok ellentétes viselkedését csak úgy magyarázhatjuk meg, ha figyelembe vesszük a bevezetésben mondottakat, melyek szerint ultramikroszkopos dimensiójú részecskéknél a felület hatásával ellentétes egyéb tényezők hatása is érvényesül. Ha ez a hatás a részecskék egy bizonyos nagyságánál nagyobbá válik, mint a felület hatása, akkor az általam észlelt eset áll be, hogy t. i. növekvő dispersitásfok mellett csökken a katalytikus hatás. A katalytikus hatás szempontjából tehát korántsem mindegy, hogy ugyanaz a felület milyen nagy részecskék által van alkotva. A dispersitásfok és katalytikus hatás közti összefüggés valószínűleg oly görbével ábrázolható, melynek valamely dispersitásfoknál maximuma van.

További kísérletek fogják megmutatni, hogy másféle soloknál hasonló viszonyok észlelhetők-e. Oly aransoloknál, melyeket VANINO (14) előírása szerint alkohollal készítettem, szintén kimutatható volt, hogy egyenlő concentratio mellett a kis-dispersitású kékszínű solok erősebb katalytikus hatásúak voltak, mint a nagydispersitású piros solok.

Kellemes kötelességnek teszek eleget, midőn hálás köszönetemet fejezem ki dr. BUGARSZKY ISTVÁN tanár úrnak nagybecsű tanácsaiért és azért az érdeklődésért, melyet munkám iránt tanúsított.

Irodalom.

1. NERNST és BRUNNER: Zeitschr. f. physikal. Chemie 1904. 47. 52. —
2. BREDIG és TELETOW: Zeitschr. f. Elektrochemie 1906. 12. 581. — 3. SAND: Zeitschr. f. physikal. Chemie 1905. 51. 641. — 4. SENTER: Zeitschr. f. physikal. Chemie 1905. 52. 737. — 5. WAENTIG és STECHE: Zeitschr. f. physiol. Chemie 1912. 79. 446. — 6. GUTHIER l. SVEDBERG: Die Methoden zur Herstellung kolloider Lösungen anorganischer Stoffe. Dresden 1909. — 7. VÁRADI: Math. és Természettud. Értesítő 1912. — 8. BREDIG és von BERNECK: Zeitschr. f. physikal. Chemie 1899. 31. 258. — 9. SIEDENTOPF és ZSIGMONDY: Drudes Ann. 1903. X. 1. — 10. ZSIGMONDY: Kolloidchemie. Leipzig. 1912. — 11. BREDIG és von BERNECK: l. 8., BREDIG és IKEDA: Zeitschr. f. physikal. Chemie 1901. 37. 1., BREDIG és REINDERS: u. o. 323. old., BREDIG: Anorganische Fermente. Leipzig, 1901. — 12. FREUNDLICH: Kapillarchemie. Leipzig, 1909. — 13. HENRI: Kolloid-Zeitschr. 1913. 12. 246. — 14. VANINO l. SVEDBERG.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1913 október 20.-án tartott üléséből.)

EGY ORTHOGONÁLIS FÜGGVÉNYRENDSZERRŐL.

HAAR ALFRÉD-től.

Doktori értekezésem¹ III. fejezetében egy olyan orthogonális függvényrendszert ismertettem, melynek az orthogonális függvényrendszerek körében kiváltságos szerep jutott. Ez a függvényrendszer az egyetlen az eddig ismertek között, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy e függvények szerint minden folytonos függvény a FOURIER-féle módon konvergens sorba fejthető; általában minden LEBESGUE-féle értelemben integrális függvény e függvényt sorozat tagjai szerint haladó FOURIER-féle sora egy zérus-méretű pontthalmaz kivételével összetartó. A dissertáciomban közölt tételek kimerítő felvilágosítást adnak ez orthogonális függvényrendszer szerint haladó sorok konvergenciájáról illetve divergenciájáról, de elintézetlenül hagyják az úgynevezett *egyértelműségi problémát*, azaz azt a kérdést, hogy egy, a szóbanforgó orthogonális függvények szerint haladó sor eltűnhetik-e a független változó minden értékénél, anélkül, hogy e sor valamennyi együtthatója zérus volna.

Ezek az egyértelműségi problémák az orthogonális függvényrendszerek általános elméletében a legnehezebb kérdésekhez tartoznak. A trigonometrikus sorokra vonatkozólag tudvalevőleg ezzel a kérdéssel, RIEMANN és SCHWARZ idevágó kutatásai alapján, CANTOR foglalkozott először, míg a STURM-LIOUVILLE-féle sorokra vonatkozólag a megfelelő tételek habilitációs-cikkemben tartalmaztatnak.²

¹ Mathematische Annalen 1910.

² Mathematische Annalen 1911.

Célom a következőkben orthogonális függvényrendszerre az egyértelműségi theoremat bebizonyítani; a közlendő bebizonyítás teljesen új módot nyújt az efféle kérdések tárgyalására, melynek alkalmazására egyéb orthogonális függvényrendszerekre remélem legközelebb visszatérhetek.

1. A szóbanforgó függvényrendszer definíciója a következő:¹

Legyen

$$\chi_0(x) = 1, \quad \text{ha } 0 \leq x \leq 1;$$

és

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= 1, \quad \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ &= -1, \quad \text{ha } \frac{1}{2} < x \leq 1; \end{aligned}$$

legyen továbbá

$$\begin{aligned} \chi_2^{(1)}(x) &= \sqrt{2}, \quad \text{és} \quad \chi_2^{(2)}(x) = 0, \quad \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ &= -\sqrt{2}, \quad \quad \quad = 0, \quad \text{a } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ &= 0, \quad \quad \quad = \sqrt{2}, \quad \text{a } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \\ &= 0, \quad \quad \quad = -\sqrt{2}, \quad \text{a } \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{aligned}$$

Általában függvényrendszerünk egyes függvényeit a következőképen értelmezzük: a $[0, 1]$ intervallumot 2^n egyenlő részre osztjuk és az így nyert részintervallumokat rendre $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, i_n^{(3)}, \dots, i_n^{(2^n)}$ -nel jelöljük. Legyen már most

$$\chi_n^{(k)}(x) = 0, \quad \text{az } i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \dots, i_n^{(2k-2)}$$

intervallumok belsejében,

$$\chi_n^{(k)}(x) = \sqrt{2^{n-1}}, \quad \text{az } i_n^{(2k-1)}$$

intervallum belsejében,

$$\chi_n^{(k)}(x) = -\sqrt{2^{n-1}}, \quad \text{az } i_n^{(2k)}$$

intervallum belsejében és végül

$$\chi_n^{(k)}(x) = 0$$

a többi részintervallumok belsejében; k felveheti az $1, 2, \dots, 2^{n-1}$ értékeket.

¹ Orthogonális függvényeimmel foglalkoztak, illetőleg azokat alkalmazták egyéb problémákra: FABER, WEYL, PLANCHEREL stb.

A 0 illetve 1 helyeken a $\chi_n^{(k)}(x)$ függvénynek azt az értéket tulajdonítjuk, a melyet ez a függvény a $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$, illetve az $\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right]$ intervallumokban felvesz. Az illeténmódon értelmezett $\chi_n^{(k)}(x)$ függvénynek a $\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}$ helyeken véges szakadása van; minden más helyen azonban e függvény folytonos. Megállapodunk végre abban, hogy ezen a szakadási helyeken $\chi_n^{(k)}(x)$ értéke e helyeken vett jobboldali és baloldali határértékeinek számtani közepével egyezzek meg. Az így definiált végtelen sok függvényről, melyeket mindig a következő módon sorolunk fel

$$\chi_0(x); \chi_1(x); \chi_2^{(1)}(x), \chi_2^{(2)}(x); \dots; \chi_n^{(1)}(x), \chi_n^{(2)}(x), \dots, \chi_n^{(2^{n-1})}(x); \dots$$

könnyen kimutatható, hogy egy teljes orthogonális függvényrendszert alkotnak. Ha a konstans együtthatókkal képezett

$$\begin{aligned} & a_0 \chi_0(x) + a_1 \chi_1(x) + a_2^{(1)} \chi_2^{(1)}(x) + a_2^{(2)} \chi_2^{(2)}(x) + \dots + \\ & + a_n^{(1)} \chi_n^{(1)}(x) + a_n^{(2)} \chi_n^{(2)}(x) + \dots + a_n^{(2^{n-1})} \chi_n^{(2^{n-1})}(x) + \dots \\ & = a_0 \chi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x) \end{aligned}$$

végtelen sort az $a_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x)$ tag után megszakítjuk, az így nyert véges összeget

$$S_n^{(k)}(x)$$

-szel jelöljük. Állításunk ekkor a következőképen hangzik:

Ha az

$$a_0 \chi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x) \quad (I)$$

végtelen sor a független változónak minden tekintetbe jövvő, azaz a

$$0 \leq x \leq 1$$

egyenlőtlenséget kielégítő értékénél zérus felé tart, akkor e sor valamennyi együtthatója eltűnik, azaz

$$a_0 = 0, \quad a_n^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}; \quad n = 1, 2, \dots).$$

2. Követendő bizonyításunk *gondolatmenete* a következőképen vázolható: *Feltételezzük, hogy az*

$$a_0 z_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^{(k)} z_n^{(k)}(x) \quad (\text{I})$$

végtelen sornak nem minden együtthatója zérus és kimutatjuk, hogy ez esetben, létezik egy olyan x_0 hely, melyen e sor vagy divergens, vagy pedig egy zérustól különböző érték felé tart.

A bizonyítás lényege e *kritikus x_0 hely konstrukciójából áll.*

Legyen e végből a fent jelzett elrendezésben

$$a_{n_1}^{(k_1)}$$

az (I) sor *első el nem tűnő együtthatója*; más szóval tegyük fel, hogy

$$a_n^{(k)} = 0,$$

ha

$$n < n_1$$

és

$$a_{n_1}^{(k)} = 0,$$

ha

$$k < k_1,$$

de

$$a_{n_1}^{(k_1)} \geq 0.$$

Az általánosság ellen nem vétünk, ha ezt az együtthatót mindjárt pozitívnak tételezzük fel, mert ellenkező esetben sorunkat -1 -el megszorozva egy olyan sorra jutnánk, mely ezt a feltételt is teljesíti. Áttérve már most az (I) sor részösszegeire, az együtthatók eltűnéséből nyomban következik, hogy

$$S_n^{(k)}(x) \equiv 0,$$

ha

$$n < n_1$$

és

$$S_{n_1}^{(k)}(x) \equiv 0,$$

ha

$$k < k_1,$$

de

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) \equiv a_{n_1}^{(k_1)} z_{n_1}^{(k_1)}(x) \neq 0.$$

Minthogy pedig a $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ függvény az $i_{n_1}^{(2k_1-1)}$ intervallum belsejében lényegesen pozitív (>0) azért ezen intervallum belsejében egyszersmind:

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0.$$

Az $i_{n_1}^{(2k_1-1)}$ intervallum egyik végén — és pedig a 0-hoz közelebb eső végén — a $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ függvény — definíciónk értelmében — ugyancsak lényegesen pozitív, míg ezen intervallum másik végén ezen függvény értéke zérus. Ennélfogva a szóbanforgó intervallum első végén

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0,$$

másik végén ellenben

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) = 0.$$

Jelöljük a következőkben ezt az $i_{n_1}^{(2k_1-1)}$ intervallumot egyszerűség kedvéért I_1 -el.

3. Legvünk ezentúl az x független változónak kizárólag csak azokra az értékeire tekintettel, a melyek ezen I_1 intervallum belsejében vagy annak határán fekszenek. Ha végtelen sorunkat csak ezeken a helyeken vizsgáljuk, akkor abstrahálhatunk azoktól a tagoktól, melyek ebben az intervallumban identikusan eltűnnek. Ha az illetén módon megmaradt valamennyi tag együtthatója — az $a_{n_1}^{(k_1)}\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ tag kivételével — zérus volna, akkor végtelen sorunk értéke az I_1 intervallum minden belső pontjában máris pozitívnak bizonyulna; tegyük fel tehát, hogy ez nincs így és jelöljük az $a_{n_1}^{(k_1)}$ után a megmaradt tagok együtthatói közül a fenti elrendezésben az első el nem tűnő koeficientst $a_{n_2}^{(k_2)}$ -vel. A megfelelő $\chi_{n_2}^{(k_2)}(x)$ függvény az $i_{n_2}^{(2k_2-1)}$ és $i_{n_2}^{(2k_2)}$ intervallumok kivételével mindenütt eltűnik; ezen intervallumok elsejében pozitív, másodikában pedig negatív értékeket vesz fel. Ezek az intervallumok maguk azonban részintervallumai I_1 -nek, úgy hogy a $\chi_{n_2}^{(k_2)}(x)$ függvény és vele együtt az $a_{n_2}^{(k_2)}\chi_{n_2}^{(k_2)}(x)$ függvény az I_1 intervallum egy subintervallumában mindenütt pozitív; ezt a részintervallumot jelöljük I_2 -vel. Ennélfogva, ha ez I_2 intervallum valamely x helyét vizsgáljuk, akkor az (I) sor-nak ezen a helyen első két el nem tűnő tagja a következő:

$$a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$$

és

$$a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x),$$

és ezek mindketten nem negatívak; ennek megfelelőleg

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) \geq 0, \quad S_{n_2}^{(k_2)}(x) \geq 0,$$

ha x az I_2 intervallum egy belső pontja vagy határpontja.

Mutassuk ki még, hogy az utóbbi egyenlőtlenségben az egyenlőségi jel elhagyható.

Tényleg: az I_2 intervallum vagy teljesen az I_1 intervallum belsejében fekszik, vagy pedig annak egyik határát éri. Első esetben I_2 minden belső és határpontjában

$$a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0,$$

s ennélfogva ugyancsak

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) = a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x) + a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0.$$

Ez az okoskodás akkor is érvényben marad, ha I_2 az I_1 intervallum ama végét éri, melyen $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0$. Ha ellenben I_2 az I_1 intervallum ama végét éri, melyen $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x) = 0$, akkor csak az I_2 belsejére állíthatjuk az

$$a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0$$

és ebből közvetlenül az

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0$$

egyenlőtlenséget. Ámde a szóbanforgó határponton nyilván

$$a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0$$

és így az I_2 intervallumnak ezen a végén is fennáll az

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0$$

egyenlőtlenség, melyet tehát az I_2 belsejére és annak határaitra is igazoltunk.

4. Legyünk ezentúl csak az I_2 intervallum pontjaira tekintettel; ezekre a helyekre vonatkozólag adott végtelen sorunk csak ama tagjai bírnak befolyással, melyek ebben az intervallumban nem tűnnek el identikusan. E tagokhoz tartoznak mindenesetre a fentebb vizsgált $a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ és $a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x)$ tagok. Ha a többi számba jövő tag együttthatója mind 0 volna, akkor sorunk értéke az I_2 intervallum minden pontjában lényegesen pozitív volna. Ellenkező esetben, legyen az első el nem tűnő tag az, a melynek indexei n_3 és k_3 , azaz legyen

$$a_{n_3}^{(k_3)} \geq 0,$$

úgy hogy adott végtelen sorunk ama első három tagja, a mely az I_2 -ben nem identikusan 0 a következő:

$$a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x), \quad a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x), \quad a_{n_3}^{(k_3)} \chi_{n_3}^{(k_3)}(x).$$

A $\chi_{n_3}^{(k_3)}(x)$ függvény és vele együtt az $a_{n_3}^{(k_3)} \chi_{n_3}^{(k_3)}(x)$ függvény az I_2 intervallum egy részében pozitív, egy részében negatív és egy részében zérus. Jelöljük I_2 ama részintervallumát, melynek belsejében a függvény lényegesen pozitív (>0), I_3 -mal; I_3 határpontjain a szóbanforgó függvény eltűnhetik. Minthogy tehát I_3 -ban

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0$$

és

$$a_{n_3}^{(k_3)} \chi_{n_3}^{(k_3)}(x) \geq 0,$$

azért ez I_3 intervallum minden belső- és határpontjában fennáll az

$$S_{n_3}^{(k_3)}(x) = S_{n_2}^{(k_2)}(x) + a_{n_3}^{(k_3)} \chi_{n_3}^{(k_3)}(x) > 0$$

egyenlőtlenség.

5. Folytassuk eljárásunkat és legyen $a_{n_4}^{(k_4)} \chi_{n_4}^{(k_4)}(x)$ végtelen sorunknak adott elrendezésében a 4. tagja, mely az I_3 intervallumban nem tűnik el identikusan. Ha I_4 jelöli I_3 ama subintervallumát, melynek belsejében az imént definiált tag lényegesen pozitív, akkor ezen I_4 intervallum minden pontjában

$$S_{n_4}^{(k_4)}(x) > 0.$$

Eljárásunkat folytatva, rendje meghatározzuk az

$$n_5, k_5; n_6, k_6; \dots; n_{p-1}, k_{p-1}; n_p, k_p; \dots$$

indexpárokat és ezeknek megfelelően az

$$I_5, I_6, \dots, I_{p-1}, I_p, \dots$$

intervallumokat, oly módon, hogy — általában — $a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x)$ az (I) végtelen sor p -dik tagja legyen, mely az I_{p-1} intervallumban nem tűnik el identikusan és I_p jelöli azt a részintervallumát I_{p-1} -nek, melynek belsejében az $a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x)$ függvény lényegesen pozitív értékeket vesz fel.

Teljes induktióval könnyen átlátható, hogy

$$S_{n_p}^{(k_p)}(x) > 0,$$

ha x az I_p intervallum valamely helyét jelöli. U. i. az n_p, k_p indexpárok választása szerint, ha x az I_p intervallum egy helyét jelöli

$$S_{n_p}^{(k_p)}(x) = S_{n_{p-1}}^{(k_{p-1})}(x) + a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x).$$

Ha tehát az I_{p-1} intervallumban, tehát ennek I_p részintervallumában is

$$S_{n_{p-1}}^{(k_{p-1})}(x) > 0,$$

akkor egyszersmind ez intervallum minden pontjában

$$S_{n_p}^{(k_p)}(x) > 0,$$

hiszen I_p belsejében és annak határán

$$a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x) \geq 0.$$

6. Ha az előbb leírt módon csak *véges sok*, pl. p számú, *indexpár volna kiragadható*, az azt jelentené, hogy az I_p intervallumban végtelen sorunknak csak ama tagjai nem tűnnek el identikusan, melyeknek indexei

$$n_1, k_1; n_2, k_2; \dots; n_p, k_p.$$

Ez esetben *végtelen sorunk összege az I_p intervallum bármely helyén $S_{n_p}^{(k_p)}(x)$ -szel, azaz egy zérustól különböző pozitív számmal volna egyenlő.*

Foglalkozzunk tehát azzal az esettel, a melyben a fentebb leírt módon *kiválasztható tagok száma végtelen*. Közvetlenül látnivaló ez esetben, hogy az imént értelmezett

$$I_1, I_2, I_3, \dots, I_{p-1}, I_p, \dots$$

intervallumok mindegyikének hossza, az őt megelőző intervallum hosszának felénél nagyobb nem lehet. Ennélfogva *egy és csak egy olyan x_0 hely létezik, a mely ez intervallumok mindegyikében benne fekszik*.

Vizsgáljuk ezen az x_0 helyen adott (I) végtelen sorunk összegét. Ezen a helyen sorunknak, csak a következő tagjai jönnek számba :

$$a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x_0), \quad a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x_0), \dots, \quad a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x_0), \dots,$$

mert sorunk többi tagjai ezen a helyen eltűnnek. Az ezekből a tagokból alkotott

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x_0) \quad (II)$$

végtelen sor *valamennyi tagja nem negatív*, ennélfogva a sor *részösszegei egy nem fogyó sorozatot* alkotnak. Minthogy továbbá a sor második részösszege lényegesen pozitív értékű :

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x_0) > 0,$$

(hiszen x_0 pontja az I_2 intervallumnak), azért a (II) *alatti sornak, ha összetartó, az összege csak egy a nulltól különböző szám lehet*.

Ennélfogva *adott (I) végtelen sorunk ezen az x_0 helyen vagy divergens, vagy pedig összege nulltól különböző szám*.

Ezzel állításunk minden részletében beigazolást nyert.

ALGEBRAI FÜGGVÉNYEK ARITHMETIKAI TULAJDONSÁGAIRÓL.

SZ. NAGY GYULÁ-TÓL.

HILBERT ¹ kimutatta a következő tételt:

Ha $f(y, x)$ mindkét változónak egész koefficiensű oly rationalis egész függvénye, a mely bizonyos C valós számnál nagyobb minden pozitív egészszámú x értéknél az y változó két vagy több egész koefficiensű függvényének szorzatára bontható, akkor az $f(y, x)$ mint a két változó függvénye is reducibilis.

HILBERT tételéből is levezethető a következő tétel, a melyet MERTENS — HILBERT-től különböző módon — igen egyszerűen mutat ki:

Ha $f(y, x)$ az y - és x -nek

$$f(y, x) = y^n + A_1(x)y^{n-1} + \dots + A_n(x)$$

alakú egész koefficiensű oly rationalis egész függvénye, a melynek minden (vagy egy bizonyos C -nél nagyobb minden) pozitív egészszámú x értéknél van egy $y-g$ egész koefficiensű faktora, akkor az $f(y, x)$ függvénynek is van egy $y-g(x)$ faktora, a hol $g(x)$ x -nek egészszámú koefficiensekkel bíró rationalis egész függvénye.

1. MERTENS e tételéből következik, hogy *csak a ratio-*

¹ D. HILBERT: Über die Irreduktibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten, CRELLES Journal Bd. 110.

² F. MERTENS: Über die Zerfällung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen in zwei Faktoren, Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wiss. in Wien, Bd. 120. p. 12—16.

nalis egész függvény oly irreducibilis algebrai függvény, a mely minden pozitív egészszámmal rationalis egészszámú értékkel bír.

E tétel alapján a következő tételeket hozhatjuk le:

2. *Oly irreducibilis algebrai függvény, a mely a független változónak minden pozitív egészszámú értékénél rationalis értéket is felvesz, a független változónak rationalis függvénye és pedig rationalis egész függvénye, ha az említett helyeken fölvevett rationalis értékek véges nevezőjű törtek alakjában fejezhetők ki, különben pedig tört függvénye.*

Legyen u. i. a mondott tulajdonságú algebrai függvény $y(x)$, a mely eleget tesz egy

$$A_0(x)y^n + A_1(x)y^{n-1} + \dots + A_n(x) = 0 \quad (1)$$

alakú irreducibilis algebrai egyenletnek, a hol $A_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) x -nek egész koefficiensű rationalis egész függvénye és az összes A függvényeknek nincs közös osztója.

Ekkor az

$$\eta = A_0(x)y \quad (2)$$

algebrai függvény egész függvény, a mely a föltétel szerint minden (vagy egy akármilyen C valós számnál nagyobb minden) pozitív egészszámú helyen rationalis és pedig, mivel egész függvény, rationalis egészszámú értéket vesz föl.

A MERTENS tételéből folyó tétel szerint tehát η egész koefficiensű rationalis egész függvény és így (2) szerint y is rationalis függvény és pedig egész függvény, ha A_0 konstans, különben tört függvény.

3. Az előző tétel általánosítását akárhány változós algebrai függvényekre következőkép mondhatjuk ki:

Az oly m változós irreducibilis algebrai függvény, a mely az m -dimenzionalis tér minden pozitív egészszámú koordinátákkal bíró pontjában rationalis értéket is vesz fel, az m változónak rationalis függvénye és pedig egész függvénye, ha a mondott pontokban fölvevett értékek véges nevezőjű törtek alakjában fejezhetők ki, különben pedig tört függvénye.

Legyen a keresett tulajdonságú algebrai függvény

$$\xi = F(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Alkalmazzuk erre az

$$x_1 = x, x_2 = x^M, \dots, x_m = x^{M^{m-1}} \quad (3)$$

KRONECKER-féle ¹ substitutiót, a hol M egy nagy pozitív egészszámat jelent, akkor ez által a ξ függvény átmegy egy egyváltozós algebrai függvénybe, a mely az előző pont tétele szerint rationalis. Ha M -et elég nagyra választottuk, akkor ebből az egyváltozós rationalis függvényből egyértékű módon visszatérhetünk a (3) alatti substitúciók segítségével az eredeti m változós függvényhez, a mely tehát szintén rationalis és pedig a rationalis egész vagy tört a szerint, a mint az egyváltozós függvény egész vagy tört.

4. Az *oly reducibilis algebrai függvény, a mely minden pozitív egész számnál oly értéket is vesz fel, a mely egy rationalis számnak k -dik hatványa, maga is egy rationalis függvénynek k -dik hatványa.*

Legyen u. i.

$$y = F(x)$$

a mondott tulajdonságú algebrai függvény, akkor

$$\eta = \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{F(x)},$$

mint oly algebrai függvény, a mely minden pozitív egészszámu értéknél rationalis értékkel bír, a (2) tétel szerint x -nek rationalis függvénye. Jelölje azt a rationalis függvényt $f(x)$, akkor az

$$\eta = \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{F(x)} = f(x)$$

egyenletből

$$y = F(x) = [f(x)]^k.$$

5. Ha

$$y = F(x)$$

¹ KRONECKER: Festschrift, p. 11.

oly irreducibilis algebrai függvény, a mely az összes pozitív egész számoknál oly értéket is felvesz, amelyek mindenike előállítható, mint egy rationalis számnak $f(\xi)$ rationalis kifejezése, akkor a függvény

$$y = F(x) = f[\varphi(x)]$$

alakban állítható, a hol $\varphi(x)$ x -nek egy rationalis koefficiensű rationalis függvényét jelenti.

Legyen

$$f(\xi) = \frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)},$$

a hol

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n \\ f_2(\xi) &= \beta_0 + \beta_1\xi + \dots + \beta_m\xi^m; \end{aligned}$$

és legyen $y_1 = F_1(x)$ (ill. $y_2 = F_2(x)$) oly algebrai függvénye x -nek, a mely minden (vagy egy C valós számnál nagyobb minden) egész számnál oly értéket is felvesz, a mely előállítható, mint egy rationalis számnak $f_1(\xi)$ (ill. $f_2(\xi)$) kifejezése.

Ha

$$y_1 = F_1(x) = a_0 + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_k\varphi_k(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$$

tesszük, akkor $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) x -nek oly algebrai függvényét jelenti, a mely minden (vagy egy C -nél nagyobb minden) pozitív egész számnál egy rationalis szám k -dik hatványával egyenlő. Az előbbi pontban kimutatott tétel szerint tehát van egy olyan rationalis koefficiensű $\varphi(x)$ rationalis függvény, hogy

$$\varphi_k(x) = [\varphi(x)]^k;$$

mivel pedig $\varphi_h(x)$ minden pozitív egész számnál ugyanannak a rationalis számnak h -dik hatványával egyenlő, ennél fogva

$$\varphi_h(x) = [\varphi(x)]^h.$$

Ezek alapján tehát:

$$y_1 = F_1(x) = a_0 + a_1\varphi(x) + a_2[\varphi(x)]^2 + \dots + a_n[\varphi(x)]^n = f_1[\varphi(x)].$$

Hasonlókép

$$y_2 = F_2(x) = \beta_0 + \beta_1 \varphi(x) + \beta_2 [\varphi(x)]^2 + \dots + \beta_m [\varphi(x)]^m + f_2[\varphi(x)]$$

és így

$$y = \frac{y_1}{y_2} = \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = F(x) = \frac{f_1[\varphi(x)]}{f_2[\varphi(x)]} = f[\varphi(x)].$$

6. A 4. és 5. tételt m változós algebrai függvényekre is kiterjeszthetjük.

Ha

$$\xi = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

oly irreducibilis algebrai függvénye az m változónak, a mely a független változók minden pozitív egészszámú értékrendszerénél oly értéket is fölvesz, amelyek mindenike előállítható, mint egy rationalis számnak rationalis $f(y)$ kifejezése, akkor a függvény

$$\xi = f[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)]$$

alakban írható, a hol φ argumentumainak rationalis koeficiensű rationalis függvényét jelenti.

E tétel bizonyítása az 5. pont alatt említett KRONECKER-féle substitutiókkal közvetlenül az előző pontban kimutatott tételre vezethető vissza.

Abban a specialis esetben, ha

$$f(y) = y^k,$$

nyerjük azt a tételt, hogy az oly m változós irreducibilis algebrai függvény, a mely független változók minden pozitív egészszámú értékrendszerénél egy egy rationalis számnak k -adik hatványával egyenlő, maga is egy m változós rationalis függvénynek k -adik hatványa. Ez a 4. tétel közvetlen általánosítása.

7. Ha egy irreducibilis algebrai függvény minden pozitív egészszámnál oly irrationalis értékeket is felvesz, a melyek rationalis koeficiensű k -ad fokú egyenletnek tesznek eleget, akkor a függvény oly k -ad fokú egyenletnek tesz eleget, melynek koefficiensei a független változónak rationalis függvényei.

Specialis eset: az oly irreducibilis algebrai függvény, a mely a független változó minden pozitív egészszámú értékénél oly értéket is fölvesz, a mely egy rationalis számból vont k -adik gyök, akkor ez az egyet eleget tesz egy

$$y^k = f(x)$$

illetőleg

$$y = \sqrt[k]{f(x)}$$

alakú egyenletnek, melyben $f(x)$ x -nek egy rationalis koeficiensű rationalis függvényét jelenti.

8. Az előző pontban kimutatott tétel m változós algebrai függvényekre így mondható ki:

Ha m független változónak egy irreducibilis algebrai függvénye a független változók minden pozitív egészszámú értékrendszerénél oly irrationalis értéket is fölvesz, melyek rationalis koeficiensű k -ad fokú egyenleteknek tesznek eleget, akkor a függvény oly k -ad fokú egyenletnek tesz eleget, melynek koefficiensei a független változóknak rationalis függvényei.

A tétel bizonyítása a 3. pontban használt KRONECKER-féle substitutiókkal történhetik.

9. *Ha az $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ $m+n$ független változóknak egy algebrai függvénye az m első független változónak minden pozitív egészszámú értékrendszere mellett az n utolsó független változó rationalis koeficiensű rationalis függvényére redukálódik, akkor ez a függvény az összes $m+n$ független változónak rationalis koeficiensű rationalis függvénye.*

Mivel a föltevés szerint a keresett algebrai függvény az x független változók minden pozitív egészszámú értékrendszerénél a y független változók rationalis koeficiensű rationalis függvényére redukálódik, azért a függvény az x és y független változók minden pozitív egészszámú értékrendszere mellett rationalis értékkel bír. A 3. tétel szerint tehát úgy az x , mint az y független változók rationalis koeficiensű rationalis függvények.

10. *Az oly m változós irreducibilis algebrai függvény, a mely az m dimenzionalis térbeli koordinata-rendszer kezdő-pontjában véges és az m koordinatatengety minden pozitív egészszámú pontjában rationalis értékkel bír, m független vál-*

tozónak egy rationalis koeficiensű rationalis függvényétől csak egy oly algebrai függvényben különbözhetik, a mely az m tengely minden pontjában eltűnik.

Legyen a keresett algebrai függvény:

$$\xi = F(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

jelölje annak értékét a koordinatarendszer kezdőpontjában C . Mivel a ξ függvény az x_k tengelyen ($k = 1, 2, \dots, m$) minden pozitív egészszámú pontban rationalis értéket vesz föl, azért azon a tengelyen egyenlő az x_k egy rationalis koeficiensű rationalis függvényével, a mely a nullpontban épen a C értéket veszi föl, a mely tehát szintén rationalis.

Ennélfogva

$$F(0, 0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0) = C + f_k(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

a hol $f_k(x_k)$ x_k -nak oly rationalis koeficiensű rationalis függvénye, a mely a nullpontban eltűnik.

A ξ függvény tehát a m koordinatategy minden pozitív egészszámú pontjában ugyanazt az értéket veszi föl, mint az

$$R(x_1, x_2, \dots, x_m) = C + f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_m(x_m)$$

rationalis koeficiensű rationalis függvény.

Ha tehát

$$\xi = R(x_1, x_2, \dots, x_m) + K(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

írjuk, akkor $K(x_1, x_2, \dots, x_m)$ oly algebrai függvénye az m független változónak, a mely minden tengely összes pozitív egészszámú pontjaiban eltűnik.

Kimutatjuk, hogy a $K(x_1, x_2, \dots, x_m)$ függvény minden tengely minden pontjában eltűnik. U. i. a x_k tengelyen

$$K(0, 0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

algebrai függvény minden pozitív egészszámú x_k értéknél eltűnő, az 1. tétel értelmében identikusan eltűnik.

11. Ez a tétel benne van a következő általánosabb tételben:

Az oly irreducibilis m változós algebrai függvény, a mely az m dimenzionalis koordinárendszer kezdőpontjában véges és a $N \left[\leq \binom{m}{k} \right]$ számú T_k k -dimenzionális koordinataterének minden pozitív egészszámú koordinátákkal bíró pontjában rationalis értékkel bír, az m változó egy rationalis koeficiensű rationalis függvényétől csak egy oly algebrai függvényben különbözhetik, a mely a N számú T_k koordinatater minden pontjában eltűnik.

Az m dimenzionalis tér egy T_k tere az által jellemezhető, hogy abban csak k koordinata különbözhetik nulltól, a többi $m - k$ koordinata mindig null.

Mint hogy a keresett algebrai függvény egy ily T_k minden pozitív egészszámú koordinatával bíró pontjában rationalis értékkel bír, azért a 3. tétel szerint abban a T_k térben a k számú nulltól különböző koordinata rationalis koeficiensű rationalis függvénye.

Ebből egyszersmind következik, hogy a keresett algebrai függvény mindazokban a k -nál kisebb dimenziójú koordinataterekben is a nulltól különböző koordinaták rationalis koeficiensű rationalis függvénye, a melyeket a T_k terek magukban foglalnak.

Legyen a keresett algebrai függvény

$$\xi = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

és legyen a koordinárendszer kezdőpontjában felvett értéke ξ , a mely az előbbi bekezdés szerint rationalis.

Akkor a

$$\xi_0 = \xi - C$$

oly algebrai függvény, a mely mindazokban a koordinatategyenesekben, melyeket a T_k -k magukban foglalnak, a nulltól különböző koordinata rationalis koeficiensű rationalis függvénye, melyek a 0 pontban 0-ra redukálódnak.

Vonjuk le ezeket a rationalis függvényeket a ξ_0 -ból, akkor a kapott ξ_1 függvény azokban a koordinátasíkokban, a melyek a T_k -kban benne vannak, a két nulltól különböző koordinata rationalis koeficiensű rationalis függvénye, a mely a két határoló

koordinatategelyen eltűnik. Vonjuk le ezen függvények összességét a ξ_1 -ből, a kapott ξ_2 -ből vonjuk le a T_k -kban levő háromdimenziós koordinataterekben rationalis függvényeket és így tovább. Az utóljára kapott ξ_k függvény oly algebrai függvénye az m független változónak, a mely minden T_k minden pontjában eltűnik. Ha a ξ -ből levont rationalis függvények összegét $R(x_1, x_2, \dots, x_m)$ -mel jelöljük, akkor

$$\xi = R(x_1, x_2, \dots, x_m) + \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

a mivel a kívánt bizonyítást is megadtuk.

12. Az eddigiekben az algebrai függvényeknek a pozitív egészszámú pontokban felvett értékeiből vontunk következtetést magukra a függvényekre. A következőkben a független változók pozitív egész értéke helyett más rationalis értékészletét fogjuk fölvenni és kimutatjuk a következő tételt:

Legyen

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

az az értéksorozat, melyet az

$$x = \varphi(t)$$

n -ed fokú rationalis koefficiensű rationalis függvény a t független változó pozitív egészszámú értékeinél fölvesz, vagyis legyen

$$x_k = \varphi(k) \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Az oly irreducibilis algebrai függvény, a mely az x_k sorozat tagjainál rationalis értéket vesz föl, oly nulladfajú rationalis koefficiensű algebrai egyenletnek tesz eleget, melynek fokszáma n -nel egyenlő, vagy annak egy osztója.

Ha $y(x)$ jelenti a keresett tulajdonságú algebrai függvényt, akkor $y[\varphi(t)]$ oly algebrai függvénye a t -nek, a mely t minden pozitív egészszámú értékénél rationalis értéket vesz fel, a 2. tétel szerint tehát

$$y = \phi(t)$$

t -nek rationalis koefficiensű rationalis függvénye.

Mivel az y és x között fönnálló algebrai kapcsolat a t parameter

$$x = \varphi(t), \quad y = \phi(t)$$

rationalis függvényeivel uniformizálható, azért a $y(x)$ algebrai függvény nulladfajú és oly algebrai egyenletnek tesz eleget, melynek koefficiensei x -nek rationalis függvényei és fokszáma n , vagy n -nek valamely osztója, mivel egy x értékhez általában n különböző t érték és így általánosságban ugyanannyi y érték tartozik.

13. Az előző tétel szerint az *egyváltozós algebrai függvényekre vonatkozó 1., 2., 4., 5. és 7. tételek akkor is igazak maradnak, ha a tételekben szereplő pozitív egész számok értéktartományát helyettesítjük azzal az értéktartománnyal, melyet a*

$$\varphi(t) = \frac{a + bt}{c + dt}$$

rationalis koefficiensű lineáris függvény az összes pozitív egész számoknál felvesz, mivel a $\varphi(t)$ elsőfokú.

Így pl. az oly irreducibilis algebrai függvény, a mely a most említett értéktartomány minden pontjában rationalis értékkel bír, az rationalis koefficiensű rationalis függvény, stb.

14. Ezen az alapon könnyen levezethetjük HILBERT-nek következő tételét:

Az oly irreducibilis algebrai függvény, a mely egy akár-milyen kicsiny intervallum minden rationalis pontjában rationalis értéket vesz föl, rationalis függvény.

Az oly algebrai függvény, mely az (a, b) intervallumnak, a hol a és b egymástól különböző tetszőleges rationalis számok,

$$b = a + \frac{b-a}{1}, \quad a + \frac{b-a}{2}, \quad a + \frac{b-a}{3}, \dots$$

rationalis helyein rationalis értékeket vesz föl, a 12. és 13. tétel szerint rationalis függvény, mivel itt

$$\varphi(t) = a + \frac{b-a}{t}.$$

Annál inkább áll ez oly algebrai függvényekről, melyek az (a, b) intervallumnak nemcsak az előbbi sorozatban meghatározott pontjaiban, hanem az összes rationalis pontjaiban rationalis értéket vesznek föl.

15. A 12. tételnek megfelelő tétel m változó esetére:

Ha egy m változós irreducibilis algebrai függvény az oly rationalis értékrendszerek mellett, melyeket az

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m) \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_m) \end{aligned}$$

rationalis koefficiensű rationalis függvényrendszer a t_1, t_2, \dots, t_m parameterek pozitív egészszámú értékeinél fölvesz, rationalis értékkel bír, akkor az az algebrai függvény — föltéve, hogy a φ függvények között nem áll fenn egy identikus relatio — nulladfajú egyenletnek tesz eleget, melynek koefficiensei rationalisak és fokszáma a függvényben legfeljebb: $n_1 n_2 \dots n_m$, ha a φ_k függvény fokszáma n_k .

Legyen a keresett algebrai függvény

$$\xi = F(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

akkor a

$$\xi = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = G(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

függvény a 3. tétel szerint a t -knek rationalis koefficiensű rationalis függvénye. Mivel pedig a φ függvények között nem áll fenn egy identikus relatio, azért a ξ függvény nulladfajú egyenletnek tesz eleget.

Mivel pedig egy (x_1, x_2, \dots, x_m) értékrendszerhez legfeljebb $n_1 n_2 \dots n_m$ (t_1, t_2, \dots, t_m) értékrendszer és minden (t_1, t_2, \dots, t_m) értékrendszerhez egy ξ függvényérték tartozik, azért a függvény fokszáma azon algebrai egyenletben, melynek koefficiensei az x -eknek rationalis függvényei, legfeljebb $n_1 n_2 \dots n_m$.

16. A megelőző tétel szerint a többváltozós algebrai függvényekre vonatkozó 3., 6., 8., 9., 10. és 11. tételek igazak maradnak akkor is, ha a pozitív egészszámoknak azon tételekben

szereplő értéktartományja helyett azon értéktartományt vesszük, a melyet az m független változónak m egymástól független rationalis koeficiensű linearis függvénye a független változók pozitív egészszámú értékeinél fölvesz.

Így pl. az oly irreducibilis m változós algebrai függvény, a mely az említett értéktartomány minden pontjában rationalis értékkel bír, az m független változó rationalis koeficiensű rationalis függvénye, stb.

17. E tétel segítségével levezethetjük HILBERT tételének m változós algebrai függvényekre vonatkozó általánosítását.

Az oly m változós algebrai függvény, a mely az m -dimenzionalis tér akármily kis térrészének minden rationalis pontjában rationalis értékkel bír, az m változónak rationalis koeficiensű rationalis függvénye.

Legyen a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, m$) két egymástól különböző akármilyen rationalis szám, akkor a 15. tétel szerint az az m változós irreducibilis algebrai függvény, a mely az m független változónak mindama értékénél, melyeket az

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1) = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{t_1} \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2) = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{t_1 + t_2} \\ &\dots \dots \dots \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_m) = a_m + \frac{b_m - a_m}{t_1 + t_2 + \dots + t_m} \end{aligned}$$

függvényrendszer a t parameterek összes pozitív egészszámú értékeinél fölvesz, rationalis értékkel bír, az az m független változónak rationalis koeficiensű rationalis függvénye.

A fenti egyenletekkel definiált x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) értékek által meghatározott pontok mind benne vannak vagy a határára esnek egy m dimenzionalis $[a_k - b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, m$) hosszúságú élekkel bíró paralelepipedonnak.

Annál inkább állithatjuk, hogy a keresett algebrai függvény rationalis, ha azon m -dimenzionalis paralelepipedon összes rationalis pontjaiban rationalis értékkel bír.

17. A következő két pont alatt a rationalis számok érték-tartományát elhagyva, az algebrai függvényeknek bizonyos irrationalis helyeken fölvevett rationalis értékeiből következtetünk a függvényre.

Az oly irreducibilis algebrai függvény, amely azok közül az x értékek közül, amelyekben a $\varphi(x)$ n -ed fokú rationalis koeficiensű rationalis függvény a k ($k = 1, 2, \dots$) pozitív egész számot felveszi, legalább egy mellett rationalis értéket vesz föl, akármilyen pozitív egészszám legyen is a k , előállítható, mint a $\varphi(x)$ függvénynek rationalis koeficiensű rationalis függvénye. A 13. tétel szerint így van ez akkor is, ha a k helyett k -nak egy rationalis koeficiensű linearis függvényét vesszük.

Legyen u. i. a keresett algebrai függvény

$$y = F(x)$$

és legyen a

$$\varphi(x) = t$$

egyenletből

$$x = \psi(t),$$

akkor az

$$y = F[\psi(t)] = f(t)$$

függvény t -nek rationalis függvénye, mivel a függvény t -nek minden pozitív egészszámú értéke mellett rationalis értéket vesz föl, ennél fogva

$$y = f[\varphi(x)].$$

18. Az előbbi tétel több változós algebrai függvényekre nézve így fejezhető ki:

Az oly m változós irreducibilis algebrai függvény, amely azok közül az irrationalis x_1, x_2, \dots, x_m értékrendszerek közül, amelyek mellett a

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

egymástól független rationalis koeficiensű rationalis függvényrendszer az összes h_k ($k = 1, 2, \dots, m$) pozitív egész számokat felveszi, legalább egy mellett rationalis értékkel bír, előállítható, mint

„ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ függvények rationalis koeficiensű rationalis függvénye.

Legyen u. i. a keresett algebrai függvény

$$\xi = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

és legyen a

$$\varphi_k = (x_1, x_2, \dots, x_m) = t_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

egyenletrendszerből

$$x_k = \psi_k(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

akkor a

$$\xi = f(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m) = f(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

a t -nek rationalis koeficiensű rationalis függvénye, mert minden pozitív egész t_k ($k = 1, 2, \dots, m$) értékrendszerénél a függvény rationalis értékkel bír, minélfogva

$$\xi = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m).$$

A 15. tétel szerint a t -értékek helyett azoknak egy rationalis koeficiensű lineáris függvényét is fölvehettük volna.

Ezeket a tételeket lehetne kombinálni a megelőző tételekkel, de ezt elhagyjuk, mivel fogalmazásuk meglehetősen komplikált.

19. Végül algebrai görbékre nézve mutatunk ki az előbbiekkal rokon tételt, a mely azonban nem vezethető le HILBERT és MERTENS tételéből:

Ha

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

oly irreducibilis algebrai görbe egyenlete, melyen rajta van egy (x_0, y_0) pont és azon végtelen számú pont, melyeknek koordinátái az

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0, y_0), \quad y_1 = g(x_0, y_0) \\ x_2 &= f(x_1, y_1), \quad y_2 = g(x_1, y_1) \text{ stb.} \end{aligned}$$

nem periodikus iterációs eljárással adódnak, a hol $f(x, y)$ és $g(x, y)$ rationalis függvények, akkor ez a görbe csak nullad vagy elsőfajú lehet.

Kimutatjuk u. i., hogy az (1) görbe végtelen sok oly birationalis transformatióval bir, a mely önmagába viszi át.

Legyen annak a görbének egyenlete, a melybe az (1) görbét a

$$\xi = f(x, y), \quad \eta = g(x, y) \quad (2)$$

rationalis transformatio átviszi

$$g(\xi, \eta) = 0. \quad (3)$$

Ezen a görbén a (2) transformatiós egyenletek miatt rajta vannak az (1) görbe

$$(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), \dots$$

pontjai. A két görbe tehát végtelen sok pontban metszi egymást, a mi, mivel mindkettő irreducibilis, csak úgy lehetséges, ha a két görbe egybeesik.

A (2) transformatio tehát birationalis és az (1) görbét önmagában viszi át, hasonlóképp a

$$\begin{aligned} \xi &= f[f(x, y), g(x, y)] = f_1(x, y), \quad \eta = g[f(x, y), g(x, y)] = g_1(x, y); \\ \xi &= f_1[f(x, y), g(x, y)] = f_2(x, y), \quad \eta = g_1[f(x, y), g(x, y)] = g_2(x, y) \end{aligned}$$

stb.

végtelen sok nem periodikus birationalis transformatio is.

Az (1) görbe tehát csak nullad- vagy elsőfajú lehet.

KONJUGÁLT TRIGONOMETRIKUS SOROKRÓL.

FEJÉR LIPÓT 1.-tagtól.

1. Legyen

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu\theta + b_{\nu} \sin \nu\theta) \quad (1)$$

a θ valós változónak tetszés szerinti trigonometrikus sora valós együtthatókkal.

A

$$c + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-b_{\nu} \cos \nu\theta + a_{\nu} \sin \nu\theta) \quad (2)$$

trigonometrikus sort az (1) sor *konjugált* trigonometrikus sorának nevezzük. c itt tetszés szerinti valós állandó. A (2) sor konjugált sora (eltekintve egy additív valós állandótól) egyenlő az ellenkező előjellel vett (1) sorral.

Az (1) sor «valós komponense» az

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} - ib_{\nu}) z^{\nu} \quad (3)$$

hatványsornak, ha írjuk $z = e^{i\theta}$. Az (1)-hez konjugált (2) sor (eltekintve egy additív valós állandótól) ugyane hatványsor «képzetes komponense».

2. Tekintem az (1) sor részletösszegeit és arithmetikai közepeit; továbbá az ő konjugált sorának, (2)-nek részletösszegeit és arithmetikai közepeit.

Jelöljük:

$$s_n(\theta) = a_0 + \sum_{\nu=1}^n (a_{\nu} \cos \nu\theta + b_{\nu} \sin \nu\theta), \quad (4)$$

$$S_n(\theta) = \frac{s_0(\theta) + s_1(\theta) + \dots + s_n(\theta)}{n+1}; \quad (5)$$

$$\sigma_n(\theta) = c + \sum_{v=1}^n (-b_v \cos v\theta + a_v \sin v\theta), \quad (6)$$

$$\Sigma_n(\theta) = \frac{\sigma_0(\theta) + \sigma_1(\theta) + \dots + \sigma_n(\theta)}{n+1}. \quad (7)$$

Az $s_n(\theta)$, $S_n(\theta)$, $\sigma_n(\theta)$, $\Sigma_n(\theta)$ trigonometrikus polynomok között két összefüggés áll fönn és mindenekelőtt ezeket akarom leszármaztatni.

Legyen

$$d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n + \dots$$

tetszés szerinti végtelen sor és

$$d_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n, \quad (8)$$

$$\Delta_n = \frac{\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n}{n+1}. \quad (9)$$

Akkor

$$\Delta_n = \delta_n - \frac{d_1 + 2d_2 + \dots + nd_n}{n+1}. \quad (10)$$

Tehát (10)-re való tekintettel

$$S_n(\theta) = s_n(\theta) - \frac{\sum_{v=1}^n v(a_v \cos v\theta + b_v \sin v\theta)}{n+1}.$$

Azonban

$$\sum_{v=1}^n v(a_v \cos v\theta + b_v \sin v\theta) = \left[\sum_{v=1}^n (-b_v \cos v\theta + a_v \sin v\theta) \right]' = \sigma'_n(\theta),$$

tehát

$$S_n(\theta) = s_n(\theta) - \frac{\sigma'_n(\theta)}{n+1}, \quad (11)$$

és hasonlóképen nyerhető, hogy

$$\Sigma_n(\theta) = \sigma_n(\theta) + \frac{s'_n(\theta)}{n+1}. \quad (12)$$

3. Nem szándékom foglalkozni itt ez egyszerű, de fontos (11) és (12) összefüggéseknek összes következményeivel. Csúpn arra szorítkozom e sorokban, hogy a (11) és (12) összefüggések alapján a következő kérdést tárgyaljam.

Legyen az (1) trigonometrikus sor a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ interval-

lumban egyenletesen konvergens; mi következik ebből a (2) konjugált¹ sor konvergenciaviszonyaira nézve?

4. I. tétel. Legyen az (1) trigonometrikus sor a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens; akkor az ő (2) konjugált sorának n -edik részletösszege és az n -edik arithmetikai közepe közti különbség növekvő n -nel 0-hoz konvergál és pedig egyenletesen a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban. Azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sum_n (\theta) - \sigma_n (\theta)] = 0 \quad (13)$$

és pedig egyenletesen a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban.

E tétel bizonyítása egyrészt a (12) összefüggésre támaszkodik, másrészt azonban lényegesen SERGE BERNSTEIN egy igen fontos tételére.

S. BERNSTEIN szóban forgó tétele a következőképen hangzik:²

Legyen

$$\varphi(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta + \mu_1 \sin \theta + \dots + \lambda_p \cos p\theta + \mu_p \sin p\theta$$

tetszés szerinti, legfeljebb p -ed rendű trigonometrikus polynom valós együtthatókkal. Akkor, ha

$$|\varphi(\theta)| \leq M \quad \text{midőn} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (14)$$

egyszersmint

$$\left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right| = |\varphi'(\theta)| \leq pM. \quad (15)$$

¹ A konjugált sor konvergenciájának és divergenciájának az eredeti sor „határfüggvény”-étől való függésére nézve A. PRINGSHEIM kapott fontos eredményeket. Utalok a következő értékezésének 4. §-ára: „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise”, Münchener Berichte, 1900.

² L. SERGE BERNSTEIN: „Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné” (Mémoire couronné par la Classe des sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1912), pag. 19, 20. BERNSTEIN bebizonyítja, hogy $|\varphi'(\theta)| \leq 2pM$; azonban a tiszta sinuspolynomokra nyert eredményeinek alapján könnyű bebizonyítani, hogy már $|\varphi'(\theta)| \leq pM$ is érvényes. — Megemlítem, hogy FEKETE M. legközelebb a trigonometrikus polynomokra nézve a BERNSTEIN-féle $|\varphi'(\theta)| < \text{const. } pM$ egyenlőtlenségnek egy új bizonyítását fogja publikálni.

Legyen most ε tetszés szerinti (azonban fix) pozitív szám. A feltevés szerint található hozzá oly pozitív egész m szám, hogy

$$s_n(\theta) - s_m(\theta) \leq \varepsilon \text{ legyen, ha csak } n \geq m, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (16)$$

A (12) reláció szerint azonban

$$\begin{aligned} \Sigma_n(\theta) - \sigma_n(\theta) &= \frac{s'_n(\theta)}{n+1} = \frac{\{s_m(\theta) + [s_n(\theta) - s_m(\theta)]\}' }{n+1} = \\ &= \frac{s'_m(\theta)}{n+1} + \frac{[s_n(\theta) - s_m(\theta)]'}{n+1}, \end{aligned}$$

tehát

$$|\Sigma_n(\theta) - \sigma_n(\theta)| \leq \frac{|s'_m(\theta)|}{n+1} + \frac{|[s_n(\theta) - s_m(\theta)]'|}{n+1}.$$

Egyrészt mindenestre

$$\frac{|s'_m(\theta)|}{n+1} \leq \varepsilon$$

midőn

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

ha csak n elegendő nagy.

Másrészt, ha $n \geq m$, $s_n(\theta) - s_m(\theta)$ egy legfeljebb n -edrendű trigonometrikus polinom, mely (16) szerint abszolút értékben $\leq \varepsilon$, ha $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Tehát a S. BERNSTEIN-féle (15) egyenlőtlenség alapján

$$|[s_n(\theta) - s_m(\theta)]'| \leq n\varepsilon, \quad (n \geq m),$$

és így

$$|\Sigma_n(\theta) - \sigma_n(\theta)| < 2\varepsilon, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

ha csak n elegendő nagy. Azaz $\Sigma_n(\theta) - \sigma_n(\theta)$ egyenletesen 0-hoz konvergál, ha $\lim n = \infty$, a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban, q. e. d.

5. Az I. tételből következik a

II. tétel. Ha az (1) trigonometrikus sor a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens, akkor a konjugált (2) sor mindazon helyeken konvergens, a hol a (2) sor summabilis.

Ha ugyanis egy θ helyre nézve létezik a $\lim \Sigma_n(\theta)$ határ-

érték, akkor a (13) egyenlet szerint létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\theta)$ határ-
érték is, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n(\theta).$$

[Megjegyzem, hogy *pusztán* abból, hogy az

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu\theta + b_{\nu} \sin \nu\theta)$$

sor a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens, *nem*
következik még, hogy a konjugált

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-b_{\nu} \cos \nu\theta + a_{\nu} \sin \nu\theta)$$

sor egy θ helyen konvergens. Mert pl. a

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\sin \nu\theta}{\nu \log \nu}$$

sor¹ a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens.

$$- \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\cos \nu\theta}{\nu \log \nu}$$

azonban a $\theta = 0$ helyen (valóságosan) divergens.]

Az I. tételből folyik továbbá a

III. tétel. *Ha az (1) sor a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens, akkor a (2) konjugált sor a $(0, 2\pi)$ intervallumnak egy pontthalmazán egyenletesen convergens, ha a (2) sor ugyanezen pontthalmazon egyenletesen summabilis.*

Ha eszerint speciell a konjugált sor az egész $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen summabilis, akkor ugyanott egyenletesen konvergens.

6. A III. tételt arra a legegyszerűbb esetre akarom alkalmazni, midőn nemcsak az (1) sor, hanem a (2) konjugált sor is θ egy mindenütt folytonos (2π szerint periodikus) függvényének a FOURIER-féle sora.

¹ L. «Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze», (Münchener Berichte, 1910, §. 2), című munkámat.

Most tekintek tehát egy

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

hatványsort (valós vagy komplex együtthatókkal), a mely $|z| < 1$ -re konvergens és a lezárt $|z| \leq 1$ körtartományban folytonos. Ekkor érvényes a

IV. tétel. *Ha az*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots \quad (17)$$

hatványsor $|z| < 1$ -re konvergens és összege $|z| < 1$ -re folytonos, ha $|z| \leq 1$, akkor $|z| = 1$ -re a valós komponensének egyenletes konvergenciájából következik $|z| = 1$ -re képzetes komponensének az egyenletes konvergenciája, (és megfordítva).

Bizonyítás: A képzetes komponens ebben az esetben egy mindenütt folytonos (2π szerint periodikus) függvény FOURIER-sora. Egy ilyen FOURIER-sor azonban ¹ a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban *egyenletesen summabilis*. Tehát a III. tétel szerint *egyenletesen konvergens* is a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban, q. e. d.

A IV. tételhez a következőt jegyzem meg:

Ha a $|z| < 1$ -re konvergens és $|z| \leq 1$ -re folytonos

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

hatványsornak *egyik* komponense $|z| = 1$ -re konvergens ugyan, azonban *nem egyenletesen* konvergens, akkor a *másik* komponens már *nem-egyenletesen konvergens*, sőt *divergens* lehet.

Ez az eset forog fönn ama példában, melyet «Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze» (Münchener Berichte, 8. Januar, 1910) című munkámnak 4. §.-ában ((29) egyenlet) publikáltam.² Az ott definiált numerikus (valós) együtthatókkal bíró

$$F(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_n z^n + \dots \quad (18)$$

hatványsornak valóban a következő tulajdonságai vannak:³

¹ L. a Math. Annalen Bd. 58-ban közölt értekezésemet.

² L. még DE LA VALLÉE-POUSSIN: «Cours d'Analyse Infinitésimale», deuxième édition, tome II, chapitre IV, no. 159.

³ L. «Sur les singularités de la série de FOURIER des fonctions continues,» (Annales de l'École Normale etc., 1911), című értekezésemet és DE LA VALLÉE-POUSSIN: loc. cit.

1. $|z| < 1$ -re konvergens.
2. $|z| < 1$ -re vonatkozó $f'(z)$ összege folytonos, ha $|z| \leq 1$.
3. $|z| = 1$ -re képzetes komponense:

$$\gamma_1 \sin \theta + \gamma_2 \sin 2\theta + \dots + \gamma_n \sin n\theta + \dots \quad (19)$$

minden valós θ -ra nézve konvergens ugyan, azonban

4. nem egyenletesen konvergens a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban. (Azaz LEBESGUE-féle singularitása van.)

5. $|z| = 1$ -re valós komponense:

$$\gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \cos 2\theta + \dots + \gamma_n \cos n\theta + \dots \quad (20)$$

a $\theta = 0$ helyen divergens. (Azaz DU BOIS-REYMOND-féle singularitása van.)

A (18) alatti hatványsor tehát a kívánt példát szolgáltatja.

7. «Sur les singularités etc,» című munkámban a (18) hatványsor 1., 2., 3., 4., 5. tulajdonságait egyenként bizonyítottam be. Közben érdekes véletlennek látszott, hogy a kétféle singularitás *egyazon konjugált pár* sorain észlelhető. Most az 1., 2., 3. tulajdonságok és a IV. tétel alapján kimondhatom, hogy a

$$\gamma_1 \sin \theta + \gamma_2 \sin 2\theta + \dots + \gamma_n \sin n\theta + \dots \quad (19)$$

sor 4. tulajdonsága *következménye* a

$$\gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \cos 2\theta + \dots + \gamma_n \cos n\theta + \dots \quad (20)$$

sor 5. tulajdonságának. Ha ugyanis a (19) sor a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens lenne, akkor a IV. tétel szerint a (20) sor is egyenletesen konvergálna a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban. Ez azonban nem áll fenn, sőt a (20) sor, 5. szerint, a $\theta = 0$ helyen még divergens is.

Tehát, a (18) példa birtokában, a DU BOIS-REYMOND-féle *singularitás existenciájából a IV. tétel segítségével a LEBESGUE-féle singularitás existenciájára következtem.*

Sőt a IV. tétel közvetlen folyományaképen kimondható a következő tétel:

V. tétel. *Legyen a*

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \quad (21)$$

hatványsor konvergens ha $|z| < 1$, és $\varphi(z)$ összege folytonos ha $|z| \leq 1$. Ha ekkor $|z| = 1$ -re e hatványsor egyik komponense konvergens, szükségképen mutatja a LEBESGUE-féle singularitást, míhelyt a másik komponensnek DU BOIS-REYMOND-féle singularitása van.¹

Ezzel megadtam a hatványsoroknak egy osztályát, melyre nézve a DU BOIS-REYMOND-féle singularitásnak az egyik komponensben való fellépése a LEBESGUE-féle singularitás fellépését idézi elő a másik komponensben.

8. A IV. tétel szerint a $|z| \leq 1$ -re folytonos (17) hatványsor szükségképen egyenletesen konvergens $|z| = 1$ -re (és így $|z| \leq 1$ -re is) ha csupán komponenseinek egyike $|z| = 1$ -re egyenletesen konvergens.

Itt említem meg, hogy egy alkalommal, más feltevésekből, már következtettem egy $|z| \leq 1$ -re folytonos

$$\Phi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots \quad (22)$$

hatványsornak $|z| = 1$ -re való egyenletes konvergenciájára.²

Tehát kikötöm ismét, hogy a hatványsor $|z| < 1$ -re konvergens legyen és $\Phi(z)$ összege $|z| \leq 1$ -re folytonos legyen. Akkor már következik a (22) hatványsor egyenletes konvergenciája $|z| = 1$ -re, hacsak

$$\Phi(z_1) \neq \Phi(z_2),$$

a hol z_1, z_2 két tetszés szerinti, a z -sik egységkörének belsejébe eső és egymástól különböző pont; azaz míhelyt a $w = \Phi(z)$ függvény az egységkör belsejét egy-egy képezi le a w -sik egy tartományára.

(Megjegyzem, hogy pl. elegendő lenne a (22) sor egyik komponensének egyenletes konvergenciáját bebizonyítani $|z| = 1$ -re; ugyanis a IV. tételből már akkor következik a másik komponens egyenletes konvergenciája.)

¹ Ez az V. tétel sajátoságos kapcsolatra mutat rá, mely bizonyos konjugált soroknál a LEBESGUE ill. DU BOIS-REYMOND-féle singularitások föllépése között létezik.

² L. «La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple,» (Comptes-Rendus, Paris, 6 janvier, 1913), című cikkemet.

9. A 6., 7., 8. pontokban feltételeztem, hogy az (1) sornak (2) konjugált sora is egy mindenütt folytonos (2π szerint periodikus) függvénynek a FOURIER-féle sora.

Most visszatérek az általános esetre és ismét csak annyit kötök ki, hogy az

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu\theta + b_{\nu} \sin \nu\theta) \quad (1)$$

sor a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens.

Mi következik ebből a (2) konjugált sor konvergenciájára nézve — minden további feltevés nélkül? A feleletet a következő tétel adja meg:

VI. tétel. *Ha az*

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu\theta + b_{\nu} \sin \nu\theta) \quad (1)$$

trigonometrikus sor a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens, akkor a

$$c + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-b_{\nu} \cos \nu\theta + a_{\nu} \sin \nu\theta) \quad (2)$$

konjugált sora a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban egy 0-mértékű pont-halmaz kivételével mindenütt konvergens.

Ugyanis az (1) sorra tett kikötésből LEBESGUE, RIESZ F., FISCHER ismert tételeinek segítségével következik, hogy a (2) sor egy, a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban a LEBESGUE-féle értelemben integrálható függvénynek a FOURIER-féle sora és így a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban «majdnem mindenütt» summabilis. A II. tételből azután következik, hogy «majdnem mindenütt» konvergens.

KISÉRLETI ADATOK AZ ARTEMIA-NEM MEGISMERÉSÉHEZ.¹

ABONYI SANDOR-tól.

(Hat táblával és 9 szöveg-ábrával.)

A DARWIN korszaknyitó művei által felidézett forradalom hullámai a fajok állandóságára épített bástyának utolsó alapköveit sodorták el, mikor az új tannak a fajok származásáról és átalakulásáról hirdetett elvei támogatására, az eddigi töméntelen pelda mellé, 1872-ben SCHMANKEWITSCH orosz biológus meglepően új adatokat szolgáltatott. Olyanokat, melyek a fajnak úgyszólván máról holnapra való megváltozását igazolják, tisztán a külső tényezők bizonyos megváltozása folytán. SCHMANKEWITSCH vizsgálatai szerint a sós vízi *Artemia salina* M. EDW. a víz só-concentrációjának emelkedésével *Artemia Mülhausenii* M. EDW. nevű fajjává változott, ellenben a víz higulásával az *Artemia salina*-n olyan faji jellegek jelentek meg, melyek a testvér *Branchipus*-nemnek sajátosságai. Viszont az édes vízi *Branchipus ferox* M. EDW. sós vízi életmód mellett fokozatosan átalakul *Branchipus medius*-szá, melyet SCHMANKEWITSCH éppen azért nevezett így, mert szerinte már átmenet az *Artemia*-nembe.

A DARWIN-féle faj-átformálódási magyarázatokban alig felfogható hosszúságú idők vagy legalább is generációk hosszú sora szerepel, mely alatt kiválogatódással vagy alkalmazkodással az új forma, az új faj fokozatosan kialakult. S ime egy, illetőleg több faj, melyeknek nincs szükségük évszázadezek és évmilliók

¹ A budapesti egyetem állattani intézetében készült dolgozat. Igazgató: ENTZ GÉZA dr., m. k. udv. tanácsos, ny. r. tanár.

sorára, hogy új faj-, vagy új nembelivé formálódjanak, elégséges néhány generatio, melyek tavasztól ősziig jó vagy rossz tenyészviszonyok között áttengődnek.

Kevés kísérleti zoologiai értekezés keltett akkora izgalmat és érdeklődést, mint a SCHMANKEWITSCH-félék. Az eredeti orosz dolgozatok hamarosan angol, francia és német szakfolyóiratokban lefordítva vagy átdolgozva jelentek meg, melyeket kivonatos ismertetések és bírálatok özöne követett. A részben a fajok átalakulási kérdésének tisztázása, részben különös tenyészviszonyaik révén érdekessé vált *Artemia*-nem ezen időtől kezdve számos vizsgálat és értekezés tárgyaként szerepel, a melyek részint a SCHMANKEWITSCH-féle adatok helyessége, részint azok magyarázatmódja mellett vagy ellen foglaltak állást.

Az Artemiákkal foglalkozó értekezések tömegeben a fajátalakulási főkérdés súlypontja kissé eltolódott, mert nem bizonyult olyan nagy horderejűnek a probléma, mint a mekkorának az első pillanatra látszott. A kérdés azonban csak megoldatlan maradt, mely mellett még újabbak bukkantak föl, melyeknek rendszeres összefoglalásáról és továbbfejtéséről, a régi és újabb irodalmi adatok felhasználásával, saját vizsgálataimra építve egységes képet vélek adhatni.

Lassan, fokozatosan jutott a kérdés tisztázódásának mai állapotába. Az eredeti fajleírások által óriási számra gyarapodott *Artemia*-fajok és varietások között már alig lehetett eligazodni. A rendszerezők egy része összevonta, más részük ellenben úgyszólván lelőhelyük szerint szétforgácsolta az *Artemia*-formakört. Úgy az egyik, mint a másik szélsőség a variációk rengeteg formagazdagságára épített, mindenik újabb és általánosabb összekapcsoló vagy szétbontó bélyegek alkalmazásával vélt rendet teremteni ezen rakoncátlan *Crustacea*-körben.

De tartsunk rendet! Lássuk a kérdés történeti kialakulását, hogy kellőképen tudjuk a jelen vizsgálataimból leszűrhető eredményeket a már meglevőkkel szervesen kapcsolni s a mennyiben lehetséges, azokból általános értékű vonatkozásokat megállapítani.

Az Artemia-nemről való tudásunk történeti kibontakozása.

Az Artemiákat a sós tavak környékén lakó népek és a salinákkal (tengersó pároló) foglalkozó emberek bizonyára már ősidők óta ismerik, a mit számos népies nevük is igazol.¹ A tudomány embereinek érdeklődését azonban csak alig másfél század óta keltették föl.

1755 október havában SCHLOSSER (88), angol orvos és természetbuvár, Dél-Hampshire-ben, Lymington salináit tanulmányozva, csodálattal észlelte, hogy a tömény sóoldattá bepárolgott tengervízben még élnek apró ízelt állatok, melyek vörös színükkel és fürge uszásukkal lebilincselik a szemlélőt. Olyan tömegekben hemzsegték a sólevet gyűjtő medenczékben, hogy annak vörös színt kölcsönöztek. A lymingtoni rákocskáról SCHLOSSER ugyanaz év október 6—7-ről keelve levélszerű közleményt küldött MATY-nak, a Journal Brittanique kiadójának. A közlemény hamarosan meg is jelent. A különös rákocskák sajátosságos tenyészközegük és rejtelmes életviszonyaik révén nagy érdeklődést keltettek. Különösen meglepetésszerűen hatott tenyészoldatuk oly fokú koncentrálttsága, melyet semmi más állat el nem visel. Ezen érdeklődés kielégítése céljából SCHLOSSER közleményét GAUTIER a párisi «Observations sur la Physique»-ben a következő évben, 1756-ban, színes táblával illusztrálva újra lenyomatta.

LINNÉ (75) a «Systema naturæ» 10. kiadásában, 1758-ban már felsorolja ezen sós vízi rákocskát Cancer salinus néven. De oly hiba van a leírásban, mely feltételezhetővé teszi — mint SIEBOLD kifejti — hogy LINNÉ a SCHLOSSER-féle eredeti, 1755-ben közre adott leírást nem ismerte. Ugyanis LINNÉ 10 pár lábat említ, holott SCHLOSSER — FRIEDENFELS (53) után idézem — egészen helyesen «22, azaz mindkét oldalon 11 lábat» említ. Az igaz, hogy LINNÉ hibázott, de ebből annál kevésbé lehet arra következtetni, hogy LINNÉ nem ismerte a kérdéses művet,

¹ «Sófereg», «Salztierchen», «Brine-worm», «verme de sale», «Bahar-el-dud» (tó-féreg) etc.

mert épen a MATY «Journal Brittanique»-jában megjelent közleményre és SCHLOSSER-re hivatkozva írja le LINNÉ a «Systema naturæ» 10. kiadásában, *Cancer salinus* néven: «Cancer macrourus articularis, manibus adactylis, pedibus patentibus, cauda subulata.»

«MATI diar. brittan. 1756.¹

Habitat in Angliæ Salinis Limingtonianis. D. SCHLOSSERUS.

Corpus pediculo majus, oblongum, Oculi distantes laterales, pedunculati. Antennæ setaceæ, corpore breviores. Cauda filiformi subulata, exserta, longitudine corporis. Pedes utrinque 10 patentes et quasi primati digesti.»

SIEBOLD és FRIEDENFELS tévedtek tehát ezen állításukban, a mi azonban LINNÉ-t csak nem igazolja, mert a SCHLOSSER-féle leírás és rajz is helyes, a ténynek megfelelő volt. Talán helyesebb e dolgot úgy felfogni, hogy LINNÉ erre nem helyezett súlyt, hiszen az általa leírt, másik azonos természetű *Branchipus (Cancer) stagnalis* nál sem túl nagy gondossággal járt el, mert ennél meg: «pedes multi (12 circiter) ad latera corporis» leírással állapítja meg a lábak számát.

Kiemeltem ezt azért, mert a későbbi időkben, mikor a LINNÉ-féle leírások dogmaként szerepeltek, elég bajnak volt kútforrása az elfogultság.

Ugyanezen időtájra esik (1771), hogy PALLAS (83) orosz-ázsiai utazásából a szibériai sós tavakból említi fel ezen sós vizi rákocskát.

Majd Fabricius (51) (1775) a Garnelák közé sorozza *Gammarus salinus* néven (Entomol. syst. II. p. 518.). Ettől fogva hosszú időn keresztül a «lymingtoni rákocska» *Cancer salinus* és *Gammarus salinus* néven felváltva szerepel, de mindig LINNÉ hibás adatát véve át SCHLOSSER értekezésének figyelembe vétele nélkül. Az akkori kor systematikusai, köztük PENNANT, GMELIN és HERBST szintén így tárgyalták ezen állatot. 1794 ben GROSINGER említi fel «só-féreg» néven az erdélyi sós tavakból; mivel ő maga nem ismerte az állatot, a LINNÉ-féle *Cancer salinus*-szal

¹ A közlemény 1755-ben jelent meg, így ez is hiba.

nem azonosíthatta (*Historia physica regni Hungariæ* T. IV. p. 402.).

Még RACKETT (86) is, a ki 1812-ben saját vizsgálataira támaszkodva, új adatokkal járul az állat ismeretéhez, hibásan 10 lábpárt rajzol. A még mindig kevésbé ismert rákocska LAMARK-nál (69) 1814-ben *Artemisus salinus* néven szerepel.

Ezideig rákunk rendszertani helye meglehetősen kétes volt. Végre LATREILLE (70) 1817-ben CUVIER *Règne animal*-jában (III. köt. p. 68.) helyesen a kopoltyús lábú rákok, *Branchiopoda* csoportjába sorolja *Branchipus salinus* néven. Azt hinnők, hogy ezen CUVIER-féle nagy műben már nem kísért többé a LINNÉ-féle 10 lábpárról szóló hiba. Csalódunk, mert még az 1829-ben megjelent újított és bővített kiadásában is (*Règne animal* T. IV. p. 174.) a következőt olvassuk: «... portant dix paires de pattes...» De itt már *Artemia salina* (*Cancer salinus* LIN.) néven szerepel, a mely név LEACH-tól (71) származik, a ki még 1819-ben nyomós okok alapján a *Branchipus*-nemtől az *Artemia*-nemben külön választotta s ebben az *Artemia salina* mellett *Artemia eulimene* néven különbözteti meg a Nice-ből előkerült salina rákocskát. De mivel ezen egész helyesen 11 lábpárt olvastak meg, tehát a LINNÉ-féle hibás leírás nem illett rá, LATREILLE (70) ezen formát új genusba, *Eulimene*-ba téve, *Eulimene albida* néven sorolja a rendszertanba (*Eulimene blanche* LATR.). Miáltal a rendszertanban salina-rákocska két nemben és két fajban szerepel, melyek a hibás leíráshoz való ragaszkodás következtében még jó ideig fennmaradtak. Ugyanigy veszi át őket DESMAREST (47) (1825) is.

Az Artemiákon végzett rendszeres megfigyeléseket és tanulmányozást THOMPSON (105) (1834) tanulmánya vezeti be. Új adatokkal járult a kérdés tisztázásához, mint első iparkodik kísérleti megfigyeléseivel világot vetni az Artemia- és Branchipus-fajok viszonyára. Mesterséges tenyészetek, melyekben a lymingtoni salinak sós iszapjából ivarérettségig nevelt fel Artemiákat, úttörői voltak a későbbi Artemia-kísérleteknek.

Valamivel később már nagyszabású tanulmány jelenik meg JOLY-tól (66) (1840), a ki a montpellier-i sós pocsolyákban, majd több középtengeri salinában (Martignane, Berre, Villeneuve) akadt

rá az Artemiára. JOLY műve ma is fundamentalis értékű, benne nemcsak rendszertani, de biológiai, anatómiai és élettani adatokat és megfigyeléseket közöl.

Ugyanezen időre (1840) esik MILNE-EDWARDS: «Histoire naturelle des Crustacés» cz. alapvető munkájának megjelenése. MILNE-EDWARDS a LINNÉ óta kísértő, *Artemia salina* leírásába becsúsztott hibát végérvényesen kiküszöböli, megállapítván, hogy az eredeti SCHLOSSER-féle leírás, a mely 11 lábpárt említ föl, a helyes, s LINNÉ és a nyomán haladók tévedésből irtak kevesebbet. MILNE-EDWARDS (77) a két *Artemia*-genust egyéb indokok alapján mégis megtartja, ezek az *Artemia*- és *Eulimene*-genusok, a melyekben az *Artemia salina*, *Artemia Mülhausenii* és az *Eulimene albida* van felsorolva. Az *Artemia salina* a SCHLOSSER-féle faj, az *A. Mülhausenii* az a faj, melyet FISCHER (52) 1834-ben *Branchipus Mülhausenii* néven irt le, s melyről már RATHKE (Fauna der Krym p. 395. pl. 6. fig. 14—21.) megállapította, hogy az *Artemia*-nembe tartozik. MILNE-EDWARDS szerint ugyanezen *Artemia* az, melyet AUDOUIN (18) 1836-ban Egyiptom nátron-tavaiból leírt. Mint kevésbé ismert fajt említi fel MILNE-EDWARDS az *Artemia Guildingi*-t THOMPSON id. műve nyomán. Ezen utóbbi *Artemia* az Antillák-ról van felemlítve.

MILNE-EDWARDS még megtartja, LATREILLE nyomán, a feleslegesen felállított *Eulimene*-nemet az ide sorozott *E. albida*-val.

MILNE-EDWARDS nagy művének megjelenése, valamint JOLY megfigyeléseinek közlése után fokozottabb érdeklődést váltanak ki az Artemiák. Egymás után jelennek meg részben önálló dolgozatok, részben pedig nagyobb művek keretébe zárt fejezetek, melyek mind szorosabban szövődnek a mai ezirányú tudásunk alapjaihoz.

Így jelentékeny BAIRD-nek (19) 1850-ben az angolországi alsóbbrendű rákokról megjelent tanulmányában az Artemiákról szóló része. A következő évben (1851) LEYDIG-től (72) jelenik meg kitűnő tanulmány az *Artemia salina* és a *Branchipus stagnalis*-ről. Ezt követte 1853-ban GRUBE (61) új korszak kezdetét jelentő értekezése: «Bemerkungen über die Phyllopoden» czímmel, melyben az *Artemia*-fajok rendszertani viszonyait is tárgyalja s arra az eredményre jut, hogy az eddig leírtakból öt faj tartható fenn,

melyek helyes rendszertani elvek szerint a *Branchipus*-nembe visszahelyezendők, azokat így *Branchipus salinus*, *Br. Milhausenii*¹ *Br. Köppenianus*, *Br. arietinus* és *Br. Eulimene* nevek illetik meg.

Tehát még GRUBE-nál is szerepel egy faj, a *Branchipus Eulimene*, melynek szülőanyja a LINNÉ-féle lapsus volt.

A következő évben (1854) ZENKER (116) adott közre a Crustaceák rendszertanáról és biológiájáról egy dolgozatot, melyben felhívja a figyelmet arra a tényre, hogy az Artemiák himjeit csak igen kevés tenyészhelyen találták. A hímek előfordulása vagy hiánya azonban nem általában jellemző biológiai momentum, mert olyan helyen is előfordulhatnak, a hol eddig nem találták őket. Kiemeli ZENKER, hogy ő is 1851-ben Greifswaldban az első Artemia-generatio kifejlésekor több száz nőstény között három hímét talált, ellenben ugyanezen év július havában több ezer nőstény között sem talált egyet sem.

JULY értekezésével az a hiedelem terjedt el, hogy az Artemiák ott, a hol hímek nincsenek, himnősek. Így ZENKER felfedezése meglehetősen nagy meglepetést keltett annál is inkább, mert ebben az időben még a szűzszaporodás törvényszerűségét nem ismerték.

Majd LIEVIN (74) (1856) fordította az érdeklődést az Artemiák felé, a ki már az AUDOUIN (18) által említett, az egyiptomi nátron-tavakban élő Artemiát részletes tanulmány tárgyává tette, ugyanaz az állat ez, melyet még BAIRD *Artemia Oudneyi* néven leírt és a melyet MILNE-EDWARDS az *Artemia Milhausenii* fajjal vont össze. LIEVIN tanulmányában kimutatja, hogy ez a faj önálló s így az eredeti *Branchipus Oudneyi* néven megtartandó. A nevet illetőleg indokolt volt LIEVIN ezen felfogása, mert hiszen GRUBE három évvel előbb az összes Artemiákat a *Branchipus*-nembe sorozta. A «*Branchipus Oudneyi*» az a sós vizi rákocska, melyet az arabok közt megfordult utazók «*Fezzanwurm*» vagy a bennszülöttek megnevezésével élve «*dud*»-nak neveznek. Ez az Artemia nem konyhasós

¹ *Milhausenii* a helyes név, nem pedig *Mülhausennii*. Lásd DADAY: Phyllopodes anostracés p. 125.

tavakban, vagy salinákban, limánokban besűrűsödő tengervízben él, hanem maró nátron-tavakban, melyek lúgos vízében hihetetlen számban tenyésznek. Különös, hogy az arabok ezeket kiszáritva és más tápláléku szolgált anyaggal pogácsákká állítva össze, élelmiczikknek használják. Nemzetgazdasági jelentősége és különös életmódja révén méltán tarthatott számot érdeklődésre.

A «dud» élvezete nem káros az egészségre, pedig tömény nátron-oldatban él, mely úgy látszik, hogy nem itatja át. Ugyanaz lesz bizonyára a viszony, mint az általam vizsgált Artemiáknál, a melyek natriumchlorid-tartalma nemcsak hogy független a tenyész-oldat koncentrációjától, hanem minden körülmények közt állandónak tekinthető (0·8% NaCl , 10% NaCl -oldatban tenyészőknél).

Az erdélyi sós tavakban élő Artemiák előfordulását mint első, 1794-ben GROSSINGER említi fel «só-féreg» néven, azonban ő, a ki csak mások szóbeli közléséből ismerte, nem tudta, hogy ez azonos a LINNÉ-féle *Cancer salinussal*. Majd 1844-ben Torda város helyrajzának ismertetésében HANKÓ JÓZSEF felemlíti a tordai sós tavakból (Viski (108)). 1861-ben SILL (102) megállapítja, hogy az *Artemia salina* LEACH az ott élő Artemia. A sós tavak környékén élő nép jól ismeri őt és «sóféreg» a helyi neve. SILL kutatta fel, hogy már előtte, 1844-ben, két veszendőbe ment megfigyelés volt ezen tavak Artemiáiról, nevezetesen BIELTZ és KAYSER voltak azok, a kiktől idevágólag az első tudományos értékű megfigyelés származott. SILL után 1862-ben CHYZER (38) csatol pótló- és kiegészítő adatokat SILL közleményéhez.

Majd az északamerikai sós tavak faunáját tanulmányozó VERRIL (107) 1869-ben új *Artemia*-faj új előfordulási helyére hívja fel a figyelmet. Az itteni nagy sós tó állatai között BRIGGS (32) 1870-ben ismét a VERRIL által leírt *Artemia fertilis*-sel foglalkozik, 1872-ben meg GARMAN (56) ismerteti ezen új VERRIL-féle Artemiát.

Ugyanebben az évben (1872) Vogt (109) tesz közzé érdekes fejtegetést a *Branchipus* és *Artemia* viszonyáról. De új korszak következik. Az Artemiák biológiája felé fordul a figyelem.

1871 és 1876 között SIEBOLD (99—101) különös gondot fordít az Arthropodák szűzszaporodásának tanulmányozására, ennek közepette az *Artemia salina* életviszonyait, szaporodási módját is megvizsgálja. 1872-ben külön munkában az *Artemia salina* parthenogenetikus tenyésztését ismerteti meg, melylyel helyes nyomra terelte a régi, JOLY által is hirdetett, hímnősnek vélt szaporodási mód felől való felfogást. SIEBOLD kiemelte természetesen azt, hogy az *Artemia* szűzszaporodása, mint azt a hímek időnkénti megjelenései is igazolják, csak esetleges, mert a hímek megjelenésével normálisan megtermékenyített petékkel szaporodnak. SIEBOLD ezen vizsgálataihoz csatlakozik az a kutatása is, a melyet 1876-ban az Utah-i nagy sós tóból származó *Artemia fertilis*-nek Münchenben nevelt példányain végzett.

Az eddigi történelmi átpillantásból láttuk, hogy eleddig az *Artemia* biológiájának kutatásával csak néhányan foglalkoztak, ellenben a rendszertani elhelyezése sok szakembert foglalkoztatót. A rendszerezők az Artemiákat a legnagyobb következetlenséggel egyszer a *Gammarus*-, majd *Artemia*- és *Eulimene*-nembe, majd pedig ismételten beteszik a *Branchipus*-nembe, hogy aztán megint kivegyék onnan. Ez a határozatlanság bizonyára olyan jellemvonásokra való támaszkodásban gyökeredzik, a melyek ezen állatfajnál nincsenek meghatározott formához kötve. Még nagyobb lett a tanácstalanság SCHMANKEWITSCH (89—96) dolgozatsorozatának megjelenése alkalmával és az ezt követő időkben, a mikor a rendszerező hiába való vergődése mind inkább szembeötlőbbé válik.

SCHMANKEWITSCH természetben végzett megfigyelések és laboratóriumi kísérletek alapján akarja megoldani az *Artemia*-nem rendszertani kérdését. Következtetéseiben biztos alapra mégsem építhetett, mert abban az időben az egész *Phyllopoda*-rákrend csekély mértékben volt ismeretes. SCHMANKEWITSCH-nak kétségtelenül óriási érdeme az, hogy rámutatott azon tényre, mely az *Artemia* alakváltozatainak közvetlen előidézőjeként tekinthető, nevezetesen, hogy tenyészközegük összetétele az, melytől variációs kialakulatuk közvetlenül függ.

1870—1877-ig SCHMANKEWITSCH több dolgot tesz közzé, melyekben a sós víz befolyását tárgyalja az *Artemia*-test kialaku-

lására. SCHMANKEWITSCH vizsgálatainak legfőbb és legmeglepőbb eredménye az, hogy az *Artemia salina* MILNE-EDWARDS a sós víz koncentrációjának emelkedésével fokozatosan átmegegyezik egy másik jól jellemzett *Artemia*-fajba, az *Artemia Mülhausenii* M. Edw. néven leírt fajba.¹ Viszont a sós víz hígulásával ez a faj fokozatosan elveszíti az *A. salina* faji bélyegeit. Majd végül a víz csaknem teljes kiédesülésével olyan bélyegek jelennek meg rajta, melyek már a *Branchipus*-nem sajátosságai.

Érthető, hogy egyik fajnak valamely másik fajba, sőt egészen más genusba való átesapása — tisztán a külső tényezők megváltozása nyomán — nagy érdeklődést váltott ki annál is inkább, mert az ekkor már világszerte diadalt aratott lassú és fokozatos átalakulást hirdető «Darwinismus» nyomán nagyon különbözően ítélték meg a biológusok a máról holnapra való gyors megváltozás értékét.

SCHMANKEWITSCH eredményei nyomán egészen új irodalomág támad, az ismertetések és kritikák, valamint önálló vizsgálatok követik egymást. Még népszerű munkák is tárgyalják ezen biológiai forradalmat jelentő kérdést (HARTING (63) 1877).

Egész sereg biológus figyelme a Branchiopodák felé fordul. Nálunk is már 1880-ban FRIEDENFELS (53) az erdélyi sós tavakban élő Artemiákról készít minden tekintetben kitűnő monographiát, melyben nemcsak rendszertani, de biológiai és általános zoológiai értékű feldolgozást is találunk.

Nagyban hozzájárult az *Artemia*-kérdés közérdekűvé tételéhez SEMPER-nek az 1880-ban (97) megjelent, az állatok természetes életviszonyait tárgyaló műve, melyben a kérdés fontosságához mértén kellő kritikával ismerteti az óriás horderejű SCHMANKEWITSCH-féle kísérletek és megfigyelések eredményeit. Keresi és meg is találja SEMPER az érintkezési pontot, melyen át ez az egyszerű megfigyeléssorozat a legnagyobb biológiai problémákkal összeláncszólódik.

GISSLER (57) 1881-ben két amerikai zoológiai folyóiratban elhelyezett közleményével hívja fel a figyelmet az általános

¹ A SCHMANKEWITSCH-féle *Artemia Mülhausenii* egyenértékű a mai *Artemia köppeniana*-val illetőleg az ugyanily nevű varietással.

physika-chemiai behatásokra, mint a Branchiopodák fejlődését befolyásoló tényezőkre.

Majd pedig a francia BRIQUEL (33) ad ki 1882-ben az *Artemia salina*-ról egy kis tanulmányt. Ugyanezen évben (1882) foglalkozik CERTES (37) is az *Artemia salina* biológiájával s megállapítja a beszáradt petéknek életszivósságát.

1883-ban PACKARD (82) lép elő az északamerikai Phyllopodák monographiájával, melyben épen úgy, mint DADAY-nak (41) 1885-ben megjelent, Erdély *Crustacea*-faunáját tárgyaló művében, azon idő rendszertani elveinek megfelelően találjuk meg az *Artemia*-nemet besorozva és tárgyalva. Ugyancsak Erdély sós vizeinek *Artemiáin* tett újabb megfigyeléseit adja közre FRIEDENFELS is (1885) (54).

Az 1885. év nagyon nevezetes adattal járult az *Artemiák* ismeretéhez, ugyanis KULCZYCKI (68) a délamerikai Callaoból (Peru) származó *Artemia*-féleség részére, mivel erre az *Artemia*-nem egyik fontos bélyege — a törzs és abdomen viszonyát tekintve — nem illett rá, a *Callaonella*-genust állítja fel s az állatot *Callaonella Jelskii* néven sorozza be az *Artemiidae*-családba.

A következő évben (1886) BRAUER (28) és CLAUS (39) tesznek közzé egy-egy tanulmányt, melyben az *Artemia* és *Branchipus*-nemek faji criteriumait, s a két nem egymáshoz való viszonyát igyekeznek anatómiai vizsgálatokon alapuló basisra fektetni. BRAUER különben már 1874-től kezdve számos rendszertani és biológiai értekezést írt a phyllopodákról, melyekben gondos megfigyeléseit adta közre.

CLAUS a phyllopodák összehasonlító fejlődéstanát és bonczatanát megvilágító dolgozataiban (1873—1886) először hangoztatja SCHMANKEWITSCH-csel szemben az *Artemiáknak* a *Branchipus*-nembe való átcsapására vonatkozólag, hogy a *Branchipus*-és *Artemia*-nemek közötti azon különbség, mely szerint a *Branchipus*-oknak 9, az *Artemiáknak* 8 a potroh szelvényeinek a száma, nem sarkalatos bélyeg, mert az utolsó szelvény egyik nemen sem valódi szelvény, hanem a villafüggelék hordó «telson», mely a *Branchipus*-nemen szelvény módjára leizelt és a 9. abdominalis szelvényt alkotja, ellenben az *Artemia*-

nemen a 8. szelvénynyel összenőtt, a miért is az Artemiák utolsó potroh-szelvénye jelentékenyen hosszabb az előző szelvényeknél.

A SCHMANKEWITSCH féle tan új táplálást nyert BRAUER-nek (28—29) azon theoretikus fejtegetése által, mely szerint az *Artemia*-nem szükség szerint a *Branchipus*-nemből alakult ki, még pedig olyanféle módon, hogy a *Branchipus*-nem jól kifejlett «furca»-ja koncentrált sós vízben fokozatosan eltűnt, úgy hogy ezzel correlatióban a szervezetük is megváltozott, miáltal végeredményben a mai *Artemia*-nem alakult ki. BRAUER szerint (1885—1886) megmagyarázható ezen átalakulás, ha figyelembe vesszük, hogy tömény sóoldatokban a villák evező mozgást nem végezhetnek, így a nem használat következtében visszafejlődtek, ellenben az úszásra szolgáló lábak megnövekedtek.

Ezen theoretikus fejtegetéssel szemben ENTZ (48) saját megfigyelései alapján más eredményre jutott. ENTZ 1886-ban az orvostermészettudományi értesítőben az «Erdélyi sós vizekben élő Artemiákról» közölte azon észleteit, melyekkel az Artemiák életviszonyai s a közvetlen környezet okozta kialakulás közötti összefüggés eddigi magyarázatát helyes mederbe terelte. Ezen értekezésben ENTZ összehasonlító vizsgálatai alapján megállapítja, hogy az *Artemia salina* különböző sóconcentrációjú oldatban élő különféle alakjai két típusba, ha tetszik varietásba vonhatók össze; «*biloba*» és «*furcata*» névvel jelöli ezen két csoportot, mely mint két határforma tekinthető. Az első a tömény s a második a híg sóoldatokat népesíti be. A két forma között az átmenet folytonos, azonban arról szó sem lehet, hogy az oldat hígulásával az «*Artemia*»-ból «*Branchipus*» legyen.

A mi a fark-függelék variálását illeti, ENTZ azon eredményre jutott, hogy annak eltűnése vagy kisebb-nagyobb mértékben való fejlettsége közvetlenül az oldat koncentrációjára, illetőleg az oldat sűrűségére, ezáltal annak ellenállására vezethető vissza (lásd ABONYI (5) p. 53.), vagyis olyan jelenség ez, mely, mint látni fogjuk, más nembeli Phyllopodán is meglehet a nélkül, hogy az illető Phyllopoda az *Artemia*-nembe tartozna.

Az *Artemia*-kérdés ily módon való módosulása után mindinkább érezhetővé vált, hogy az *Artemia*- és *Branchipus*-nemek,

illetőleg családok egymáshoz való viszonyát kell előbb tisztázni, miáltal az Artemiák gazdag variatio-sora magától megvilágosodhatnak.

A héjatlan levéllábú rákok (*Phyllopoda anostraca*) néven való összefoglalást, mely név még 1867-ből Sars-tól került forgalomba, kezdik feleleveníteni, belátván azt, hogy az eddigi «Branchipus» név nagyon tág, akár csak a köznép nyelvén a madár vagy bogár szó, s épenséggel nem alkalmas a systematikai feldolgozás főcsoport névéül. Különösen kitűnt ez akkor, a midőn egymásután jelennek meg MURDOCH (1884), KULCZYCKI (1885), SIMON (1886), WALTER (1887), DADAY (1888) és még mások dolgozatai, melyek részben egész sereg eddig ismeretlen fajt iktatnak a meglevők sorába, s ezzel mind több támpontot nyújtanak a későbbi vizsgálatok számára.

Ezek során BATESON (21) 1894-ben megállapítja, hogy az eddig fajnak tartott *Artemia milhausenii* csak egyik varietása az *Artemia salina*-nak, megállapítja továbbá, hogy az *Artemia salina* más varietásai sincsenek nagyon vagy kissé sós vízhez kötve, mert együtt is előfordulhatnak. Az érvben nyilvánvalóan tévedett BATESON, mert az egymást követő nemzedékek más alakban való jelentkezése nem a variatio állandóságára, hanem arra vezethető vissza, hogy az előző generatio kifejlődése folyamán domináló tényezők megváltoztak s az új generatio már ennek hatása alatt fejlődik, s mivel az Artemiák elég hosszú életűek (2—3 hónapig is élnek), továbbá tekintve azt, hogy élettartamuk alatt 4—5 generatio serdül fel, melyek kifejlett állapotukban már alig módosulnak, igen különböző formák te-nyészhetnek együtt (BEHNING) (22).

1895-ben GROCHOWSKI (60) egy édesvízi Artemiát ír le, mely ugyanolyan típusú, mint a KULCZYCKI *Callaonellá*-ja s ezért *Callaonella Dybowskii* néven sorolja be a rendszertanba. GROCHOWSKI adatának élet rögtön SCHMANKEWITSCH ellen fordítja, azt mondván, hogy ez az *Artemia* igazán édes vízben él és még sem vált *Branchipus*-szá. De majd mint látni fogjuk, nem olyan élesen metsző ez az adat, mint azt GROCHOWSKI gondolta.

A SCHMANKEWITSCH-féle eredményekkel az újabb adatok részben megegyezők, részben pedig ellenmondók. A kísérleti meg-

figyelés tökéletesen helyesnek bizonyult, ellenben a következtetés körül fejlődött ki a csata. Az Artemia-varietások nagyságbeli eltérését HÖBER (65) (1899) tisztán az állat testnedvei és a tartózkodási közeg concentratio-különbségétől, az osmotikus egyensúlyi állapottól függőnek tartja. Magyarázataiban az Artemiát olyan tömlőnek tételezi fel, melynek fala víz által átjárható, ellenben az oldott sók által, melyek akár a hártján belül, illetőleg azon kívüli folyadékban vannak, nem járható át. A molekuláris nyomáskülönbség akkor egyenlítődik ki, ha a külső és belső hártyafelületet egyenlő mennyiségű molekula éri, azaz, ha a concentratio kívül-belül egyforma. Ha a külső concentratio nem éri el a belsőt, akkor folyadék nyomul be s az állat duzzad, nő; ellenben, ha a külső concentratio nagyobb, akkor vizet von el s az állat zsugorodik, törpül.

HÖBER theoretikus fejtegetéseivel szemben ANIKIN (6) (1898) tenyésztési kísérletekkel, SAMTER és HEYMONS (87) (1902) statisztikai analysissal véli megoldhatónak a problémát.

Az orosz ANIKIN — ADELUNG referatuma szerint — a só-tartalom változására az Artemián jelentkező alaki módosulatokról azt tartja, hogy az azok révén kialakult formák nem varietások, hanem olyan formák, melyek «elnyomorodás» által jöttek létre. Szerinte ezen «elnyomorodás» annál kifejezettebb, minél nagyobb és gyorsabb a víz sóconcentrációjának megváltozása. Fokozatosan töményített sóoldatokkal végzett kísérletei alkalmával ANIKIN azt tapasztalta, hogy az Artemiakon semminemű változás sem észlelhető, ennek következtében ő a SCHMANKEWITSCH-féle megjelenő alaki különbséget a gyorsan megváltozott concentrációra véli visszavezethetőnek, s mint ilyenek, kóros elváltozás okozta formáknak tekintendők. Az így létre jött tulajdonságok az utódokra nem öröklődnek át s az eredeti körülmények között fejlődő állatok ismét az alapalakra ütnek. ANIKIN azt mellékesen megemlíti, hogy ugyanazon sós vízben igen gyakran más-más morphologiai sajátságot tüntetnek fel. Hogy ilyenkor melyik az «alapalak» és melyik az «elnyomorodott», arról hallgat ANIKIN.

Sokkal értékesebb ANIKIN vizsgálatainak másik része, melyben az Artemia-peték kikelésének körülményeit világítja meg.

Nevezetesen megállapítja, hogy a peték az oldat koncentrációjának csökkenésével kelnek ki. Megerősítik ezt OSTROUMOFF-nak (81) 1901-ben végzett rendszeres kísérletei is, melyek szerint nemcsak a peték kifejlődésében, de a naupliusok kibuvásában is az osmotikus nyomás különbözetének jut a főszerep. ANIKIN említett petekikelési észleleteit rendszeres vizsgálataival BRECKNER 1909-ben teljesen kidolgozta s az azokhoz fűzött fejtegetéseiben részletes leírást ad. Ugyanolyan ezen osmotikus differentián alapuló kikelési mód, mint a milyen az általam ismertetett, édesvízi Euphyllopodák petéin észlelt, vízhigulásra vagy kiszáradásra következő felöntés utáni fejlődésnek indulás (1910—1911 ABONYI [2, 3, 4,]).

Sikerült továbbá ANIKIN-nek éheztetett *Artemia*-koloniákban hímeket nevelni olyan Artemiáktól, melyek normálisan csak parthenogenesissel szaporodtak.

SAMTER és HEYMONS (87) a Káspi-tó keleti partján levő Molla-Kary-i sós lagunákból származó Artemiákat vizsgált. Szerintük helyes BATESON ama felfogása, hogy annyi *Artemia*-varietas van, mint a hány helyen tenyésznek. Ugy hogy az *Artemia salina* faj csupa lokalis varietasból áll.

SAMTER és HEYMONS megállapítja, hogy emelkedő concentratio mellett az *Artemia*-test hossza fokozatosan kisebbedik, az abdomen azonban aránylag hosszabb lesz a test elülső részénél, mert a rövidülés különösen az elülső testrészt illeti. A «furca» szintén kisebbedik és sertéi fokról-fokra fogynak, ellenben a kopoltyúk nőnek. A megváltozás fokozatos és SCHMANKEWITSCH öt *Artemia salina* varietását folytonos átmenet vezet át egymásba, de ezek egymás mellett is meglehetnek. Concentratióhoz kötött varietás épen ezért nincsen. Az *Artemia milhausenii* sem külön faj, még csak nem is race, hanem olyan értékű helyi vagy időleges forma, mint a milyen az állatországhban több ismertetes. Ugyanolyan az érteke, mint a milyent DADAY (45) 1888-ban az erősen variáló «*Branchipus ferox*»-on irt le.

SAMTER és HEYMONS rengeteg anyag átvizsgálásakor egyetlen egy hímét talált, melynek megjelenését nem vezetik vissza különös okokra.

SAMTER és HEYMONS egyébként több fentebb említett biolo-

gus véleményéhez csatlakozva, azt mondja (p. 60.). «Valamint jelenleg a szabad természetben az *Artemia Branchipus*-szá nem változik át, úgy valószínűleg a jövőben sem fog sikerülni még mesterséges úton, aquariumban sem az egyik állatformát a másikba átvezetni.»

STEUER (103) egy összefoglaló értekezésében magáévá teszi a SAMTER és HEYMONS felfogását s kijelenti, hogy a SCHMANKEWITSCH-féle felfogás megdőlt, de azért teljes tudatában van annak, hogy ezideig még korántsincs tisztázva a kérdés, mert annak sem a rendszertani alapja, sem pedig a kísérleti, sőt statisztikai oldala nem tár elénk végleg leszögezett eredményeket s a tervszerű tisztázás még hosszú idő kérdése.

Valóban úgy is lett. Más kutatók más szempontokból fogják fel a SCHMANKEWITSCH-féle eredményeket is; az kétségtelen, hogy kísérletei szabatosak, megfigyelései helyesek, így csak az a tényező rejthet hibát, mely az adott esetben «faj»-ként, illetőleg «fajok»-ként szerepel.

Az 1900-as évektől kezdve ismét erősen fellendül az Artemiák iránt való érdeklődés. SAMTER és HEYMONS nagy munkájával egyidőben (1902) PETRUNKIEWITSCH-nek (85) jelenik meg egy dolgozata, melyben az *Artemia salina* parthenogenetikus pete-érését világítja meg. Kiegészíti vizsgálataival BRAUER A.-nak (27) még 1893-ban megjelent ugyanezen állatnak szintén szüzpeteérésére vonatkozó észleleteit. ZOGRAF (118) 1905-ben az *Artemia* naupliusának anatómiai bélyegeivel foglalkozik. Majd a következő évben (1906) NOWIKOFF (89) a kifejlett *Artemia salina* állandóan meglevő, még a nauplius-korból öröklött frontális szervét ismerteti. KELLOG (67) pedig egy új *Artemia*-fajt (*Artemia franciscana*) ír le és annak létviszonyait tárgyalja.

ZOGRAF (117) Phyllopoda-tanulmánya, úgyszintén BOUVIER-nek (26) a rákok átalakulását előidéző környezetbehatást tárgyaló értekezése 1907-ben jelent meg.

1909-ben BORCEA (24) a Jassy környékén fellelt Artemián végez biológiai és kísérleti megfigyeléseket. Nagyobb szabású és jelentősebb BRECKNER-nek ugyanezen évben megjelent munkája, melyben az *Artemia* pete-kikelésének törvényszerűségét s a fejlődésükhöz szükséges sóoldat-összetételeket, illetőleg az azokban

szükséges ionok befolyását állapította meg. FRIES (55) pedig a peteérés folyamán a chromosomák kialakulását tanulmányozta.

STEUER (104) 1910-ben az *Artemia phototaxis*-át írja le, a mely ugyanolyan körülmények között nyilvánul, mint én azt ugyanazon évben az Apusokon és Branchipusokon kísérletileg beigazoltam (lásd: ABONYI (1)).

1910-ben jelent meg DADAY (43) «Monographie systematique des Phyllopoetes anostracés» cz. munkája, melyben az eddig leírt összes *Artemia*-fajokat szigorú kritika és óriási összehasonlító anyag alapján az *Artemia salina* L. és az *Artemia Jelskii* GRUB. fajba vonja össze. Az *Artemia salina* faj keretében azonban a «*principalis*», «*arietina*», «*Milhausenii*» és «*Köppeniana*» varietásokat különbözteti meg. Kiválóan fontos DADAY ama rendszertani megállapítása, melylyel az *Artemiidae*-családot megszünteti s annak formáit a hímek ölelői alapján a *Branchinectidae*-családba sorolja.

Az újabb időben az *Artemia*-n biológiai megfigyeléseket és részben kísérleteket BUJOR (34) végzett (1911). ARTOM (7—17) pedig 1905—1912-ig számos biológiai és variációra vonatkozó megfigyelést közöl. Vizsgálatai anyagául eleintén (1905) a Cagliari salinaiban tenyésztő *Artemiák* szolgáltak, a melyek között egyforma számban vannak hímek és nőtények. Majd 1905—1906-ban a sós víz koncentratíofokától függő variációt tanulmányozza, s megállapítja részben azt, a mit már SCHMANKEWITSCH is észlelt, részben pedig új adatokkal járul a kérdés tisztázásához. Vizsgálatai további során (1906) összehasonlítja a capodistriai «*Artemia parthenogenetica*»-t a cagliarii «*Artemia sessuata*»-val, majd egy másik dolgozatában a chromatin-állomány és a chromosomák száma szerint «*univalens*» és «*bivalens*» *Artemia*-varietást vesz fel. Ezen felosztást 1912-ben tovább építi és sejttani alapon iparkodik meghatározni az *Artemia*-nem systematikáját. Hogy ezzel ARTOM homokra épített, már itt megemlítem, ugyanis Portoroseból (Pirano mellett, mely meg Capodistriaival szomszédos) származó tenyészanyagomból két hímot neveltem fel, holott ARTOM szerint «nincs és nem is lehet» ezen «*Artemia-varietas*»-nak hímje.

Még csak BEHNING (22) (1912) dolgozatát említem meg, mely

szerint az oroszországi asztrachani kormányzóság területén az *Artemia salina* «principalis» formáiról és azok előfordulási viszonyairól tett közzé pontos és értékes megfigyeléseket.

Az *Artemia*-nem történeti kibontakozására visszatekintve képet alkothatunk magunknak a felől, hogy az így előttünk álló bonyolult biológiai és rendszertani kérdés a végleges tisztázástól még messze van.

Az említettek felsorolását szükségesnek véltem azért, hogy kellőképpen kiemelt részleteit a saját vizsgálataimhoz fűzve, egy-egy kidolgozást adhassak.

Az eddig leírt *Artemia*-fajokról.

Az *Artemia*-nem keretén belül végbe ment rendszertani változásoknak fokozatos módosulását csak úgy tudjuk kellőképpen értelmezni, ha számot vetünk azzal, hogy minő formák voltak azok, melyek ismerete s azok «fajai»-nak halmozódása lassanként a kérdés tisztázódásának szükségét felvetette. 1910-ig a fajok sokasága szinte megdöbbentő volt, melyben synonymák és új fajok váltakozása teszi tarkává a képet. *Cancer salinus* LINNÉ 1758; *Gammarus salinus* FABRICIUS 1775; *Branchipus salinus* LATREILLE 1817; *Eulimene albida* LATREILLE 1817; *Artemia eulimene* LEACH 1819; *Artemia salina* LEACH 1819; *Artemisia*¹ *salinus* LAMARK 1814; *Branchipus Milhausenii* FISCHER 1834; *Artemia Mülhausenii* MILNE-EDWARDS 1840; *Artemia Guildingii* THOMPSON 1834; *Artemia arietina* FISCHER 1851; *Artemia Köppeniana* FISCHER 1851; *Branchipus salinus* GRUBE 1853; *Br. Köppenianus* GRUBE 1853; *Br. arietinus* GRUBE 1853; *Artemia proxima* KING-BRADY 1886; *Branchipus Oudnegi* LIEVIN 1856; *Artemia gracilis* VERRIL 1869; *Artemia monica* VERRIL 1869; *Artemia fertilis* VERRIL 1869; *Artemia Utahensis* LOCKINGTON 1883; *Artemia intermedia* SCHMANKEWITSCH 1872;

¹ Az *Artemisia* genus-névről, melyet LEACH javasolt először és a melyet egyes rendszerezők (KEILHACK) újabban ismét alkalmaznak, már LAMARK (69) kimutatta, hogy «nomen praecupatum» (az *Artemisia* növény-genusra) s így az állatrendszertanban létjogosultsága nincsen.

Artemia franciscana KELLOG 1906; *Artemia urmiana* GÜNTHER 1898; *Artemia australis* SAYCE 1902; *A. Westralensis* SAYCE 1902; *Artemia asiatica* WALTER 1887; *Callaonella Jelskii* KULCZ. 1885; *Callaonella Dybowskii* GROCH. 1895; *Artemia Jelskii* GRUB. 1874 és egész sereg varietás.

Ha az itt felsorolt fajoknak régi elévült fajneveit elhagyjuk, úgy is körülbelül 20 systematikai tekintetből első pillanatra kifogásolhatatlan faj marad meg. Ha még meggondoljuk azt, hogy ezek a fajok öt világrészen oszlanak meg, más rendszertani csoportokhoz viszonyítva talán nem is találjuk épenséggel soknak. Hiszen ha még morphologiai bélyegeik megegyeznek is, tenyészföldségek évszázezres izolatiója biztosítja önálló fejlődésüket. De, és épen itt van a dolog fordulója, minél több helyről, minél nagyobb számban kerülnek elő, annál inkább előkerülnek gyűjtés útján olyan formák, melyek a földségi izolatio daczára azonosnak nyilvánítandók.

Variálódásokra lehet rámutatni, melyek azonos módon jelentkeznek a lelőhelyek legnagyobb részén. A nagyszámú faj fenntartása lassanként lehetetlenné vált. DADAY (43) 1910-ben megjelent rendszertanában már csak egy nemben, két alnemben, két fajjal találjuk felemlítve az Artemiákat. Az egyik fajon belül négy varietásként fenntart négy régi fajnevet. Így összesen öt forma maradt fenn.

Pedig talán a két alnem is sok, így a két faj is. A varietások ellenben, mint majd látni fogjuk, tetszés szerint foghatók fel, mintegy igazolásául annak, hogy a régi faj-leírók leírásukban olyan bélyegekre támaszkodtak, melyek labilis volta előttük ismeretlen volt.

Már SCHMANKEWITSCH kísérletei megingatták az *Artemia*-«fajok» szilárdságát; épen az ellenkezője állott be, mint a mit a túlzó darwinisták a kérdés tisztázódásától vártak. A fajokról kiderült, hogy nagyon is «mű-faj»-ok voltak, melyek nem állják meg a normális faj kritikáját, de viszont gondolkodóba ejtenek a felett, hogy más, szintén ilyen bélyegértékek által jellemzett fajok nem szintén ilyen rendszertani játék eredményei-e?

A régi Branchipus- és Artemia-családok rendszertani viszonya.

Az újabb idők rendszertani vizsgálatai mindinkább arra a meggyőződésre vezettek, hogy az Artemiák rendszertana korántsem olyan stabil, mint az általában más állat-csoportokon észlelhető. A kérdés rendszertani része tisztázottnak tekinthető addig a fokig, a meddig a rendszerezés munkáját a kísérleti és megfigyelési tények megerősítik.

Az Artemia-nem történetében döntő szerepet vitt a LINNÉ-féle leírás további osztályozó értéke. Mivel a testvér *Cancer stagnalis*-nak a *Branchipus*-nem névvel való felcserélése az új *Branchipus*-nemet, majd ebből a *Branchipodidae*-család nevét formálta, épen így lett a *Cancer salinus*-ból is több-kevesebb hányódás után *Artemiidae*-család. A történeti kialakulás folyamán találunk egységsítési törekvést, a mikor a mi állatunk a *Branchipus*-családba és nembe soroztatott, majd abból kivéve, ismét önállóan szerepelt.

Hogy a kérdés magában megoldható nem volt, kitűnik abból, ha SIMON (1886), majd pedig a legújabb DADAY-féle (1910) phyllopoda-monographiának idevágó fejezetét tanulmányozzuk. Nem volt lehetséges pedig azért, mert az *Artemia*-nem kérdése az összes héjatlan levéllábú rákok rendszertani kérdése is, így abból kiragadva nem lehetett kellő működési alapra építeni. Az összes *Branchipus*-formák tanulmányozója előtt kiviláglik legelső sorban az, hogy LINNÉ két faja fölé emelt két kategória nem egyenlő értékű. A *Cancer stagnalis*-on, majd a *Branchipus*-nemen épült csoport a «Phyllopoda anostraca» (SARS 1867) alrenddé nőtte ki magát, öt családdal és igen számos nembe tartozó fajjal. Ellenben a *Cancer salinus* eleintén egyenrangú csoportja az anatómiai bélyegek kellő mérlegelése után egyetlen egy fajként beolvadt ugyanazon alrendbe. Az alrend keretén belül is egy családba került igazi, a régi értelemben vett Branchipusokkal, melyektől anatómiai bélyegei nem ismerése és helytelen felfogása révén elválasztva volt.

SCHMANKEWITSCH vizsgálatait, fontosságuk és érdekességük mellett, óriási jelentőségüvé az a rendszertani anomália tette,

melylyel abban az időben a *Branchipus*- és *Artemia*-nemet egymástól igen nagy távolságban levőnek tartották. Hogyne, mikor az egyik fajba tartozó állatból más fajhoz tartozó állatforma lesz, sőt egészen más nem vagy család jellemvonását ölti magára — a környezet megváltozására. Nemde meglepő volna, ha valamely behatásra rókából farkas, vagy egészen más családba tartozó faj, pl. párducz formálódna, a mely megint visszacsinálhatná ezen átalakulási folyamatot. Pedig körülbelül ekkora rendszertani távolságok áthidalásáról lett volna szó. A változások valóban megvannak, de hogy más értékűek, az kétségtelen.

De lássuk azon bélyegeket, a melyeket SCHMANKEWITSCH vizsgálatai eredményeinek feldolgozásakor pozitívnak fogadott el.

Főkülönbség a régi *Branchipus*- és *Artemia*-nem között, 1. hogy az Artemiáknak a 11 lábpárral ellátott törzs után nyolcz szelvényből álló abdomen következik, a mely szelvényekből az utolsó csaknem kétszer oly hosszú, mint a megelőzője. A *Branchipusok* ellenben kilencz abdomen szelvényűek; 2. hogy a *Branchipusok* csak termékenyített petékkel szaporodnak, ellenben az Artemiák szűzen is.

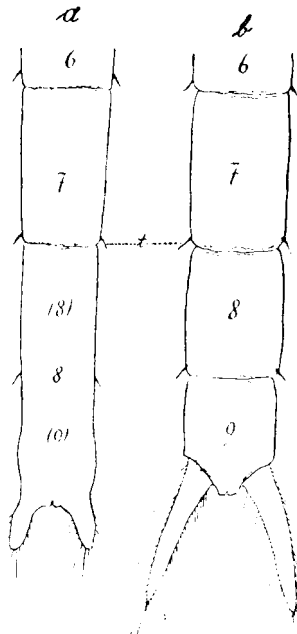
SCHMANKEWITSCH megjegyzi, hogy a morphologiai különbség fontosabb kell hogy legyen, mert ez szenved változást a környezeti medium behatására, a mikor is az *Artemia* a *Branchipus* jellemvonásait veszi fel, esetleg megfordítva. Kiemeli továbbá azt, hogy a *Branchipusok* két utolsó potroh-szelvénye az Artemiák utolsó, igen hosszú potroh-szelvényével homolog. Kísérletei alkalmával észlelte (92 p. 107.), hogy vízhibuláskor több egymásutáni generatio folyamán az igen hosszú utolsó szelvény befűződik, majd két izre különül, s ilyenkor annyi az *Artemia* potroh-szelvény száma, mint a *Branchipusoké*, azaz kilencz. Kiemeli továbbá azt, hogy viszont a *Branchipusokon* fiatal korban szintén nyolcz a szelvényszám, épen úgy, mint az erős sós vizi Artemiákon. De mesterséges nevelés nélkül is könnyen meg lehet győződni az *Artemia* 8. és a *Branchipusok* 8. és 9. gyűrűjének azonos értékéről. Ugyanis úgy az Artemián, mint a *Branchipuson* minden szelvény jobb- és baloldalán legalább 1—1 érzékserte a cuticulából kiáll. Ilyen érzékserte az Artemiák utolsó, rendkívül hosszú szelvényének a középtáján is emelkedik, jelölül annak,

hogy itt van a szelvény-összeolvadási határ (1. ábra). Ez a 8, illetőleg 9 abdomen-szelvényiség a főbélyeg az Artemia- és Branchipus-formák között.

De volt más is. Nevezetesen már LINNÉ úgy jellemezte a *Cancer salinus*-át, melyből az Artemiidae-család nőtt ki magát, mint a melynek az abdomenje legalább is törzshosszúságú, ellenben a *Cancer stagnalis*-t, mely viszont a Branchipodidae-családba növekedett, abdomenjének a hossza nem éri el a test hosszát («Cauda terretiuscula, articulata, longitudine fere corporis»). A LINNÉ-féle megkülönböztetésnek következő sorait is fontos bélyegnek tekintettek a későbbi osztályozáskor. A Branchipuson «Cauda cylindrica bifida» és «pinna horisontali bifida acuta», ellenben az Artemiánál «Cauda filiformi subulata, exerta longitudine corporis». Vagyis a törzs és abdomen viszonylagos hossza, továbbá a villa-függelék uszony, illetőleg árszerű volta szerepel.

Az abdomen ezen viszonylagos hossza még ma is fajbélyeg, melynek alapján az *Artemia*-nemben két faj különböztethető meg, s a melynek alapján GROCHOWSKI (60) a *Callaonella* nemet felállította.

Az *Artemia*- és *Branchipus*-nemek anatómiai megegyezősége körül végzett vizsgálatokból CLAUS (39) eredményei a legnagyobb értékűek. Szerinte az Artemiák nyolcz ízű potroha homolog a Branchipusok kilencz ízű potrohával. Részletes embriologiai vizsgálataival megállapítja, hogy a Branchipusok 9. ize tulajdonképen másodlagos, a mennyiben az összes Branchipus-formák utolsó ize, mint «præfulcralis rész», vagy leizelődik és ilyenkor látszólag kilencz izból áll az abdomen,



1. ábra. Artemia (a) és Branchipus (b) potrohvége; a megfelelő szelvények feltüntetése SCHMANKEWITSCH módosított rajzával; t szelvény-sérték.

vagy pedig az utolsó igazi szelvénynyel (azaz 8.-kal) összenő, a mikor az utolsó íz igen hosszú.

CLAUS ezen felfogását lárvák fejlődésénél észlelt jelenségekre alapította. Ha a dolgot magunk utána vizsgáljuk, csakugyan helyesnek találjuk CLAUS eredményeit, de a felfogását már nem. Ugyanis a «præfuleralis rész» hogy elválnak-e, vagy pedig nem válik el az előtte levő íztől, nem olyan könnyen elintézhető morphologiai elkülönülődési fok.

Úgy az Artemiáknál, mint a Branchipusoknál is, de az összes naupliusszal fejlődő rákformáknál a lárvá növekedésével fokozatosan jelennek meg a szelvények, még pedig kivétel nélkül elülről hátrafelé. Az elülső szelvények már teljesen kifejelettek, mikor még az abdomen szelvényei nem is fűződtek le. A szelvényeknek az elülső résztől hátrafelé való megjelenése — mint minden szelvényekből álló állatnál — arra enged következtetni, hogy az utolsó szelvény összevont értékkel bír. Mindenesetre olyan íz, mely nem azonosértékű a megelőzőjével. Ha a Phyllopodák szelvénytípusát figyelembe vesszük, igen tárgyhatárokat észlelünk. Külön a Branchipus-formákat tekintve a Polyartemiákat 17—19, a szorosan vett Branchipusokat 11 lábpár jellemzi, a minnek megfelelően a szelvények is más-más számúak.¹ Az itt említettekben is következik, hogy az igazi Branchipusok, köztük az Artemiák is, sokkal nagyobb számú szelvénynyel bíró őseiktől származtak szelvényreductio által. Hogy a szorosan vett Branchipus-formák valóban sok ízű őseiktől származtak, azt DADAY (43) egész sereg anatómiai bélyeget tartva szem előtt, teljes részletességgel kifejtette.

Ha a törzsfelődést csakugyan követi az egyéni fejlődés, — nincs okunk az ellenkezőjét felvenni — akkor biztosan megállapíthatjuk, hogy az Artemiák és más Branchipus-félék utolsó ízének leizelődése vagy le nem izelődése között melyik az elsődleges és melyik a másodlagos állapot, illetőleg a két viszonyból melyik az ősből? Az ízek egymásután való megjelenése azt mutatja, hogy külön nem válásuk, illetőleg a le nem izelődés az ősből,

¹ A fej-szelvények száma 6; a törzsé 11, 17 és 19: az abdomené 8 vagy 9; így az összes szelvények száma: 25. 26 ill. 31 és 33.

tehát visszamaradt fejlődési forma. Épen ezért elhibázott CLAUS-nak ama feltevése, hogy az Artemia azért nyolcszelvényű, mert a 8. íz össze van forrva a «præfulcralis» részszel, ellenben a Branchipusokon nincs összeforrva. Ha a fent említetteket megfontoljuk, a tényállásnak megfelelő kifejezés talán az volna, hogy az Artemiakon a 8. szelvény kialakulása után abból nem ízelődik le a 9., ellenben a Branchipusokon igen. Vagyis az Artemia ebben a tekintetben a Branchipushoz viszonyítva lárvállapotbeli sajátsgot tüntet fel (BRAUER 28). De igazolja ezt más is. Nevezetesen CLAUS «præfulcrum»-a csak ott lehet meg, a hol fulcrum is van. Már pedig bizonyos Artemia-varietásnak, valamint a többi Artemiának fiatal lárvakorában, fulcruma egyáltalán nincs. Vagyis a testszelvény, a mely a fulcrumot végső részének növekedése által kifejlesztené, fejlődésében még a fulcrum megjelenése előtt megáll (*Artemia Köppeni* v.). Majd más Artemia-formáknál 1—1 serte emelkedik (*A. Milhausenii*), melyek alapja felemelkedve ujszerű kiemelkedéssé alakul, melynek oldalán új serték nőnek (*A. melina*), végül a növekvő fulcrum rendes formáját nyeri el s be is ízelődhetik (*A. principalis*, *A. Jelskii*).

Bizonyos fejlődési formatio szerint halad a differentiatio — a sóconcentratio esésének megfelelően, — a mely jelenség részletes és értékelő fejtegetésére még visszatérünk.

Addig, míg az Artemia-fajok megkülönböztető bélyegeinek ezen fejlődési fokozatokon való megállapodását, mint teljes értékű morfológiai bélyeget tekintették s ezt viszont szembe helyezték más Branchipus-félék alaki differenciálódottságával, érthető volt az az indokolás, melylyel SCHMANKEWITSCH kísérleteit és megfigyeléseit kommentálta. Más azonban, mikor már tudjuk, hogy az Artemia csak Artemia, akár kristályosodásig bepárolgott sóoldatban, akár pedig édes vízben él. Azonban a concentrációnak megfelelő alaki módosulatok, melyeket SCHMANKEWITSCH után BAUER, ENTZ, SAMTER és HEYMONS, de még mások is észleltek, valóban megvannak, azonban értékük egészen más tekintetből bir fontossággal, mint azt SCHMANKEWITSCH kifejtette. Nevezetesen óriási jelentőséggel bir az általános fajformálódás törvényszerűségének megismerésére.

A sós víz töménységének tulajdonítható alaki módosulatok Artemiákon és más Branchipus-félén.

Már a megelőzőkben meggyőződést szereztünk a felől, hogy az Artemiák tenyészvizük sóconcentrációja szerint bizonyos módosulatokat szenvednek, melyeket a velük foglalkozó szakemberek más-más szempontból felfogva értelmeznek. Így GRUBE (61) és követői az Artemiákat a sóconcentráció okozta módosulatok alapján különböző fajoknak vagy legalább is varietásoknak tartják. Ellenben ENTZ, SAMTER és HEYMONS, ARTOM és velük többen a víz sóconcentrációjához idomult alakoknak vélik.

Hogy megítélhessük miként áll tulajdonképpen ez a dolog, szükséges megállapítanunk azon bélyegeket, melyek a sóconcentráció-változásra felelnek, s mint ilyenek ezelőtt fajmegkülönböztető bélyegként szerepeltek.

A víz sóconcentrációjának megfelelően változást szenved:

1. a termet nagysága,
2. a törzs és potroh viszonylagos hosszasa,
3. a potroh ízeinek egymáshoz viszonyított aránya,
4. a lábak s az azokon lévő kopolyúk alakja,
5. a villafüggelékek és végül
6. a szaporodási mód.

Az első pontot illetőleg régi tapasztalat, hogy a nagyon tömény sóoldatokban sokkal apróbb termetűek az Artemiák, mint a közepes vagy híg sóoldatokban, viszont a víz teljes kiédesülésével a termetük ismét rövidül. Így az ivarérett Artemiák teljes hosszasa, tekintet nélkül a formákra, 5·5—18 mm között ingadozik.

A törzs és potroh a concentratio változására nem egyöntetűen reagál. A töménység emelkedésével a törzs kisebbedik, a potroh ellenben nő és elvékonyodik, a növekvés eleinte valószínűleg, később csak viszonylagos. A törzs lehet hosszabb, egyenlő vagy pedig rövidebb a potrohnál.

A potroh megnyúlásával áll kapcsolatban a potroh ízeinek egymáshoz mért hosszúsági és szélességi arányának megváltozása is.

A víz sótartalmának változása szerint más-más a fajsúlya, de más a belső surlódása (viscositás) is. Az ebben való moz-

gásra a lábak mindig megfelelően alakulnak ki. Hig oldatban gyakrabban csaphatnak, mint a nagy ellenállású tömény oldatokban. Az oldatok töménységével változik az oldott levegő oxygenjének kihasználhatósága, ennek megfelelően a kopoltyúk módosulnak.

Nevezetes a kormánykészülékül és részben úszószervül szolgáló villafüggeléknek a töménységgel szemben tanúsított viselkedése. Hig oldatokban jól fejlett, sűrűbben csenevész, majd töményben teljesen elenyészhet.

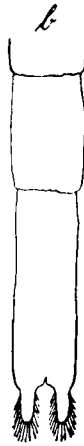
Végül a szaporodási módban jelentkezik különbség. A híg sós vizek állandóan eleveneket szülnek, a töményekben élők petéket raknak, a melyek természetes vízhíguláskor, eső- vagy talajvíz hozzájutáskor kelnek ki. A hígabb oldatban élők között a hímek gyakoriak, a közepesben ritkák, végül az egész töményoldatban tenyészőknél eddig még nem találták őket.

Hogy ezen változások mily értékűek, szükséges, hogy más sós vízi *Branchipus*-féléket ugyanilyen szempontból megvizsgáljunk. Ilyen *Branchipus*, bár kevés van, mégis meglehetősen erős bizonyíték arra, hogy a sóconcentratio növekedése ezeknél is részben ugyanazon alaki módosulatokat váltja ki, mint az Artemiákon. Így pl. a *Branchipodidae*-családba tartozó *Parartemia Zietziana* SAYCE, mely sós és félsós pocsolyákban tenyészik (Dél-Ausztráliában az Alexandrina-tó környékén), a következő bélyegeken egyezik meg ez Artemiákkal: a törzs (kétharmada az abdomennek) jóval rövidebb a potrohnál, továbbá szintén nyolczizú, mely izekből az utolsó két szelvényből nőtt össze. Ezen utolsó hosszú ízzel, épen úgy, mint némely Artemián, a villafüggelék mozdirhatatlanul összenöttek (2. ábra *b*). Hogy azonban az Artemiához egyébként semmi köze sincs, rögtön elárulja a hím fejének az alkata (2. ábra *a*). (V. ö. az 5. ábrával.).

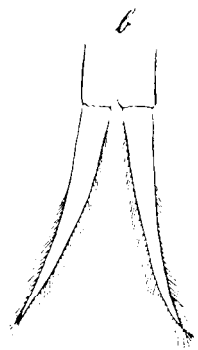
Másik érdekes sós vízi *Branchipus*-féle a *Branchinectella salina* (DAD.), mely Észak-Afrika sós vizeiben tenyészik. Azonos lehet ezzel az a faj, melyet SCHMANKEWITSCH (89—92) az Odessa körüli sós vizekből említ *Branchipus medius* néven. Ezen fajról SCHMANKEWITSCH azt hitte, hogy a *Branchinecta ferox* M. EDW.-nak (akkor még *Branchipus ferox* GRB. néven szerepelt) átmeneti alakja az Artemia-nembe (92. p. 106.). SCHMANKEWITSCH

szerint ugyanazon limánban híg állapotban a «*Branchipus spinosus*» él, ezt koncentrálódás után felváltja a «*Br. ferox*», melyet a sóoldatnak még inkább töményülésével a «*Br. medius*» vált fel, melylyel együtt az «*Artemia salina*» is megjelenik (3. ábra *a*, *b*, *c*).

SCHMANKEWITSCH észleletei szerint a «*Branchipus ferox*» édes, felsós és sós vizekben tenyésztő formáin olyan nagy különbségek vannak, hogy azokat faji bélyegül lehetne alkalmazni.



2. ábra. *Parartemia Zietziana* SAYCE. *a* a hím feje; *b* az utolsó potrohszervények lezeletlen villafüggelékkel; SAYCE rajzai. DADAY után.



3. ábra. Villafüggelékek. *a* *Artemia salina*; *b* *Branchinecta ferox*; *c* *Branchinectella salina*. DADAY után.

Így az 5° Beauménál tenyésztő alak már egészen más faj benyomását kelti a rendszerezőben s már a természetben is óriási a különbség, a sós vizek 17—22 mm, az édes vizek ellenben 29—34 mm, sőt ifj. ENTZ adatai szerint ez utóbbiak 70 mm-nyi hosszúságot is megüthetnek (50).

Ilyenféle különbségek a «*Branchipus spinosus*»-nál már 3—4° Beauménál is észlelhetők.

Változás észlelhető még a *Chirocephalus stagnalis* DADAY-nál is, ha félig sós vízben tenyészik, a mikor jól jellemezhető alak, a *Ch. stagnalis* var. *salinus* DAD. keletkezik belőle (44).

A *Branchipus*-félék legtöbbje azonban még a kissé sós vizet sem állja, erről részben kísérletileg győződtem meg. Így a *Branchipus stagnalis* L. és a *Streptocephalus torvicornis* WAGA az 1%-os konyhasóoldatot sem bírja el; annál meglepőbb, hogy az előbb felsoroltak, különösen a *Branchinectidae*-családba tartozók igen jól bírják, sőt abban alakmódosulást is szenvednek. Az *Artemia* is, mint DADAY beigazolta (43), ezen családba tartozik, melynek igen sok formája hígabb és töményebb sós és széksós vizeket lakik, az *Artemia* egyik olyan tagja, mely ezen alkalmazkodásban a legnagyobb szélsőséghez idomult. A minden valószínűség szerint ősi édesvízi *Branchinecta*-formából ma már típusos sós vizlakó lett, mely azonban adott alkalmakkor az édesvizszerűen kiédesült tenyészcsoportához, illetőleg az abban uralkodó tényezőkhez újra hozzásimul.

Mivel a sós víz koncentrációja szerint nemcsak az Artemiák, de más *Branchipus*-félék is variálnak s az egyes formakörök tulajdonképpen nem mennek át egymásba, azaz biológiailag és morfológiailag is izolált csoportok maradnak, a rajtuk jelentkező azonos módosulatok convergentionális jelenségek és minden esetben az azonos külső tényezők hatására vezethetők vissza. Azonban a szervezet alaphélyzegei állandóak, vagyis az *Artemia salina* édes vízben is *Artemia* marad s a *Branchinecta ferox* sós vízben sem lesz Artemiává. Azonban a rajtuk jelentkező azonos változások értékes adatot szolgáltatnak a szervezeteknek a környezettel való egyensúlyi helyzetért folytatott küzdelem, általában pedig a fajformálódás tényezőinek megismerésére.

Az *Artemia*-nem mai rendszertani helye, formái és ezek előfordulási helye.

Az *Artemia*-nem rendszertörténeti szereplésében már utaltam arra, hogy a sós vízi életmód s az azzal kapcsolatos alakmódosulatok révén a rendszerezők túlnyomó része szembe állította az *Artemia*-nemet, majd a családot a *Branchipus* nemmel, illetőleg a *Branchipodidae*-családdal. Már régebben is voltak, a kik az *Artemia*-nemnek a *Branchipus*-nemtől való elszakítását erőlte-

tettnek tartották s munkáikból kiolvasható, hogy a LINNÉ-féle «*Cancer stagnalis*»-on felépült Branchipoda-csoportból nem zárható ki a «*Cancer salinus*»-ra emelt Artemia-csoport sem.

FISCHER (1834), majd GRUBE (1853) a LEACH által 1819-ben felállított Artemia-nemet megszüntetendőnek vélte s annak formáit anatómiai bélyegeik alapján a *Branchipus*-nembe sorolja. Különösen GRUBE dolgozata óta mind világosabb lett a Branchiopodák egymáshoz való viszonya. Különösen ZENKER (116), SCHMANKEWITSCH (92), CLAUS (39—40), BRAUER (28—29), SIMON (98), GROCHOWSKY (60), ENTZ (48—49), SAMTER és HEYMONS (87), valamint ARTOM (8—13) végzett meggyőző érveken épült, döntő hatású vizsgálatokat. Az említett tudósok pontos, alapvető munkáiban kifejtett eredményeknek feldolgozásából, továbbá a föld legkülönbözőbb helyeiről gyűjtött Artemia-anyag átvizsgálásából legújabban DADAY (1910) (43) az összes *Phyllopus anostraca* alrend keretén belül — úgy látszik — végérvényesen az öt megillető helyre iktatta az Artemia-nemet.

DADAY a régi Artemiidae-családot, mely GRUBE rendszerének módosítása után ismét kísértet, alcsaládnak sorozta be s azt a *Branchinectinae*-alcsaláddal együtt egy új családba, *Branchinectidae* néven foglalja össze a hímek ölelőinek azonos szerkezete miatt. Így az Artemia-nem a *Phyllopus anostraca*, azaz héjatlan levéllábú rákok alrendjében a *Branchinectidae*-családban van ez idő szerint, a mely családon kívül még négy más család: *Branchipodidae*, *Chirocephalidae*, *Streptocephalidae* és *Polyartemiidae* tartoznak még ezen alrendbe. Ez a rendszertani kép most már megmagyarázza, hogy miért kaptak eltérő adatokat azok, a kik az Artemiákat az akkor még egységesnek vélt «*Branchipodidae*» más-más, sokszor az Artemiától igen távol eső formáival hasonlítottak össze.

DADAY a föld Artemia-anyagának áttanulmányozása közben arra a megállapodásra jutott, hogy az eddig igen nagy számban leírt Artemia-fajokat, melyeknek formái eddig részben az Artemia-, részben pedig a *Callaonella*-nemekbe tartoztak s mintegy 20 fajjal szerepeltek, egyetlen egy nembe, az Artemia-nembe foglalva, legfőljebb két faj tartható fenn, az Artemia salina L. és az Artemia Jelskii GRUBE-féle faj. Az utóbbi édes és felsós vízi

Artemia-faj, az előző ellenben igazi sós vízi forma. Az *Artemia salina*-fajt DADAY rendszertani hagyományok megtartásával a következő négy varietásra bontja: 1. *principalis*, 2. *arietina*, 3. *Milhausenii* és 4. *Köppeniana*. Kiemeli, hogy ezen varietások szakadatlan láncolatban vannak egymással s ennek a láncznak egyes morphologiailag jellemezhető formái voltak azok, melyek az eddigi nagyszámú fajt kiadták.

Szintén a történeti multhoz való kapcsolódás eredménye a két alnem is, melyre az Artemia-nemet szűkebb értelemben vett Artemia-alnemre és Callaonella-alnemre tagolja, ez utóbbiban a Callaonella Jelskii KULCZYCKI és a C. Dubowskii GROCHOWSKI-féle fajokat a GRUBE-féle Artemia Jelskii faj néven vonja össze.

A két alnem közti különbség, hogy az Artemia-alnemnél a potroh hosszabb a törzsnél, ellenben a Callaonella-alnemnél rövidebb a törzsnél. Hogy azonban a Callaonella-alnemet az ide tartozó egy fajjal továbbra is csak a história kedvéért tartathatjuk fenn, az kísérleti adataim tárgyalásakor nyer beigazolást.

DADAY ezen összevonási eljárásának teljes indokoltsága még inkább kitűnik, ha az Artemiák elterjedését s azok előfordulását tekintjük.

Artemia Jelskii: Callao (Peru), Vrana-tó (Cherso szig.) ♂ is.

A. salina v. principalis: Baskuntschak-tó (Astrachán) Claus-hawn (Grönland), Fontenebleau (Franciaia), Marocco, Mergen-Sor (Szibéria) ♂, Montpellier (Franciaia), New-Hawen (Észak-Amerika), San-José (Kalifornia) ♂, Tandja-el-Balia (Marocco) ♂, Temacin (Algeria), Torda, Vizakna, Weissowo (Orosz).

A. salina v. arietina: Adana (Syría), Ahmaruh (Egyiptom), Ain-el-Sira ♂, Aurean-tó (Ausztrália), Bedah (Egyiptom), Berre (Franciaia), Bouches-du-Rhône, Bukarest, Cagliari ♂, Cairo ♂, Capodistria, Cette (Franciaia), Chott-el-Ariana (Tunis), Damas (Kis-Ázsia), Dieuze (Franciaia), Djeroud (Egyiptom), Fezzan, Glenelg (Ausztrália), Great-Salt-Lake ♂, Greifswald (Német), Goumphidieh (Egyiptom), Hawayi-sziget, l'Herault (Franciaia), Kanmakschina (Akmolinszk), Karabugas (Orosz), Káspi-tó környéke, Kujalnik-tó (Orosz), Kurgaldschin, Lanarka (Cyprus), Libia, Little-Salt-Lake, Loire-Inferieure, Lorraine (Franciaia), Luneville (Franciaia), Lusace (Franciaia), Lymington (Anglia) ♂, Marignane

(Franciaia), Marseille, Menatici (Krim), Missouri (Algir), Mono-tó (Észak-Amerika), Montpellier, New-South-Wales, Nizza, Ochotski-tenger környéke, Odessa ♂, Palmira, Pirano ♂, Pouliguen (Franciaia) ♂, Redwood-City (Észak-Amerika), Sandhills (Ausztrália), Saskoje-tó (Krim), Sassyk-kul ♂, Sebkhet-el-Riana (Tunis), Szék, Torda, Villeneuve (Franciaia), Vizakna.

A. salina v. Milhausenii: Aitiban (Kirgizia), Cagliari ♂, Isetzki (Kirgizia), Kulat-Kul (Kirgizia), Menatiki (Krim), Mulla-Kara (Transkaspia) ♂, Provuslia (Kirgizia), Schimele-Kul (Kirgizia), Torda, Saki (Krim), Usbai-tó (Transkaspia, Urmi (Perzsia), Vizakna.

A. salina v. Köppeniana: Kujalnik-Limán, Odessa, Saki (Krimia).

Ezen lelőhelyek között sok van olyan, a melyről két *Artemia*-varietás került elő, kevesebb olyan, a melyről három varietás is ismeretes. Rendszeres gyűjtéssel mind gyakrabban válnak ismertté a hímek is, melyek előfordulását ♂ jellel tüntettem fel. Megjegyzem, hogy azon helyeken szaporodnak szüzen is az *Artemiák*, sőt egyes helyeken csak nagy ritkán jelenik meg 1—1 hím.

Érdekes képet nyújt az *Artemiáknak* a continenseken való megoszlása. Ez azonban még Európa és Ázsia kivételével csak szórványos adatokat nyújt, úgy hogy az alábbi összeállítás korántsem végleges.

| Az <i>Artemia</i> -nem előfordul | <i>Artemia</i> | | | | |
|-------------------------------------|----------------|-------------|----------|-------------|------------|
| | Jelskii | Principalis | Arietina | Milhausenii | Köppeniana |
| Ausztrália | — | — | + | — | — |
| Dél-Amerika | + | + | — | — | — |
| Észak-Amerika | — | + | + | — | — |
| Afrika | — | + | + | — | — |
| Ázsia | — | + | + | + | — |
| Európa | + | + | + | + | + |

Az előfordulási helyek és az elterjedési táblázat áttekintéséből látjuk, hogy az *Artemia*-nem az egész földön el van ter-

jedve s ezen elterjedésben a formák nem meghatározott területre szorítkoznak. Így az *Artemia Jelskii* Európa és Dél-Amerika területéről ismeretes. A «*Principalis*» Dél-Amerika, Észak-Amerika, Grönland, Ázsia, Afrika és Európa területén tenyészik. Az «*Arietina*» ismeretes legtöbb lelőhelyről és legnagyobb elterjedéssel is bír; nyilvánvaló magyarázata ennek az, hogy ez a forma közepes koncentrációjú sós vízben tenyészik, mint a milyen a legtöbb sós tó és általában a salinák. Európa, Ázsia, Afrika, Amerika, Ausztrália és Óceánia-szigetein egyaránt gyűjtötték. A «*Milhausenii*», valamint a «*Köppeniana*», melyek nagyon koncentrált sós tavakban tenésznek, Európa és Ázsia szomszédos területein fedeztettek fel.

Ha ezenfelül az azonos lelőhelyek *Artemia*-varietásait vizsgáljuk, azt találjuk, hogy több olyan lelőhelyen, melyen több varietás fordul elő, egymás mellett állanak, azaz szomszédos formák. Így Montpellier-ben a *principalis*- és *arietina*-forma, Cagliari-ben az *arietina* és *Milhausenii*, Sakin *Milhausenii* és *Köppeniana*, Tordán és Vizaknán a *principalis*-, *arietina*- és *Milhausenii*-formák fordulnak elő.

Ezen formáknak részben távoli continenseken való azonos előfordulása, viszont több szomszédos formának ugyanazon termőhelyen való tenyészése bizonyára a mellett szól, hogy ezek nem olyan «varietások», mint pl. a házi eb varietásai, melyek állandóknak tekinthetők, hanem, mint azt SCHMANKEWITSCH kifejtette — bár ő fajátmenetet vélt észlelni — a *concentratio-fok*nak megfelelő formák. A sós víz Grönlandon is épen olyan sós, mint Ausztráliában vagy a Haway-szigeteken, s benne azonos töménység mellett azonos formák tenészhetnek. Hisz ezen sós vizlakók bizonyos fokig még a klimabehatás alól is mentesítettek, mert a víz sóconcentrációja szerint rétegeződve, ez valószínűleg nem csupán az erdélyi sós tavak privilegiuma (VÍSKY 1908), hőhalmozó voltával mindenütt egyformán érvényesül.

Az *Artemiáknak* a föld kerekiségén való eloszlása még az ősccontinensek megoszlásakor megtörtént, s mint DADAY néhány szerencsés palæontologiai leletből, valamint a modern *Artemiáknak* más *Branchipus*-féléhez viszonyított alaktani bélyegeiből megállapította, ősi *Branchinectáknak* teljesen a sós vízhez való

alkalmazkodása által jöttek létre. Ez a folyamat megtörtént még az eocen előtt, mert az ezen korból a palæontologusok által említett *Branchipodites vectensis* Wood. már teljes Artemia-szervezet. DADAY ARLDT-tal együtt a *Branchipusites anthracinus* GOLDENBERG carbonkori megjelenéséből — mely egyébként szintén *Branchinecta* — szükségszerűen feltételezi, hogy a *Phyllopoda anostraca* ősalakja már a cambriumban a mai jellemző körökre bomlott. Így az Artemiák is az illető continenseken fennmaradt régi idők hirmondói. Annál különösebb, hogy ősidők óta fennálló izoláltságuk daczára az egymástól távol tenyésző helyeken is azonos formák lehettek, a melyek minden valószínűség szerint külbehatásokra egyöntetűen reagálnak.

Az Artemia-nembeli fajok variációja régi és új megvilágításban.

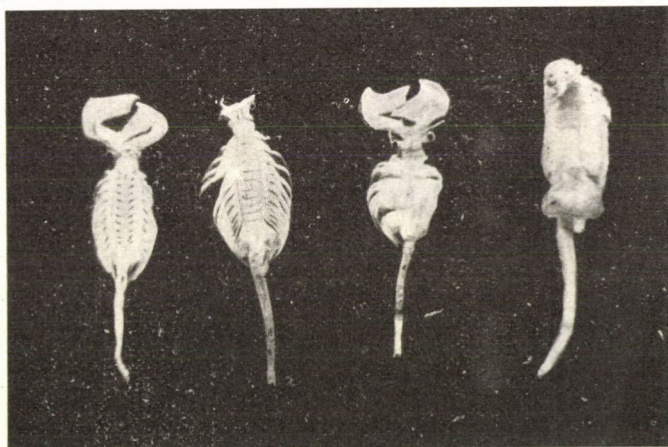
Az Artemiáknak a sós víz concentratiójának megfelelő formaváltozatait az újabb vizsgálatok nyomán más értékűeknek kell felfognunk, mint azt SCHMANKEWITSCH és az ő felfogását követők tették. A planktonologia kifejlődésével mind több olyan fajt kellett és kell bizonyos formakörökbe egyesíteni, a melyek eleddig önálló formákként szerepeltek. Saison-di- és polymorphismusok váltak ismertté, továbbá olyan formák láncolata, melyek hőmérsékváltozásra, illetőleg hőmérsékkel kapcsolatos víz-sűrűségre, esetleg vízfajsúly-változásra voltak visszavezethetők. Ezen varietásokat localis, temporalis és sűrűségi varietások néven ismerjük (WESENBERG-LUND 113).

De a *Branchipus*-félék között is akad ilyen értékű variálás, mint azt DADAY (45) a *Branchinecta* (*Branchipus*) *ferox* «hibernalis», «vernalis» és «aestivalis» alakjain észlelte, a melyeket különben Brandenburg környékén HARTWIG (64) is észlelt s azokat ő éhségi varietásoknak tartja.

A különösen erős variatio az Artemiákon BRAUER (28) szerint bizonyos szervek használata, illetőleg nem használata következtében jelentkezik. ENTZ (48) szerint az oldat tömörsége, illetőleg belső ellenállásának (viscositas) nagysága szabja meg az Artemia-alak kifejlődését. HÖBER (65) a sóoldatok osmotikus

tulajdonságaiban keresi az Artemiákat formáló erők alapját. STEUER (103) pedig ezen felfogások bizonyos fokú összeegyeztetése által véli megoldhatónak a variálás megmagyarázhatóságát. Egészen újszerű ARTOM (17) felfogása, ki az Artemia-varietások között először a szaporodási mód (10), majd pedig a chromosomák száma szerint vél rendet teremthetni. ARTOM az állandóan ♂ és ♀ formákkal szaporodó Artemiákat «*univalens*», a szűzen szaporodókat «*bivalens*» varietásoknak veszi (16).

ARTOM ezen varietásait termékenyített petékkel szaporodó cagliari-i és a szűzen szaporodó capodistria-i Artemiakon vég-



4. ábra. Két hím és két nőstény *Artemia salina* portorosei (Pirano) tenyészetből 4-szeres nagyítás.

zett tanulmánya alapján állította fel. Elfogadhatónak látszik addig, míg az illető helyről hímek nem kerülnek elő. Már pedig Capodistriára is alig maradhat fenn, mert a szomszédos Pirano portorosei salináiból származó tenyészetemben két hímeket az ivarérettségig sikerült felnevelnem. Hogy az Artemiák pathenogenetikus szaporodásmódja csak esetleges, nem pedig olyan állandó bélyeg, mely «varietás» felállításra jogosít, nemcsak az én portorosei hím Artemiáim igazolják (4. ábra), de igazolja ANIKIN (6) kísérlete is, a kinek szintén sikerült — mint ADELUNG kiemeli — mint elsőnek a biológusok sorában csakis parthenogenetikusan szaporodó Artemiák ivadékából «éhez-

tetés»-sel hímeket nevelni. Limingtont és Odesszát, a honnan alkal-
milag már kerültek elő hímek (BUTSCHINSKY (35), ARTOM maga is
problematicusnak tartja. Odesszáról pedig SCHMANKEWITSCH kiemeli,
hogy az ő megfigyelései idejében, tavasz folyamán gyakoriak voltak
a hímek. Én ezekhez Európából még Greifswaldot említem fel, a
honnan ZENKER (116) adatai szerint szintén ismereteseek hímek.

Különben hímek gondos kutatás után mind több helyről
kerülnek elő, legfőljebb a gyakoriságukban van óriási eltérés (lásd :
DADAY 43).

A szűz és termékenyített petés varietások aligha tarthatók
fenn. Egyelőre még vagy a SCHMANKEWITSCH-féle, SAMTER és
HEYMONS által is megtartott formákat, vagy pedig a Branchipus-
félékkel szoros kapcsolatban levő DADAY-féle fajokat és varietá-
sokat kell elfogadnunk.

Mindazonáltal tudnunk kell, hogy milyen értékűek egymás-
hoz viszonyítva ezen formák :

| SCHMANKEWITSCH 5 főformája ; | | | | DADAY fajai, illetőleg varietásai ; | | | |
|------------------------------|---------|-------------|---------|-------------------------------------|---------|----------|------------------|
| 1. | Artemia | salina | var. b | = 1. | Artemia | salina | var. principalis |
| 2. | " | " | " a | } | = 2. | " | " arietina |
| 3. | " | " | typica | | | " | " |
| 4. | " | Milhausenii | var. 1. | = 3. | " | " | " Milhausenii |
| 5. | " | " | " 2. | = 4. | " | " | " Köppeniana |
| | | | | 5. | " | Jelskii. | |

Az utolsónak SCHMANKEWITSCH-nél nincs megfelelő forma.

Az ENTZ (48) felosztása szerint a SCHMANKEWITSCH-féle 1.,
2. és 3. és DADAY-féle 1., 2. és 5. *Artemia salina* var. *furcata* s a
SCHMANKEWITSCH-féle 4. és 5., valamint a DADAY-féle 3. és 4.
az *Artemia salina* var. *biloba* csoportba tartozik.

ENTZ felosztásának igen nagy tájékoztató értéke van,
mert benne a híg sós vizek, szemben a tömör sós vizekkel,
külön-külön formakört alkotnak.

A tenyészoldatok különbözősége. Salinák. Sós tavak.

Natronlúgos tavak. Mesterséges sóoldatok.

Az *Artemiák* variációi nincsenek földrajzi helyhez, sem pedig
meghatározott összetételű sóoldathoz kötve. A föld kerekiségén

mindenütt előfordulnak s a sós vizek megválogatásával épen-séggel nem törődnek.

A föld különböző helyein levő salinák, melyek tengervíz-bepárolásra szolgálnak, még leginkább azonos összetételűek. Már változatosabbak a tengertől elszakadt limánok és az egészen önállóan kialakult sós tavak, melyek soraiban a lúgos-natron-tavak is be lehetnek népesítve.

Az a körülmény, hogy az Artemiák nemcsak a természetes sós tavak legnagyobb részében, de a mesterséges tenyészetek alkal-mával a legkülönfélébb sóoldatokban is tudnak tenyészni, arra enged következtetni, hogy ezen állatoknál, — anyagforgalmukhoz szükséges bizonyos sóktól eltekintve — ha ez a só rájuk nem direct plasmaméreg, akkor a tenyészközegükben oldott só minemősége rájuk nézve teljesen közömbös. Hanem igenis fontos az az állapot, mely a sóoldat töménysége szerint a folyadék fizikai tulajdonságát megszabja. Így az Artemiák alakváltozása visszavezethető az oldat fajsúlyára, belső surlódási viszonyaira, a többnyire réteg-zett sóoldatok magas hőfokának az anyagforgalmat siettető voltára, a sóoldatoknak csapadék vagy híg tengervíz hozzájutásakor hígul-ására s egész sereg részleteiben még ismeretlen tényezőre.

Hogy az Artemiák variálásánál nem a sóoldat összetétele a döntő, hanem a concentratio foka, rögtön kitűnik, ha néhány természetes tenyészhelyet a sóoldatok összetételét illetőleg össze-hasonlítunk. Előnyben részesítem ezen összehasonlításkor azo-kat, melyeken az Artemiák azonos formában tenyésznek (*Arte-mia salina* var. *arietina*).

Akna-tó sóösszetétele 1 l oldatban (VÍSKI 108).

| | |
|---|------------|
| <i>Na Cl</i> ... | 131·8590 |
| <i>Mg Cl₂</i> ... | 0·7220 |
| <i>Na₂ SO₄</i> ... | 0·4118 |
| <i>Ca SO₄</i> ... | 1·7784 |
| <i>Mg (HCO₃)₂</i> ... | 0·0584 |
| <i>Fe (HCO₃)₂</i> ... | 0·0089 |
| <i>Al (OH)₃</i> ... | 0·0068 |
| Hidrogénszilikát... | 0·0119 |
| összes só | 134·8572 g |

Tökölly-tó sóösszetétele 1 l oldatban (BRECKNER 30).

| | |
|--|------------------|
| <i>Na Cl</i> | 157·649 |
| <i>Mg Cl₂</i> | 23·334 |
| <i>Na₂ SO₄</i> | 10·352 |
| <i>Ca SO₄</i> | 3·144 |
| <i>Ca Cl₂</i> | 6·309 |
| <i>K Cl</i> | 1·969 |
| <i>Br, Fe, Al</i> | nyomokban |
| összes só | <u>203·007 g</u> |

Portorosei 31° Beaumés salina anyalúg 1 l oldatban (DAMIRI).

| | |
|--|------------------|
| <i>Mg Cl₂</i> | 165·268 |
| <i>Mg SO₄</i> | 72·634 |
| <i>Na₂ SO₄</i> | 12·365 |
| <i>Na Br</i> | 19·258 |
| <i>Na Cl</i> | 66·287 |
| <i>Ka Cl</i> | 23·590 |
| <i>Si O₂</i> | 0·557 |
| összes só | <u>359·959 g</u> |

Cagliari. 1 l anyaoldatban g-ban (ARTOM 7).

| Só | 25° B. fs. = 1201 | 30° B. fs. = 1264 | 35° B. fs. = 1320 |
|--------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <i>Ca SO₄</i> | 2·07 | — | — |
| <i>Mg SO₄</i> | 22·64 | 78·76 | 114·48 |
| <i>Mg Cl₂</i> | 29·55 | 101·60 | 195·31 |
| <i>K Cl</i> | 4·90 | 18·32 | 32·96 |
| <i>Na Br</i> | 5·23 | 14·72 | 20·39 |
| <i>Na Cl</i> | 268·90 | 218·80 | 159·79 |
| | <u>333·29</u> | <u>426·20</u> | <u>522·93</u> |

Az oldatok összetételének összevetéséből láthatjuk, hogy óriási különbségek vannak nemcsak a különböző helyek sós vizei, de még ugyanazon sós víz más-más fokú koncentrációja mellett. Még komplikáltabb a viszony, ha figyelembe vesszük, hogy sós tavaknál az oldat összetétele méterről-méterre változik, sőt a ter-

mészetes csapadékok időszakosan jelentkező hígító befolyását tekintve véve, a változékonyság még szembeötlőbb. Ezen változásoknak pedig döntő szerep jut annak a megítélésében, hogy a különböző variációk ugyanazon tenyészvízben, ugyanazon időben milyen módon fordulhatnak elő.

De nemcsak csapadékvíz hozzájárulására, hanem bepárolgás által is változik nemcsak a töménység, hanem a sóösszetétel is. Szembeötlő módon illusztrálja ezt ARTOM fenti táblázata, mely szerint a *Mg*-sók halmozódnak fel a *Na*-sókkal szemben.

Hogy az Artemiákat a sóösszetétel nem alterálja, már az előzőkből sejthetjük. De szembeötlő módon kísérletileg is lehet ezt igazolni. Különböző sóoldatokban és azok keverékében a peték kikelését már OSTROUMOFF (81) vizsgálat tárgyává tette. BRECKNER (30–31) pedig rendszeres kísérleteivel megállapította, hogy a *Na*, *Mg*, *Ca* chloridjai és sulfátjai nemcsak hogy nem mérgesek, sőt jelenlétük szükséges, legalább kis mennyiségben, az Artemiák fejlődéséhez. Csak a *K*-sókról állapította meg a mérgező hatást, de az sem nyilvánul a fenti sók jelenlete mellett.

Az én kísérleteim is igazolják BRECKNER észleleteit, ugyanis mesterséges tenyészeteimben a *Na Cl*-os anyatenyészeten kívül *Mg SO₄*-os és *Ca Cl₂*-os tenyészetekben tudtam is normálisan ivaréretten szaporodó tenyészeteket létesíteni. *K Cl*-os és *K₂ SO₄*-os tenyészeteim a peték kikelése után tönkrementek. Úgyisint nem sikerült ez ideig tartós tenyészetet létesítenem *Na₂ CO₃*-os oldatokban sem, a melyekben egyébként hetekig elélték. Ezen tenyészeteimet illetőleg megemlítem, hogy a BRECKNER által megállapított szükséges sókból minimalis mennyiséget (2–3%-ot) mindig oldottam a kísérletül szolgáló fősóoldatban. Előrebocsájtom, hogy az Artemia-formák kialakulása ezen *Mg* és *Ca*-os oldatokban is kb. olyan volt, mint a megfelelő töménységű, a kísérleteim gerinczéről alkalmazott *Na*-os oldatokban.

Arra vonatkozólag, hogy a tenyészőoldat sója milyen mértékben van jelen a benne tenyésző Artemiákban, ECKERT LÁSZLÓ chem. intézeti adjunctus úr volt szíves a megállapítást eszközölni. Hálás köszönetemet itt is nyilvánítom.

1080 fajsúlyú tengeri sóoldatban (ca. 10% *Na Cl*) tenyésző, teljesen kinőtt Artemiákat lepárolt vízzel, majd WINKLER eljárá-

sával teljesen vízmentesített (fém *Ca* reszelékről párolt) alkohollal a víztől leöblítettünk, s az alkohol gyors eltávolítása után súlyukat megállapítottuk (1 db súlya átlagban 14 mg). Majd az állatok elégetése után meghatároztuk a *Cl* tartalmat s abból a *Na Cl*-ra következtettünk. Háromszori kísérlet átlaga 0·8% konyhasó-tartalmat adott kb. annyit, mint a mennyi más ízeltlábú állat szövetnedveiben is kimutatható (TUNNER *II.6*).

Mindenesetre ez az adat is igazolja azt, hogy a külső oldat töménységétől a szervezet belső világa független. Így a szervezeteken nyilvánuló módosulatokat a sóoldatok okozta külső ingerfejlesztő hatására kell visszavezetnünk. Ugyanezen eredményt, egészen más úton haladva, ENTZ (48) szintén megállapította.

Kísérleti anyagom származása. Az Artemiákon eszközölt biológiai megfigyeléseim. Hímek.

A levéllábú rákok petéinek kikelési körülményeit fürkészve, arra az eredményre jutottam, hogy azok valamennyin egységes törvényszerűségekre vezethetők vissza akár beszárítással, akár sós vízzel való vízelvonással, akár pedig a víz sóconcentrációjának csökkentésével bírjuk azokat kifejlődésre (I. ABONYI 2., 3., 4).

Néhány édesvízi Phyllopodára vonatkoztak az említett vizsgálataim, a melyeken észlelt eredményeimet az Artemiák eleven szülésével véltem összhangzásba hozhatni. Ezen cél elérése végett Artemia-tenyészetekre volt szükségem, melyekből az elsőt 1910 december havában létesítettem.

Artemia-petékhez — félig beszáradt salina-iszapban — a Triest melletti portorosei (Pirano) fürdőigazgatóság szivességéből jutottam, mely szivességért ez úton is köszönetemet fejezem ki. Úgyisintén VISKI JENŐ úrnak tartozom köszönetem nyilvánításával, a ki az erdélyi sós tavak egyikéből, a tordai «Dörgő»-tóból volt szíves 1912 október 19.-én részemre petéket küldeni. VISKI úr, a ki éppen ezen sós tavak geophysikai tulajdonságait tanulmányozta, a tó felszínén úszó petéket szűrőpapírra gyűjtve és kiszárítva levélben juttatta hozzám. Ez utóbbi beszerzési mód egyszerűbb és éppen úgy megfelel a célnak, mint az iszappal

való küldés, de ebben az esetben a tenyészetek benépesítésekor külön alga-fauna fejlődését kell megvárni.

Megfigyeléseim és azoknak feldolgozása is legnagyobbreszt a portorosei anyagra vonatkoznak, a mennyiben a dörgőiből ez ideig még csak egy generatiót nevelhettem fel.

A portorosei anyagomat 1912 június havában ott a helyszínen a trieszti zoologiai állomás igazgatóságának pártolásával kiegészítettem. Artemiákat gyűjtöttem, melyeket élő tenyészetben elszállítva, kísérleti eredményeim összehasonlításakor ellenőrző tenyészetként használtam.

Az Artemia-peték kikelését illetőleg BRECKNER (30) tapasztalataira építettem. 3·5% tengersóoldattal felöntött folyadékban 2—4 napon belől kibujtak s 1910 decemberének végén már néhány (3—5) ivarérett példányom nőtt fel, melyek szüzen több ezernyi ivadékká szaporodtak el — ezek közt mindössze két hím volt —; azóta különböző concentrációjú sóoldatokban állanak folytonos megfigyelés alatt.

Miután meggyőződtem, hogy az Artemia-szűzpeték kikelése, illetőleg elevenszülésük ugyanazon tövényszerűségeen alapszik, mint a melyet a levéllábú rákok édesvízi formáin már megállapítottam (v. ö. ABONYI 4), a tenyészetek további szaporításával és különböző concentráción való tartásával a SCHMANKEWITSCH-féle kísérletek megismétlésére határoztam el magamat. Míg a kezdet nehézségein nem vergődtem át, nagyon nehezen ment az eltérő concentrációjú oldatok benépesítése. A tenyészoldatokat a régebben használt BEAUMÉ-féle fokok helyett az áttekinthetőbb, vízre vonatkoztatott fajsúlyjelzés szerint állítottam össze.

Töményebb sós vízbe való fokozatos átvitelkor kisebbek voltak a nehézségek, mint megfordítva. 1035—1110 töménység között már a tenyésztés hatodik hónapjában (18—30° C. mellett) annyira jól ment a szaporodás, hogy kezdettem bízni a további sikerekben. Sőt június első napjaiban az 1045-ös tenyészetben eddig szokatlan formájú egyéneket észleltem, melyek néhány vedlés után — két példány teljesen kinőtt — himnek bizonyultak. A szögletes, kb. 12 l ürtartalmú tenyésztő üvegedényben több napon át figyeltem őket. Könnyen rájuk lehetett ismerni hatalmas ölelő szervükről, legtöbbsnyire azonban arról, hogy az el-

fogott nőtényekkel hosszasan copulatióban maradtak, azokkal 4—5 percenként termékenyítési aktust végeztek, majd több órai együtt uszkálás után más-más nőtényt fogtak el.

A him Artemiáknak a petékre gyakorolt termékenyítés által előidézett változását megfigyelendő, izoláltam őket 1—1 nőtény-nyel. Azonban sem a peteburok vastagságában, sem a peték kikelésében, illetőleg a nőtények eleven szülésében nem észleltem különbséget, ezeknél is épen úgy kikeltek még az anya petetáskájában, mint az azonos töménységű sós vízben tenyésző szűz testvéreiknél.

1911 június 11-én mindkét himen elaggási tünetek jelentkeztek, vörös színük elhalványult, renyhén csapdostak kopoltyús lábaikkal, 12-én az egyik már nem élt s a másik is alig mozgorgott. Mindkettőt formalinban, majd alkoholban konzerváltam legutolsó nőtényeikkel együtt (4. ábra).

A hímek megjelenése meglepett annál is inkább, mert ezek az első példányok, melyek Capodistria környéki salinákból ismeretesek. Annál meglepőbb a dolog, mert ARTOM (10) szerint ott nincsenek, de nem is lehetnek hímek, mert az ott tenyésző az Artemia salina himnélküli varietása.

ARTOM felfogása most már itt nem állhat továbbra fenn, s valószínűleg más helyek szűz Artemiáira sem, mert mint már fentebb kifejtettem, lassanként alig lesz hely, a honnan him ne kerüljön elő. ARTOM histológiai alapokra épített két formája, az univalens és bivalens, valószínűségében nincs okom kételkedni, de «varietás» értékük koránt sem olyan horderejű, hogy tovább lehetne építeni rá.

A him példányaim különben a Cagliariból leirtaktól semmi-ben sem térnek el, a miről az ARTOM által közreadott s az én egyik Artemia-hímem fejének összehasonlításából meggyőződhetünk (5. ábra).

Állandóan, helyesebben tartósan szűzen szaporodó Artemiáktól különben már ANIKIN (6) is nevelt hímeket, a melyek megjelenését ő táplálékhiányra vezeti vissza. Én, mivel az említett két himnél több az én tenyészeteimben ezideig — tudtommal — azóta sem nőtt fel, határozott álláspontot nem foglалhatok. Ez idő szerint megjelenésüket nem tudom okadatolni,

talán visszavezethető lesz — más analógiák alapján — a magasabb hőmérséken való tenyésztés gyors menetüvé változására.

Artemia-tenyészeteim az édes víztől a kristályos töménységig.

A tenyészoldatok további higitásával, majd más részének töményítése által 1911 nyarán már 1012 és 1142 fajsúlyú oldatok között voltak állandó tenyészeteim. Ekkor már észlelhettem a különböző koncentrációjú sóoldatok egymástól eltérő hatását az Artemiák viselkedésére, a peterakást, illetőleg eleven szülést illetőleg is.



5. ábra. Hím *Artemia salina* fejek. *a* Cagliariból, *Artom* phot. után.
b Portorosei tenyészetből, saját phot., kb. 15-szeres nagyítás.

Az Artemiák a híg sós vizekben minden irányban akadály nélkül fürgén uszkáltak, ellenben a töményebb oldatokban bizonyos megkötöttség jelentkezett, a mozgásuk nehézkes, kopoltyús lábaik csapdosása ritkább s minduntalan a sűrű oldat emelő hatása ellen kellett működniök. A legtöményebb oldatokban pedig állandóan fejjel lefelé fordulva, mintegy a nehéz oldat felhajtó erejével néztek szembe, mely a nem iparkodókat rögtön a felszínre hajtotta. Ez az örökös fejtetön való állás megkezdődik már a lárvállapotban. A naupliusok abdominalis része tartalmazza a nagy, zsírcseppekben gazdag embrionalis sejteket, melyek ezen egész testájnak, az elülső részhez viszonyítva, kisebb fajsúlyt biztosítanak.

Nyilvánvaló, hogy ezen fajsúlydifferentia okozta közvetlen hatás is módosítólag hat a fejlődő Artemiára, épen úgy, mint a híg oldatban való szabad bolyongás. Sűrű folyadékban az abdomen, villafüggelékével egyetemben, használaton kívül helyezett testtáj és felesleges szerv, ellenben híg oldatokban kormánykészülék és úszószerv, akárcsak az édesvizi Branchipus-féléknél. Ugyanazon következtetésre jut a szemlélő, mint a melyet ENTZ (48) az erdélyi sós tavak Artemiáiról ezen tekintetből megállapított, nevezetesen, hogy a farkfüggelék kormánykészülék, mely az igénybevételnek megfelelően fejlődik ki.

Úgyszintén észleltem, a mire már SCHMANKEWITSCH figyelemztette a zoologusokat, hogy hígabb sós vízben az Artemiák nagyobbak, ellenben töményebben kisebb termetűek.

További tapasztalatom volt az, hogy az Artemiák hígabb oldatokban — 1050 alatt — petét sohasem raktak, hanem kivétel nélkül eleveneket szültek; ellenben ezen töménység felett, a concentratio növekedésével fokozatosan mindinkább nagyobb lett a peterakók száma. A peték ezen sűrű oldatokban a felszínre emelkedve óriási számban felszaporodtak, kicsiben azt a képet adták, mely az erdélyi tömény sós tavaknál ősszel szokott beállani (VISKI 108). Kevés édes víz óvatos hozzáöntésére, a mikor a felső rétegben a sós víz erősen felhígult, rengeteg számú pete kikelt, melyek hosszú időre ismét népessé tették az aquariumot. A szabad természetben is bizonyára az időnként jelentkező eső- vagy talajvízzel való felhígulás, salináknál pedig a friss tengervíz által előidézett felhígulás kelti ki a petéket osmosisos jelenségek felidézésével, mint a mit OSTROUMOFF (81) és BRECKNER (30) az Artemia-pete kialakulásánál megállapítottak s mint a mit én valamennyi Phyllopodapete-kikelését illetőleg kísérletileg beigazoltam (ABONYI 4).

Már SCHMANKEWITSCH-nek feltűnt, hogy a csekélyebb só-tartalmú vízben más az Artemiák fejtörzs- és potroharánya, mint a tömény sós vizekben (I. tábla). Elfogadott rendszertani elv volt, hogy az Artemiák fejtörzs- és potroh hosszúságát összemérve, az «*Artemia*-fajok»-nál a potroh hosszabb az elülső testtájnál, ellenben a «*Callaonella*-fajok»-nál, melyek édes vagy félsós vizekben tenyésznek, a fejtörzs hosszabb a potrohnál.

Igen meglepődtem, mikor a leghigabb sóoldatban (1012) tenyésztő Artemiák testaránya olyanféleképen változott meg, mint az a *Callaonella*-alnemre jellemző, vagyis a potroh rövidebbé vált, mint a fej és törzs együttes hosszúsága.

Ez az észlelet arra ösztökölt, hogy az arányokat további vízhibitással teljesen a *Callaonella*-alnemre megállapított értékre szorítsam le. Ez azonban eddig nem sikerült, mert az Artemiáim 1010-en alól már nem adnak állandó tenyészetet. Megélnek 1005, sőt ennek óvatos higitásával olyan kis sótartalmú vízben, hogy az édes víznek tekinthető, a mint csakugyan sikerült ilyen nagyon hig oldatban egy időben *Branchipus stagnalist*, *Strep-tocephalus torvicornist* és Artemiákat több napon át életben tartanom.

Az ilyen hig oldatba csak a közvetlen felső töménységű oldatból lehet Artemiákat áttelepíteni, mert a közepes vagy tömény oldatból áttelepítettek igen rövid idő alatt elpusztulnak. Bizonyára azért, mert — mint HÖBER (65) feltételezi — a só-oldattal való osmotikus egyensúly olyan magasra van beállítva, hogy hig oldattal többé nem egyenlítődhetik ki. Lassú, fokozatos higitással, több hónapon át 5—6 generáción keresztül vittem le Artemiáimat a leghigabb oldatokba, melyekből szintén ilyen óvatosan véghezvitt, fokozatos eljárással lehet őket vissza felvinni a legeconcentráltabb oldatokba. Ez utóbbi mégis könnyebben valósítható meg, mert egyenletes bepárolgással zökkenés nélkül lehet új töménységű oldatokhoz, ezzel együtt új Artemia-formákhoz jutni.

Azonban minden esetben észleltem azt a makacs ellenállást, melyet az egyszer alkalmazkodott szervezet, ha már differenciálódott, a változott körülmények között még az utódaiban is iparkodott megőrizni. Hogy a külső tényezők mégis győzedelmeskednek a conservatív szervezeten, azt a mellékelt három eredeti photographia s mellé állítva a GROCHOWSKI-féle *Callaonella*-rajz, szembeszökően illusztrálja (V. tábla, 1—4. r.)

A sóconcentrációnak megfelelő forma. A villafüggelékek módosulása. Termet-arányváltozás.

A tenyészeteknek már felületes megtekintése meggyőzött a felől, hogy a legconcentráltabb és leghígabb tenyészetek Artemiái között szín és nagyságbeli, villafüggelék-, módosulási és testaránybeli különbségek vannak. Azonban a szomszédos koncentrációjú tenyészetek között oly minimális volt a különbség, hogy csak az egész sor folytonossága révén lehetett következtetni arra, hogy ezeknél is van olyan irányú szervezeti módosulás, mint a milyen a két szélsőséget képviselő formánál kirívóan szembeszökik.

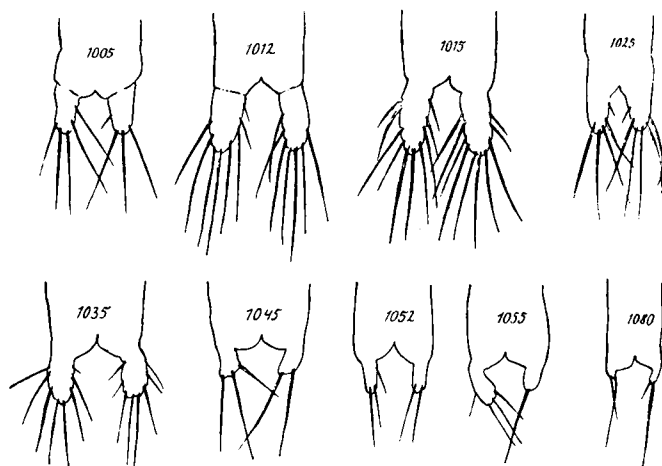
Legelső sorban a villafüggelékeket vizsgáltam meg. Ezek azok, melyek kialakulása szerint az Artemiákat fajokra, illetőleg varietásokra osztották. Előre becsájtom azt, hogy a portoroei, változó koncentrációjú salinákban tenyésző Artemiák az irodalomban *Artemia arietina* FISCHER, illetőleg *Artemia salina* (L.) var. *arietina* (FISCH.) DADAY megjelöléssel szerepelnek. Kinőve 12—14 mm hosszúságúak, szűzen szaporodnak, villasertéik száma leggyakrabban 4—4, 4—3, 3—3, 3—2, csak ritkán és a fejletlen formákon kevesebb a számuk. Ha kevés a serték száma 2—2, 1—2, akkor a villanyulványok ujszerűek, ha több a számuk, akkor lemezszerűen kiszélesedettek.

A laboratoriumi állandó koncentráción tartott oldatokban a serteszámvariáció megszűnt, vagy minimumra redukálódott. Úgy hogy a tartós tenyészeteken alig találtam eltérést, ha teljesen kinőtt példányokat vizsgáltam. Azonban az eltérő töménységű oldatokban más-más számú sertével különböző formájú villafüggelékeket észleltem, melyek nemcsak az anyatenyészetiekéitől, de egymástól is lényegesen eltértek (6. ábra).

A leghígabb, 1003, 1005 és 1010 oldatoktól eltekintek, melyekben az Artemiák normális szaporodása nem állott fenn, tehát a folytonos tenyésztés sem volt lehetséges, bizonyos elcsenevedései jelenségek közepette még ivaréret előtt tönkre mentek. Ezek viselték életük végéig azon bélyegeket, melyeket az anyatenyésztetből magukkal hoztak. Ellenben az állandó tenyészeteknél a concentratio és a serteszám között bizonyos összefüggés látszott fennállani, mint a milyet ENTZ (98) az erdélyi sós

tavakban, ARTOM (8) pedig a Cagliariiban tenyésztő Artemiákon szintén észlelt, nevezetesen, hogy hig sós vízben sok, tömény sós vízben ellenben kevés a serték száma.

Az állandó tenyészet 1012-nél lassanként egészen jól ment s még inkább azon tenyészetnél, melynek koncentrációját 1015-re emeltem. Ezen oldatokban a villafüggelék lemezszerűvé fejlődtek, nagyszámú villaserte fejlődött rajtuk, részben vagy egészben leizelődtek, a mi nyilván azért vált szükségessé, mert az abdomen gyors elhajlása és csapásai folytán a hig vízben az



6. ábra. Különböző töménységű oldatokban tenyésztő Artemiák villafüggelék-sertézete. A beírt számok a tenéyszoldat fajsúlyát jelzik. Nagyítás ca. 40×.

Artemiák, épen úgy, mint az édes vízi Branchipus-félék, ezáltal iramlásszerűen is tudnak úszni; ezen igénybe vétellel áll kapcsolatban, hogy a leizelődő villafüggelék izomzatot nyer a szomszédos helyektől. Az eredeti «arietina»-formának ezen hig oldatokban «principalis»-varietásra jellemző villafüggeléke fejlődött. Ugyanolyan, mint a milyen az édes vízi Branchipusoknak, valamint az édes és felsós vízi *Artemia Jelskii*-nek is van.

Az 1025—1035 fajsúlyú oldatnál még igen nagy a serték száma, de a villafüggelék leizelődése még kivételesen sem fordul elő. Az Artemiák már nehezebben úsznak, potrohukkal csapó mozgást csak igen ritkán végeznek, villafüggelékük lemezalakú,

sok sertével, melyek közül a középsők mintegy a többi rovására kezdenek megnyúlni. Ez a forma már «arietina» varietas, de még közel áll a «principalis»-hoz.

Az oldat töménységével ezután már gyorsan fogy a serték száma. Ennek megfelelően a lemezszerű villafüggelékek kezdenek ujjszerűvé válni. 1045-től 1050—1055-ön át fokozatosan az 1080-hoz vezet az út, úgy hogy ezen oldatok legtöményebbikében, 1080-ban már 2—2 a serték száma, melyek közül az egyik sokszor satnya, s az őket hordozó villafüggelék is egészen el van csenevészede.

Ezen oldattól felfelé még jobban satnyul az ujjszerű kinövés, azon csak egy-egy árszerű serte emelkedik. A rendszeren egy másik formája, az *Artemia salina* var. *Milhausenii* van előttünk.

Az 1142-nél már nagy számban vannak olyan példányok is, melyek a normálisan 1—1 tüskét viselőktől abban térnek el, hogy vagy az egyik, vagy a másik a villafüggelék csonkjával együtt már ki sem fejlődik. Akadnak olyanok is, melyeknek sem villafüggelék-csonkjuk, sem sertéjük nincs, ez új forma ismét, a villafüggeléknélküli *Artemia salina* var. *Köppeniana*. Egy-ugyanazon tenyészet utódaiból régi, egész sereg fajnak és ma is varietásnak tartott formáira jellemző kialakulást nyertem.

A concentratio révén ugyanilyen módon változnak meg a SCHMANKEWITSCH és ARTOM által is részletesen vizsgált kopolyú-lemezek is. Megváltozik a termet is, melynek arányos változásaival még részletesebben fogunk foglalkozni. SCHMANKEWITSCH-nek tehát igaza volt, de a lényegét felcserélte a külszínnel. Nem az *Artemia* változott át más fajjára, hanem a faj formáját kényszeríti környezete más megfelelő alak felvételére. Polymorphismusnak tekinthető ez, a mikor egyik-másik bélyeg ismert vagy ismeretlen okok alapján következetesen megváltozva fejlődik ki.

Variációsor s ebben a neotenia szerepe.

A villafüggelék és az azon levő serték számának variálását illetőleg már az első összehasonlító vizsgálatkor megállapítottam, hogy bizonyos egységes irányban való variatio áll előttem,

mely a víz töménységével bizonyos állandó összefüggést mutat. Hogy nem a só chemiai összetétele — az eddigiekben túlnyomóan $Na\ Cl$ — a reactiót kiváltó tényező, hanem az oldat sűrűsége, azt $Mg\ SO_4$ és $Ca\ Cl_2$ sóoldatokkal nyert adataimból hamarosan megállapíthattam. Valószínűleg úgy az isotonia, mint az isoviscositas és az azonos fajsúly játszik közre az azonos eredmények létrehozásában. Erről még részletesebben meg kell emlékezni, itt csak a concentratio fokának fejlődést gátló voltára akarok rámutatni (BRAUER 28).

Ezen variációsor, teljes egészében azonos hőmérsékleten azonos helyről, sőt azonos szülőknél különböző concentrációjú sóoldatokban tenyésztett utódainak olyan formasorából áll, a melynek egyénei a fejlődés menetében fokozatosan fellépő bélyegekké válnak ki.

Ha a híg sós víztől felfelé a *principalis*, *arietina*, *Milhausenii* és *Köppeniana* varietásokat mint formacsoportokat megtartjuk, akkor a villafüggelék differenciálódása és serteszámaszaporodása szerint megfordítva a *Köppeniana* formától kell kiindulnunk, hogy a sorfejlődés egységességét megérthessük.

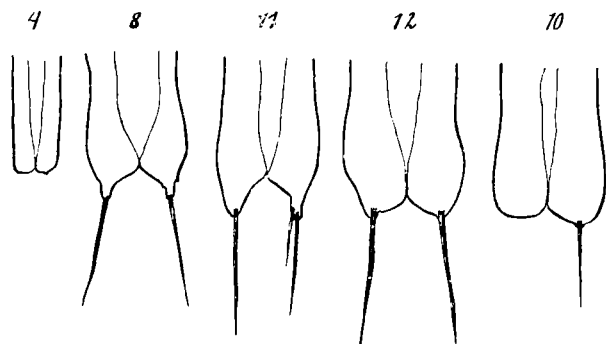
Ha az egyes formák tenyésztéseit az abdomen végének, illetve a villafüggelékeknek kialakulása szempontjából végig vizsgáljuk, azonnal rájövünk, hogy a *Köppeniana* tenyészetben fiatal és fejlett egyéneken egyaránt, a naupliusoktól felfelé egyetlen fejlődési formának sincs villafüggeléke, valamennyi lekerekített potrohvégű.

A *Milhausenii* tenyészetben (7. ábra) a nauplius és a postnaupliusok is lekerekített abdomenvéggel tűnnek ki, sőt a félig kinőtt formák között is vannak még sertenélküliek. Majd egy-egy serte nő ki, melyek az ivarérett egyéneken árszerűvé fejlődnek s egy-egy kiemelkedő halmocskán, a villafüggelék kezdeményének tartható részen ülnek. Van tehát fiatalkori vagy lárvakori *Köppeniana*-forma s azt az egyéni fejlődés folyamán felváltja a *Milhausenii* végleges forma ujszerű fulcrával s azon egy-egy árszerű sertével.

Az *arietina*-formánál (8. ábra) fiatalkorú *Köppeniana*, közepeskorú *Milhausenii* és teljesen ivarérett *arietina*-formákat találunk, melyeken már lemezszerűen kiszélesedett villafüggelék

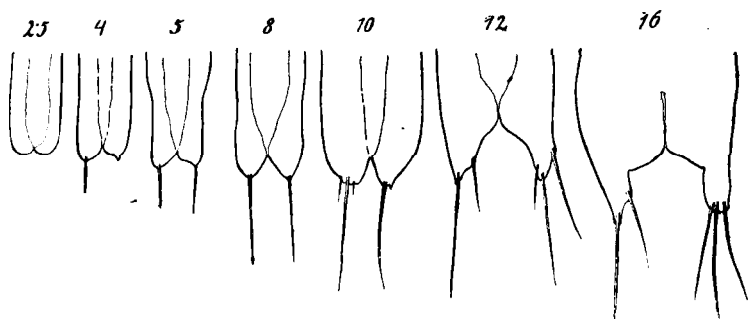
van, a szélén számos sertével megrakva. Ezen villafüggelék a potroh utolsó szelvényéről nincs leizelődve.

A *principalis*-formánál egyéni fejlődése folyamán sorjában ismétlődnek az előző formák. A nauplius és postnauplius le-



7. ábra. A villafüggelék fejlődése 1142 fs. oldatban. A számok a rajzolt Artemiák hosszát jelzik mm-ekben. N. 40×.

kerekített potrohvéggel *Köppeniana*-typus. A következő fejlődési formánál a potroh végén egy-egy serte nő ki, melyet kúpszerűen felemelkedő primitív villafüggelék visel; a *Milhausenii* fejlődési forma ez, melynek fősertéje mellett oldalvást mellékserték sar-

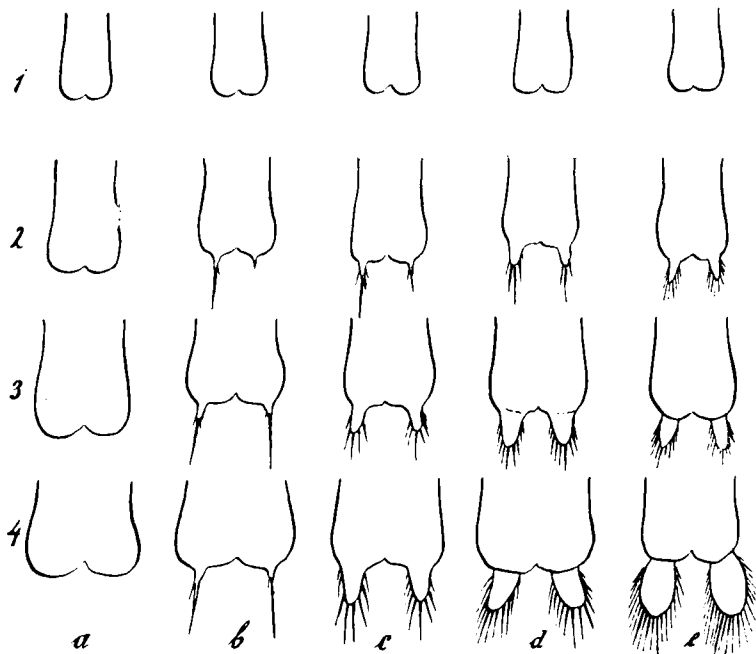


8. ábra. A villafüggelék kialakulása. A számok az állat hosszát mm-ben jelzik. Fejlődésment 1045 fs. *MgSO₄* oldatban. N. 40×.

jadzanak ki; ezeknek nagy számban való kifejlődése által lemez-szerűen kifesztített lesz a villafüggelék s ekkor az *arietina*-forma áll előttünk. A nagy felületi növekvés által a villafüggelék az abdomen utolsó szelvényéből izomelemeket hoz magával, melyek

a villafüggelék mint kormánykészülék mozgatható, ezen izomműködés állandó volta kiváltja a villafüggelék leizelődését. Előttünk áll a *principalis*-alak, a mely typus az édes és felsős vízi *Artemia Jelskii*-re is jellemző.

A villafüggelék fejlődését tekintve s erre építve az egyéni fejlődés folyamából következtethető formadifferenciálódást, joga-



9. ábra. Az *Artemia*-nem formáinak potrohvég-kialakulása (Vázlatos rajz). 1. a nauplius, 2. a fejlődés első, 3. a fejlődés második, 4. az ivarérettség szakán. *a* sor: forma Köppeniana. *b* sor: forma Milhausenii. *c* sor: forma arietina. *d* sor: principalis. *e* sor: forma Jelskii.

san feltételezhetjük, hogy az *Artemia salina* törzsalakja a *principalis*-forma, mely a *Branchipus*-félékkel villafüggelékét tekintve is megegyezik, míg az *arietina*-, *Milhausenii*- és *Köppeniana*-formák a sós víz töményebb oldatainak esetről-esetre megfelelő módosulatai, melyek mindannyian a fejlődés különböző értékű szakaszain állapodtak meg és ivaréretté váltak; így az egyes formák különböző fokon lévő neotenianak tekinthetők (9. ábra).

A variációk állandóinak görbével való ábrázolása.

A különböző töménységű sós vizekben tenyésző *Artemia*-formáknak pontos összehasonlítása céljából már SCHMANKEWITSCH (92), majd SAMTER és HEYMONS (87), valamint ARTOM (8) is rendszeres vizsgálat tárgyává tette a villafüggelékek fejlettségét, abszolút és relatív nagyságát, a kopoltyúk formáját s a test arányait. Különösen ez utóbbira akarok részletesen utalni, mint a mely fajmegkülönböztető bélyegként is szerepel. A fentebb említett vizsgálok adatain kívül ez utóbbi arány megállapítására még DADAY «Phyllopoda anostraca» cz. monographiájában találtam értékes méreteket, melyek az én adataim értékeinek ellenőrzésekor segítségemre voltak.

Az előző észleletek adatai alapján a formaváltozás értékének megítélésében a variációirány megállapítására a villafüggelékek fejlettségi fokát használtam fel. Mégis a variációk lényegének megítélésére legjobban nem ezt, hanem a test és potroh hosszúsági viszonyváltozásainak sajátosságait tartom. Ezért ezt tüzetesebben dolgoztam ki, melylyel különben is, mint majd látni fogjuk, a többi bélyeg függvényszerűen kapcsolódik. Ezen bélyegek, melyek az egyes formákra jellemzők, valóban az alapalak megváltozásából következnek s így csak másodlagos értékeknek tekinthetők.

Azon tapasztalatra építve, hogy az Artemiák megölt állapotban — bármily elővigyázattal járunk is el — arányaikat elpusztulásukkor megváltoztatják, a tenyészőoldat koncentrációja szerint egyszer duzzadtá, máskor meg zsugorodottá válnak, viszont az élő állapotban való mérésnek meg igen sok nehézsége van: nem maradt más hátra, mint élő állatok pillanatphotographiáin eszközölni a méréseket. Üvegküvetában, nagyon lapos óraüveggel összetartva az Artemiákat, azonos nagytáv (2-szeres) mellett ívlámpával átvilágítva $\frac{1}{100}$ mp expozícióval eszközöltem a felvételeket. A lapos óraüveg az Artemiák együtt tartásán kívül még azt a célt is szolgálta, hogy a kép síkjából való kifordulásukat megakadályozza s így teljes hosszukban lesznek ábrázolva.

A fényképek összehasonlítása, illetőleg sorozatba összeállí-

tása már első pillanatra szemléltette a hig sós víztől a töményekig való fokozatos átmenetet (IV. tábla). Az átmenetet mutató mérték megállapítása céljából méréseket eszközöltem, még pedig úgy, hogy a törzs és a potroh között a petezacskó elülső szélét mint határvonalat tekintettem (V. tábla, 4. r.). Ezen vonaltól előre eső rész mint a fejtörzstáj mérete, a mögötte következő pedig mint potrohméret szerepel.

A méretek változásainak szemléltethetése végett $5\times$ nagytásban (a valóságnak $10\times$ nagyítása) 10—10 egyén méretét a sóconcentratio megjelölésével külön-külön vonalra vittem fel s hogy az áttekintést egységesítsem, a törzspotroh határvonalat 0-val jelöltem (VI. tábla). Első tekintetre szembeötlik, hogy a test elülső és hátulsó részére vonatkozó méretsor bizonyos tendencia szerint egyenletesen változik. A tenyészési optimumot, mely különben a photographiákon látható pompás fejlettségű Artemiákról is leolvasható, a méretsor szerint az 1050 körüli fajsúlyú folyadék mutatja; úgy a higabb, mint a töményebb oldatok felé fokozatos méretbeli csökkenés észlelhető, de míg az elülső részre vonatkozó érték kifejezője mindkét irányban egyenletesen esik, addig a potrohra vonatkozó értékek a hig sóoldatok felé rohamosan esnek, a töményebb oldatok felé pedig eleintén még növekedést, és csak később mutatnak csökkenést. Jobban kitűnik ez a változás, ha közepes értékeket számítunk s azokat vetjük össze.

Rendkívül szembeötlővé tehetjük az észlelt alakváltozásokat az által, hogy a lemért értékekből az elülső részre vonatkozót 100-zal teszszük egyenlővé s ugyanazon arányban a potroh érték-számát is növeljük. Akkor kiderül, a mi különben figyelmes szemlélettel a vonalsorból is kiolvasható, hogy a növekvő concentrationnak megfelelően szintén növekvő arányszámokat kapunk, vagyis a nagyobb concentrationnak minden esetben nagyobb arányszám felel meg. Míg az 1025 fs. körül olyan Artemiák tenyésznek, melyeknek az arányszáma 100:100, vagyis a törzs egyenlő a potrohhallal, addig a legconcentráltabb oldatban 1142-nél 100:170 az arányszám, vagyis a törzsnél a potroh kb. $1\frac{3}{4}$ -szer hosszabb (l. V. tábla, 4. r.).

A konyhasós oldatokra a következő jellemző számokat kaptam.

| | | | | | | | |
|---------|----------|------------------------|-----------|-----------|------------------------|-----------|-----------|
| Fajsúly | 1018 | 1025 | 1035 | 1050 | 1070 | 1091 | 1142 |
| I. | 100 : 91 | 100 : 104 | 100 : 120 | 100 : 144 | 100 : 156 | 100 : 164 | 100 : 170 |
| II. | | 100 : 100 ¹ | | | 100 : 154 ² | | |

Ez a sor azonban így nem mutat olyan képet, melyből a változás minőségére lehetne következtetni. Nem látszik ki belőle, hogy ugrásszerű vagy pedig szabályosan folytonos a változás? Nem látszik pedig azért, mert az egyes oldatok concentratioja nem folytonos, sem pedig nem egyenletesen lépcsőzetes, így a rendelkezésemre álló adatokból másféle módon kellett megállapítanom, a mennyire lehetséges, hogy milyen értékűek egymáshoz való vonatkozásban az arányszám által kifejezett változások. Azt, hogy folytonosan és egyenletesen eső, illetőleg emelkedő értékű változásokat fogok kapni, abból gyanítottam, hogy az egymáshoz közel eső tenyészetek adott számaiban kivételszerű ugrás seholsem mutatkozik.

Bár eleintén ugrásszerű változás sem lepett volna meg, mert ARTOM (8) egyik dolgozatában ugrásszerű variálást tételez fel, az igaz, hogy természetből gyűjtött példányok alapján. Ezen ugrásszerűnek látszó variálás okát, minthogy az én adataimmal semmiképen sem egyeztethető össze, csak úgy vélem megmagyarázhatónak, ha a szabadban levő sós víz időszakos concentratio-változása elkerüli figyelmünket. A szabad természet sós vize, mire az *Artemia* néha 2—3 hónapra terjedő életét befejezi, alaposan megváltozhat. A kifejlődött *Artemia* pedig már nem szenved alakmódosulást, így előfordul az, a mit BEHNING (22) is észlelt, hogy kristályos töménységű, beszáradás előtt álló sós pocsolyákban «principalis» formákat gyűjtött. A természetben szomszédos formáknak egyazon időben való előfordulása szintén csak a gyors concentratio-változásból érthető meg.

Én az állandóan azonos töménységű laboratoriumi tenyészetekben mindig azonos formájú *Artemiákat* észleltem. Látszólagos ugrást csak a nagy távolságban levő adatok mutatnak, de ugrás ellen szól a serték számának egyenletes változása is, a

¹ Félig ivarérettek.

² Portorosei élő példányok.

mely a farokvillának fejlett vagy csenevész voltával fokozatosan van összekapcsolva.

Hogy az oldataimból nyert eredményeket egységes összehasonlítás tárgyává tehessem, megtartottam a 100-hoz viszonyított arányszámokat, az oldatok koncentrációját jelölő fajsúlyszámokat pedig egyenes vonalra felvive egymás mellett úgy helyeztem el, hogy azok a valóságnak megfelelő viszonyt tüntessék fel (VII. tábla). Az egységnyi közökre beosztott vízszintesre felvittem kezdőpontul az édes vizet — durva megközelítéssel —, 1000 fs. számmal jelölve, melytől jobbra egységenként 1010, 1020, 1030 s így tovább növekvő fajsúlyértékeket raktam fel. Az én tenyészeteimnek megfelelő pontokon merőlegeseket állítottam, melyekre a 100-tól való eltéréseket, mint pozitív értékeket felfelé, a kisebbeket pedig mint negatív értékeket lefelé fektettem rá.

A 100-nál kisebb, illetőleg nagyobb értékekre azért helyezek súlyt, mert az *Artemia*-nemnél eddig főjellemző bélyegként szerepelt az a kitétel, hogy a potroh hosszabb a törzsnél, ellenben a *Callaonella*-nem alaphélyege, hogy a potroh rövidebb a törzsnél (V. tábla, 1—4. r.). Ha megtartjuk a *Callaonella* nevet, mint típusét, az *Artemia*- és a *Callaonella*-típus közötti határ arra a pontra esik, a mikor a törzs és potroh egyforma hosszúságú, így az én számsoromon 100:100-hoz.

Ha coordinata-rendszert állítunk fel, úgy hogy a 100-hoz viszonyított arányszámokat egyformán 100-zal kisebbítjük, a mi annyit tesz, hogy az abscissa-egyenest 100 egységgel feljebb húzom meg, akkor az *Artemia* és *Callaonella* közti határszám összeesik az abscissával, vagyis értékéül 0 adódik ki. Azok az értékek, melyek nevezőiben 100-nál kisebb szám volt, 100-tól való különbségük a 0 vonaltól lefelé, a melyek nevezőiben 100-nál nagyobb szám volt, 100 feletti száma a 0 vonaltól felfelé vive, a megfelelő fajsúlyponton emelt egyenessel, ordinátákat alkotnak; a metszésipontokat összekötve sajátos görbét kapok, melyre sorban felillenek az eddigi *Artemia*-fajok, illetőleg variációk (VII. tábla).

Megjegyzendőnek tartom, hogy az *Artemia Jelskii*-t, GROCHOWSKY adatait felhasználva, úgy illesztettem be, mintha 1000

fs., azaz dest. vízben élne, pedig olyan édes vízben él, melyben minimális sótartalom okvetlenül van. Ebben az esetben a görbe a kezdő függélyest sohasem metszi, illetőleg, mivel az Artemiáknak sincs végtelen alkalmazkodóképességük, a görbe megszűnik valahol az 1000 és az 1010 között körülbelül a 40-es magasságban.

De a görbe köppenianás vége is megszűnik, még pedig akkora töménységnél, melynél a sok vízből való kikristályosodásával létfeltételük megszűnik.

Az így alkotott görbén a jelenlegi összes *Artemia*-formák rendben elhelyezhetők, a formák szomszédosai és ha tetszik, határalakjai is megállapíthatók. A lényeg nem változik, ha a görbén elhelyezett DADAY-féle nevek helyett a SCHMANKEWITSCH-féléket írjuk fel. Csakhogy akkor a *Jelskii*, *principalis*, *arietina* *Milhausenii* és *Köppeniana* nevek helyett a *Jelkii*-től kezdve var. b), var. a), *typica*, *Milhausenii* var. 1. és var. 2. jönne. Úgyisintén az ENTZ által megállapított két *Artemia* főcsoportot is joggal fenntarthatjuk, mert mindkét csoport egységes s a görbe egyik-egyik oldalára eső formákat fogja össze. Így a *Jelskii*, *principalis*, valamint az *arietina*-alak, mint higabb oldatokban élő Artemiák, összefoglalhatók a «*furcata*»-typusba, ellenben az *arietina* tömörebb sóoldatokban élő formái, valamint a *Milhausenii*- és *Köppeniana*-formák a «*biloba*» néven szerepelhetnek. A görbén való ábrázolhatásból következik az, hogy az egyes formakörök csak nagy általánosságban jelölhetők meg, mert az egymásba való átmenet szakadatlan. Ezzel függ össze az is, hogy az egyes formakörökön belül, mint a milyeneket DADAY is megállapított, ismét u. n. belső variációk észlelhetők.

A Na Cl-os variatiós görbe sajátosságai s *Artemia*-formáinak jelölésmódja.

A megelőzőleg tárgyalt *Artemia*-variációsor görbéje Na Cl-os, illetőleg olyan oldatokra vonatkozik, melyekben túlnyomó részben Na Cl volt oldva (tengeri- vagy salina-só). Ezt azért emelem ki, mert a már említett *Ca Cl₂* és *Mg SO₄* tenyészetek adataiból is lehet ilyenféle görbét szerkeszteni, melyeknek viszonylagos értékeivel alább még fogunk foglalkozni.

Az *Artemia*-nemnek ilyen tág határokon át való variálása minden esetben az oldat tulajdonságaival való egyensúlyi helyzetbe való beállást jelenti. Minden *Artemia*-formát leghelyesebb volna úgy jelölni, hogy a jelölésben az oldat-concentratio-foka is kifejezést nyerjen, a mit vagy a törzspotroh-arányszámmal, vagy pedig egyszerűen a megfelelő fajsúlyszámmal fejezhethetnénk ki. Így az édes és felsós vízi *Artemia Jelskii* jelölés helyett *Artemia* $\frac{100}{60}$, ill. *Artemia* 1000—1010, a *principalis* helyett pl. az én tenyészeteimnél *Artemia* 1018 (Na Cl), *Artemia* 1025 (Na Cl), ill. *Artemia* $\frac{100}{100}$, az *arietinaé* *Artemia* 1035—1050 (Na Cl), ill. *Artemia* $\frac{100}{120}$ — $\frac{100}{144}$, s így tovább. Vagy a Ca Cl_2 -os tenyészeteimnél *Artemia* 1020 (Ca Cl_2) és 1040 (Ca Cl_2), a keserősös tenyészetnél pedig *Artemia* 1045 (Mg SO_4) és 1125 (Mg SO_4), ill. *Artemia* $\frac{100}{140}$ és $\frac{100}{168}$ jellel lenne ellátható.

A görbét illetőleg minden esetben tudjuk, hogy a koordinata-rendszerben melyik helyet foglalja el a kérdéses forma. akár az arányszámát, akár pedig a tenyészközeg concentratióját ismerjük. Már előre megmondhatjuk ezen görbe alapján, hogy olyan NaCl -os tenyészetben, melynek töménysége 1080, a benne fejlődő Artemiák törzspotroh-arányszámát a görbe ordinátájának mely metszőpontja adja. De fogunk tudni mást is, nevezetesen azt, hogy a kopoltyúi, a villafüggeléke, továbbá szokásai stb. azon formáival egyeznek meg, melyet a például felvett esetben «*Milhausenii*-varietas» néven ismer a rendszertan.

Viszont megállapíthatjuk azt, hogy ha a szabadban nagyon concentrált sós vízben pl. *principalis* formát gyűjtünk, hogy azok még akkor fejlődtek ki, mikor a víz még nem volt ennyire bepárologva, hanem teszem fel csapadék vagy áradás az oldatot részben vagy egészben tartósan felhigitva tartotta. A BEHNING (22) által említett eset is ide tartozik, a mikor, mint emliti, tavaszi csapadék által elárasztott sós terület vize nyár végén kis mélyedésekbe gyors párolgás következtében összefolyt, a melyben még erős concentrációja daczára a híg oldatban kifejezett *Artemia s. principalis* formái hemzsegték.

Az ARTOX (8) dolgozatában ábrázolt graphiconok erős zegzúgos volta is nyilván annak az eredménye, hogy a szabadban gyűjtött állatoknál csak a gyűjtés idejében észlelt concentratiót

vette tekintetbe. Egyébként, hogy milyen körülményes lenne a nem laboratoriumi eredményeknek hasonló szempontból való egyöntetű elbírálása, elgondolhatjuk abból, hogy a természetben levő sós tavak és salinák töménysége nemcsak napról-napra, de még rétegről-rétegre is változik. Hogy az Artemiák nem maradnak meg azonos rétegekben, az is bizonyos, hiszen ezek az állatok erősen phototropok (STEUER 104, BUJOR 34), még pedig egyszer positiv, máskor meg negativ értelemben, épen úgy, mint más *Branchipus*-félék (ABONYI 1). A petékből, a naupliusok, ha épen nem eleven szülők az Artemiák, a híg felületen kelnek ki, s az eleintén positiv, majd negativ heliotrop lárvák lefelé vándorolnak (LOEB 76), még pedig annyira, a meddig a fajsúlykülönbségük és erőکشletük megengedi. Mire kifejlődnek, már is megváltozott a környezet. Mégis az, hogy bizonyos átlag van, azt bizonyítja, hogy a szervezet bizonyos közepes felé törekszik az egyéni fejlődés folyamán, melyet generációkon keresztül iparkodik megtartani.

A görbe igénybevételével a szabadban gyűjtött Artemiák felől is nyerhetünk a fentiek figyelembe vételével útbaigazítást, nevezetesen megállapíthatjuk az észlelt formából és arányszámból azt a közepet, melynek hatása révén a kérdéses forma kifejlődhetett.

Állandó és változtatott töménységű közömbös sóoldatok kísérleti adatai a *Na Cl*-os görbére vonatkoztatva.

Már OSTROUMOFF (81) és BRECKNER (30) adatai alapján tudtam, hogy az Artemiák petéi *Na Cl*-os oldaton kívül más sóoldatokban is kikelhetnek, s ezek némelyikében a naupliusok kezdenek tovább is fejlődni. Így reméltem, hogy egyik-másik közömbös sóoldatban ivarérettségig is felnevelhetek Artemiákat, a mikor azokat a *Na Cl*-os tenyészeitemben élőkkal összehasonlíthatom.

Na Cl-on kívül $Na_2 SO_4$, *K Cl*, $K_2 SO_4$, $Mg Cl_2$, $Mg SO_4$ és $Ca Cl_2$ oldatait vettem kísérleti közegül. Valamennyi oldathoz kb. 1% tengeri sót tettem, hogy esetleges másféle sóhiány ne gátolja a fejlődést. Úgyszintén a benépesítéssel 4—5 napig

vártam, a mikorra a már előzőleg kismennyiségű iszappal átvitt algák és protozoák kellőképpen felszaporodtak. A fent említett oldatokból kifogástalan tenyészeteket csak a $Ca Cl_2$ és $Mg SO_4$ -es oldatokkal sikerült létesítenem (VIII. tábla). Különösen tartós tenyészeim vannak $Mg SO_4$ oldataiban, melyeknek adatai ez idő szerint még csak részben állanak rendelkezésemre.

Különösen érdekelt, hogy az ezen sóoldatokban tenyésztő Artemiák azonos értékű arányszámokat adnak-e, mint a megfelelő koncentrációjú $Na Cl$ -os oldatok.

Összehasonlítás alapjául a már tárgyalt $Na Cl$ -os görbét használtam fel. A megfelelő ordinátát és abszcissát megszerkesztve, az 1040 $Ca Cl_2$ -os, az 1045 $Mg SO_4$ -os és az 1125 $Mg SO_4$ -os oldatok tenyészei csaknem bele, vagy pedig igen közel estek a $Na Cl$ -os görbe megfelelő koncentrációt kifejező helyéhez, mutatván azt, hogy ezen oldatokban is azonos tényezők hatnak az Artemiák alakformálódásakor, mint a $Na Cl$ -os törzsoldatokban (IX. tábla).

Megjegyzendőnek tartom azonban azt, hogy valószínűleg nemcsak a fajsúly maga, hanem a molekula-concentratio és a folyadék belső surlódása (viscositas) is szerepet visz. Ezeknek az alakformálódásra való külön-külön hatásának megállapítását ez idő szerint még nem tartom indokoltnak, jóllehet az a meggyőződés, hogy az észlelt különbségek az itt említettek figyelmen kívül hagyására vezethetők vissza.

Annak kipuhatolására, hogy koncentrációváltozásra az említett oldatok a $Na Cl$ változtatott koncentrációjú oldataihoz hasonlóan viselkednek-e, úgy jártam el, hogy megfigyeltem, hogy a töményített, ill. $Na Cl$ -os oldatban az előző concentratio állapotához képest milyen gyorsan vált észlelhetővé a változás. Apró szervezet-aránybeli eltérések, mint már SCHMANKEWITSCH (92, 96) észlelte, már néhány napon belől kimutathatók; ezek a már kifejtett individuumokon kiváltott minimális reakciók alig jöhetnek értékelésre, ha az egymásutáni generációk formaváltozásaival vetjük össze őket. Az 1050-ről két hónap lefolyása alatt 1110-re bepárolgott oldatban 100:144-ről 100:147-re emelkedett a törzspotroh arányszáma. Ugyanezen idő alatt 1025-ről 1015-re hígítottban 100:104-ről 100:96-ra esett (VII. tábla).

Ugyanilyen irányú változást észleltem a $Ca\ Cl_2$ -os és $Mg\ SO_4$ -os hígított, ill. töményített oldatok tenyészein is. Szintén két hónap lefolyása alatt az 1040 $Ca\ Cl_2$ -ből 1020-ra hígított tenyészetnél 100:130-ról 100:117-re esett. Viszont az 1045 $Mg\ SO_4$ -nek 1125-re történt concentratio-emelésekor 100:140 helyett 100:168 adódott ki.

Ezekből következtethetem azt, hogy valószínűleg nemcsak egyes sóknak a túlnyomó volta, de egyenletes vagy egyenlőtlen részekben való kevertsége esetén is azonos eredmény adódnék ki.

Az *Artemia*-nem valódi értékéről.

SCHLOSSER (88) salina rákocskája lassanként egész sereg fajjá szaporodott. A múlt század végén az *Artemia*-nem 20-nál több fajjal szerepelt, a mely fajokat DADAY (43) gondos vizsgálat után két fajba összevonta, *Artemia Jelskii* és *Artemia salina* néven s az utóbbi fajt négy varietásra tagolta.

Kísérleteimből látszik, hogy ezen faj összevonás teljesen indokolt volt. Már az, hogy egyugyanazon tenyészhelyről származó *Artemia*-formák között a varietásoknak valamennyi, vagy legalább is nagyobb része megvan, mint az már a természetes lelőhelyek egy részén is észleltetett (lásd az elterjedésre vonatkozó részt), szintén a formák szoros összetartozása mellett szól.

Abból, hogy tenyészeim révén sikerült megállapítanom az *Artemia*-nem folytonos formasorát, az következik, hogy az előző *Artemia*-formák, akár «faj», akár «varietas», ilyen néven csak úgy tarthatók fenn, ha jelen esetben a varietás és faj fogalmát nem biológiai, hanem csupán rendszertani tekintetből szemléljük. Az én vizsgálataim ellenére a rendszertan művelőinek tökéletesen igazuk van. Az *Artemia*-nemnek jól jellemezhető állandó formái vannak a természetben, mert pl. az időszakonkénti csapadékkal erősebben vagy gyengébben megbolygatott sós tavak, vagy pedig az örökös változó concentratiójú salinák concentratio-változásában mégis van bizonyos szabályosság, miáltal bizonyos hatásösszegeződés áll fenn, a mely valamely közepes értéket vált ki. Az *Artemia*-generációk ezen közepesnek megfelelően

fejlődnek ki, úgy hogy bizonyos sós tó vagy salina a gyűjtő systematicusnak mindig azonos formákat nyújt. Vagyis e helyre az illető *Artemia*-forma tartós viszonyok mellett állandónak tekinthető. Az meg épen nem látszik, hogy más körülmények között más alak lett volna, a miért is ezen esetben, de más hasonlóknban is, egészen természetesnek találom a rendszertan azon hibáját, melylyel az Artemiákat óriási fajszámmal szerepeltette. Igaza volt BATESON-nak — STEUER után idézem —, a mikor azt állította, hogy annyi *Artemia* rassz van, mint a hány a lelőhelye. De ennek nem az *Artemia* az oka, hanem az, hogy viszont az összes lelőhelyek között nincsen kettő, mely egymással teljesen megegyezne.

Az Artemiák ezen óriási alakváltozatsorában az előbb tárgyalt görbével a legnagyobb könnyűséggel tájékozódhatunk. Az *Artemia*-nem egységes rendszertani alakkör, melynek formái esetről-esetre a környezethez való beigazodás eredményei.

Az alak kifejesztésében két tényező szerepel: az egyik az öröklés, mely megtartja mindazt, a mit adott körülmények között megtarthat, a másik a környezet, mely egész sereg ingerével a megfelelő forma felvételére kényszeríti a szervezetet. Az előző generatio, megváltozott környezet esetében, a következő generatióban csak egy lépést tesz, majd ismét tovább, míg végül a 4—5 generatióban, a mi kb. félév, már állandóan azonos forma van előttünk.

A kifejlett Artemiára közvetlenül nem hat a tenyészcoldat megváltozása, a már kifejlett megtartja alaphélyegeit. Bár SCHMANKEWITSCH (96) rendkívül pontos vizsgálataiban kimutatta, hogy a kopoltyúk méretei s a test arányai már néhány napon belől mérhetően megváltoznak. Ez bizonyára az osmosisos erők hatására vezetendő vissza (HÖBER 65, DU BOIS RAYMOND 25), az igazi, lényegbe vágó változás, mondjuk: az oldathoz simulás, több generation át megy végbe.

A tömény és híg sós vízi életmód is, összehasonlítva, számtalan érdekességben nyilvánul. Ezekről részben már a formafejlődésnél meg emlékeztem. Itt még csak azt említem fel, hogy a híg sós vízi Artemiák nemcsak morphologiai tekintetből állanak közelebb az édes vízi *Branchipus*-félékhez, értem a test-

arányokat, valamint a villafüggelékek fejlett és szintén leizelt voltát, hanem abban is, hogy az Artemiák híg sós vízben édes vízi *Branchipus*-félék szokásaival élnek. Nevezetesen háton úszva (v. ö. ABONYI 1—3) keresztül-kasul kalandoznak tenyészvizükben, a mit a tömény sós vízben alig, vagy éppen nem tehetnek meg, mert a nagy fajsúlyú sós víz felhajtó ereje ellen kell küzdeniök. Továbbá a híg sós vízben az Artemiák ugyanolyan módon csapdosnak (dorsoventralisan), mint a Branchipusok és ennek következtében éppen olyan függén meg-megiramodnak, mint édes vízi fajrokonai. Az ilyenféle közös úszást a tömény sós vízben tenyészők még csak meg sem kísérik, de haszontalan is volna, mert alig van, vagy éppen nincsen farokvillájuk, a mely pedig a híg sós vizeken az említett iramló úszáskor eredményessé teszi a potrohcsapdosást. Minél higabb és minél melegebb a sóoldat, a létfeltételek keretén belől, annál eredményesebb — a folyadék csekély belső surlódása révén — a Branchipusokra jellemző iramló úszás. Ezen úszásmódnál a potroh izomzata működik, mely működés rövid, vaskos potrohot eredményez, a mely szintén közös bélyege az édes vízi Branchipusoknak és a híg sós vízi Artemiáknak. Ezen berendezés, illetőleg az ez által gyakorolható úszásmód szintén szerepel az édes és híg sós vízi Artemiák alakbélyegeinek a fejlesztésében és állandósításában.

Érthető okokból tömény sós vízben ezek ellenkezője történik, minek következtében más forma fejlődése, biológiai szempontból, egészen természetes.

Az alakmódosulás tehát nemcsak közvetlen környezeti behatásra vezethető vissza, hanem az illető szervezet a környezet előnyeinek biológiai értelemben vett kihasználásával maga is hozzájárul ehhez.

Ezzel áll összefüggésben, hogy hímeket is eddig csak híg és közepes só-concentrációjú vízben tenyésző Artemiákon észleltek (*Jelskii*, *principalis*, *arietina*, *Milhausenii*), ellenben a teljesen tömény sós vízben tenyészők között (*Köppeniana*) hímek ez ideig nem kerültek elő.

A fentiek alapján az *Artemia*-nemet olyan alakkörnek tekinthetjük, mely nincs systematikai értelemben vett «faj»-okra

differentiálódva: egységes variatio-sor, melynek minden egyes kiragadott tagja a környező behatásokkal teljes egyensúlyi helyzetet biztosított magának.

Következtetés az eredmények összegezéséből.

Az Artemia-nem variálásának, helyesebben variatio-sorának kialakulásában leginkább szembeötlő az ugrásnélküli folytonosság. Ennek a ténynek vizsgálata biológiai szempontból rendkívül érdekes és nyilvánulásaiban meglepő összefüggést árul el más ilyenféle, de ezideig egységes okokra vissza nem vezetett variatio-sorokkal.

A szervezeteken csak nagyon kevés esetben tudjuk a környezet, vagy tartózkodási elem befolyása és a szervezetben keltett reactio-fok összefüggését, illetőleg annak nyilvánulását más szervezetekhez viszonyítva kifejezni. Adataink vannak, melyekből már eddig is tudtuk, hogy külső tényezők hatására a szervezet sajátos megváltozással felel. Lepkéknél pl. hő- vagy nedvesség-aberratio név alatt szereplő formáknál ismerjük a változást kiváltó okot (STANDFUSS, LINDEN). Nagyon sok állatnál legfőljebb sejtéseink vannak. Egész formasorokat tudunk összeállítani (sokalakú lepkék, szarvasbogár-sor stb.), melyeknél az egyirányú változásmenetet észleljük, de annak megfelelő alapokra való visszavezetését meg sem kísérelhetjük.

Az állatok polymorphismusa, temporalis, localis, sivatagi, sarkkörü és alpesi, valamint az ú. n. angora változatai minden valószínűség szerint folytonosságban állanak az azonos formák normális viszonyok között élő alakjaival.

Kétségtelen előtttem, hogy a szervezetekre a környezet behatásai nagyságukkal arányosan hatnak, azonban legtöbbször külsőleg nem is jelentkezik változás, vagy pedig mi csak akkor vagyunk rá tekintettel, ha az alak megszokott formájából már kéri.

Abból, hogy az Artemiáknál bizonyos, eddig faji vagy legalább is rendszertani értelemben vett varietási bélyegek folytonossága az adott esetben graphiconon rögzíthető, ha úgy tesszük matematikai formulákba önthető, azt merem következtetni,

hogy más állatsoportnál, sőt egész rendszertani kategoriáknál megállapítható lesz, a környezeti behatás analizálhatása esetén, a formák szakadatlan, esetleg hézagosan, de mind a mellett egy-éges irányban reagálásának kimutatása.

Befejezés.

Az *Artemia salinán* eszközölt vizsgálati eredményeim összevetéséből számos mellékesen felmerülő gondolattal is kell foglalkoznom. Ezek között kiemelkedik a fajformálódás nagy kérdése. Jelen esetben a közvetlen környezeti hatás formáló ereje szembeötlően nyilatkozik, a melylyel szemben a fajfejlődés conservatismusa csak csekély mértékű ellenállást fejt ki. Mindenestre világosabbá tesz sok olyan fajformálódási módot, melyeknél variatio-sorok egyes tagjainak kihullását már anatómiai alap-okokból kiindulva is fel kell tételeznünk. Az én példámmal élve, ha az *Artemia Jelskii* és az *Artemia salina principalis*, *arietina* stb. formái között megszakadna az átmenet az által, hogy bizonyos állandó concentrációk létesülnének, melyekhez egyik-másik forma létfeltételeinél fogva megváltoztathatatlanul hozzá volna kötve, akkor azokat teljes joggal külön rendszertani formáknak tekinthetnők.

A rendszertanban számos állatsoport oly alapon van tárgyalva, hogy azoknak rendszertani bélyegei, épen úgy, mint régen az Artemiáké, sziklaszilárd basisnak látszanak, valójában pedig csak azt igazolják, hogy a mai rendszertan művelésénél igen sokszor olyan bélyegek alapján választjuk szét a «faj»-okat és «varietas»-okat, melyek inkább szoros kapcsolásra volnának alkalmasak.

Szeretve tisztelt mesteremnek, ENTZ GÉZA dr. m. kir. udv. tanácsos, egyet. ny. r. tanár úrnak, munkám iránt tanúsított érdeklődéséért és mindenkoron nyújtott szíves útbaigazításaiért hálás köszönetemet ez úton is kifejezem. Köszönettel tartozom még deési DADAY JENŐ dr., műegyetemi ny. r. tanár úrnak szakszerű közléseiért, továbbá azért, hogy intézeti és magán szakkönyvtárának páratlanul gazdag «Separata» gyűjteményét használnom megengedte.

Irodalomjegyzék.

1. ABONYI SÁNDOR: Az *Apus*-ok és *Branchipus*-ok phototropismusáról. — Állattani közl. 9. köt. p. 107—124. 1910.
2. ABONYI SÁNDOR: A *Branchipus*-peték kikelése sós vízzel való kezelésre. — Állattani közl. 9. köt. p. 163—168. 1910.
3. ABONYI SÁNDOR: A leveleslábú rákok életmódja és a *Limnadia lenticularis* magyarországi előfordulása. — Állattani közlem. 9. köt. p. 88—95. 1910.
4. ABONYI SÁNDOR: A levéllábú rákok petéinek kikeléséről. — Állattani közlem. 10. köt. 1911.
5. ABONYI SÁNDOR: WESENBERG-LUND plankton-elmélete. — Állattani közlem. 10. köt. 1911.
6. ANIKIN W. P.: Einige biologische Betrachtungen über Crustaceen der Gattung *Artemia* (oroszul: Mitth. Kais. Univ. Tomsk. T. 14.). Auszug von Adelung: Zool. Centralblatt 6. Jhg. p. 756—760. 1898.
7. ARTOM C.: Osservazioni generali sull' *Artemia salina* LEACH delle Saline di Cagliari. — Zool. Anz. Bd. 29. 1905.
8. ARTOM C.: La variazione dell' *Artemia salina* (LINN.) di Cagliari sotto l'influsso della salsadina. — Mem. R. Accad. Sc. Torino (2). T. 57. p. 221—254. 1 Tav. 1905—1906.
9. ARTOM C.: Ricerche sperimentali sul modo di riprodursi dell' *Artemia salina* LIN. di Cagliari — Biol. Centralbl. Bd. 26. p. 26—32. 1906.
10. ARTOM C.: Osservazioni e raffranto tra le artemie sessuata e le artemie partenogenetiche. — Biologica. Vol. 1. p. 1—4. 1906.
11. ARTOM C.: Il numero dei cromosomi e la maturazione dell' uovo dell' *Artemia partenogenetica* di Capodistria e dell' *Artemia sessuata* di Cagliari. — Biologica. Vol. 1. 1906.
12. ARTOM C.: Note critiche alle osservazione del LOEB sull' *Artemia salina*. — Biol. Centralbl. Bd. 26. p. 204—208. 1906.
13. ARTOM C.: Ricerche sperimentali sulla variazione dell' *Artemia salina* LIN. di Cagliari. — Biologica Vol. 1. p. 247—267. 1907.
14. ARTOM C.: La maturazione, la fecondazione e i primi stadii di sviluppo dell' uovo dell' *Artemia salina* LIN. Cagliari. — Biologica. Vol. 1. p. 495—515. 2 Tav. 1907.
15. ARTOM C.: La sistematica del genere *Artemia* in relatione col numero dei cromosomi delle cellule sessuali e in relazione col numero e colla grandezza delle cellule somatiche. — Biol. Centralbl. Bd. 31. 1911.
16. ARTOM C.: Analisi comparativa della sostanza cromatica nelle mitosi di maturazione e nelle prime mitosi di segmentazione dell' uovo dell' *Artemia sessuata* di Cagliari (univalens) e dell' uovo dell' *Artemia parthenogenetica* di Capodistria (bivalens), con 3 tavola. — Archiv f. Zellforschung. 7. Bd. 1911.

17. ARTOM C.: Le basi citologi che di una nuova sistematica del genere *Artemia*. — Archiv. f. Zellforsch. 9. Bd. 1912.
18. AUDOUIN: Examen des Crustacés rapportés de la saline de Marignane. — Ann. d. Sc. nat. zool. (2) T. 6. p. 230. 1836.
19. BAIRD W.: The natural history of the British Entomostraca. — London, 1850.
20. BAIRD W.: Monograph of the Family *Branchipodidae*, a Family. of Crustaceans belonging to the Division Entomostraca etc. — Proc. Zool. Soc. of London. Part 20. 1852.
21. BATESON W.: Material for the Study of Variation. — London, 1894
22. BEHNING A.: *Artemia salina* aus dem Astrachanischen Gouvernement in Russland. — Zool. Anz. Bd. 39. 1912.
23. BEHNING A.: Studien über die vergleichende Morphologie sowie über temporale und Lokalvariation der Phyllopoden-Extremitäten. — Internat. Revue d. Ges. Hydrobiol. u. Hydrogr. Biol. Suppl. 1912.
24. BORCEA J.: Note sur les Crustacés phyllopo des des environs de Jassy. — Ann. scient. Univ. Jassy. T. 6. p. 30—44. 7 Figg. 1909.
25. DU BOIS-REYMOND K.: Über die Beziehung und Binnendruck in elastischen Hohlgebilden. — Biol. Centralbl. 26 Bd. 1906.
26. BOUVIER E. L.: Sur le mécanisme des transformations en milieu normal chez les Crustacés. — C. R. Acad. Sc. Paris, T. 144. p. 301—306. 1907.
27. BRAUER A.: Zur Kenntnis der Reifung des parthenogenetisch sich entwickelnden Eies von *Artemia salina*. Mit 4 Taf. — Arch. f. mikr. Anat. 43. Bd. p. 162—216, 217—222. 1894.
28. BRAUER F.: Über *Artemia* und *Branchipus*. — Zool. Anz. 9. Jhg. p. 364—365. 1886.
29. BRAUER F.: Beitrag zur Kenntnis der Phyllopoden. Mit 8 Taf. — Wiener Sitzungsber. math. nat. Cl. 75 Bd. 1. Abt. 5. Heft. p. 583—614. 1877
30. BRECKNER A.: Vorläufige Mitteilungen über experimentelle Untersuchungen an *Artemia salina*. — Verhandl. u. Mitteil. d. Siebenbürgischen Vereins f. Naturwiss. zu Hermanstadt. 58. Bd. Jhg. 1908.
31. BRECKNER A.: Über den Einfluss von Salzlösungen auf niedere Krebse. — Schrift. nat. Ver. Schleswig-Holst. Bd. 14. p. 418—419. 1909.
32. BRIGGS S. A.: Animal from Salt Lake (*Artemia fertilis*). — Science-Gossip. p. 78—80. 1869.
33. BRIQUEL C.: Note sur l'*Artemia salina*. — Nancy, imp. Crepin-Lebland, 1882.
34. BUJOR P.: Contribution à la biologie de l'*Artemia salina* LEACH. — Annales de Biologie. Vol. 1. p. 207—220. 1911.
35. BUTSCHINSKY P.: Die Metazoenfauna der Salzseelimane bei Odessa. — Zool. Anz. 23. Bd. 1900.
36. BUTSCHINSKY P.: Über *Artemia salina*. — Naturwiss. Wochenschr. 18. Bd. p. 185—186. 1903.

37. CERTES A.: Sur la vitalité des germs de l'*Artemia salina* et du *Blepharisma lateritia*. — Compt. Rend. Acad. Sc. Paris, T. 93. p. 750—752. 1882.
38. CHYZER C.: Nachtrag zu Sill's Mitteilungen über die in den Salzsoolteichen Siebenbürgens vorkommende *Artemia*. — Verh. u. Mittheil. d. Siebenbürg. Ver. f. Naturwiss. Hermanstadt. 12. Jhg. p. 56—59. 1862.
39. CLAUS C.: Untersuchungen über die Organisation und Entwicklung von *Branchipus* und *Artemia*. — Arbeiten aus dem Zool. Inst. d. Univ. Wien. 6. Bd. 1886.
40. CLAUS C.: Über die Charaktere der Gattung *Artemia* im Gegensatze zu *Branchipus*. — Ann. Kais. Akad. d. Wiss. Wien. p. 43—45. 1886.
41. DADAY J.: Catalogus Crustaceorum faunæ Transylvaniae. — Orv. term. tud. Ért. 1884.
42. DADAY J.: A Magyarbirodalom állatvilága. III. Arthropoda. — Budapest, 1896.
43. DADAY J.: Monographie systematique des Phyllopo des anostracés. — Ann. Sc. nat. zool. (9) T. 11. p. 91—489. 89. figg. 1910.
44. DADAY J.: Quelques phyllopo des anostracés nouveaux. Appendice à la monographie systematique des Phyllopo des anostracés. Avec 5 figures dans le text. — Annal. d. Sc. Nat. (9) zool. p. 241—264. 1910.
45. DADAY J.: A magyarországi *Branchipus*-fajok átnézete. — Math. és Természettud. Közl. 23. köt. 1888.
46. DADAY J.: Adatok a Phyllopo da Anostraca alrend eddig ismert fajainak ismeretéhez. — Math. és Természettud. Ért. 29. köt. p. 165—192. 1911.
47. DESMAREST: Considerations générales sur la classe des Crustacés et description des espèces de ces animaux qui vivent dans la mer, sur côtes ou dans les eaux douces de la France. Paris, 1825.
48. ENTZ G.: Az erdélyi sós vizekben élő Artemiákról. — Orv. term. tud. Ért. 8. köt. 1886.
49. ENTZ G.: A sós vizek faunája. — Természettud. Közl. Pótfüz. LV. 1900.
50. ifj. ENTZ G.: A levéllábú rákok egy óriása. — Állattani Közl. 5. köt. p. 147—148.
51. FABRICIUS: Entomol. syst. II. 1775.
52. FISCHER G. DE WALDHEIM: Notice sur une nouvelle espèce de *Branchipus* de LATREILLE. — Bullet. d. la Soc. Imper. des Sc. nat. de Moscou. T. VII. p. 452. Tab. 16. 1834.
53. FRIEDENFELS E.: Über *Artemia salina* und andere Bewohner der Soolenteiche in Salzburg. Mit 1 Taf. — Verh. Siebenb. Ver. f. Nat. 30 Jhg. p. 112—178. 1880.
54. FRIEDENFELS E.: Weitere Beobachtungen über *Artemia* und die Salzburger Soolenteiche. — Verh. u. Mitth. d. Siebenb. Vereins f. Nat. in Hermanstadt. Jhg. 1885.
55. FRIES W.: Die Entwicklung die Chromosomen im Ei von *Branchipus* GRUB. und die parthen. Generation von *Artemia salina*. — Arch. f. Zellforschung. 4. Bd. 1909.

56. GARMAN S. W.: The Salt-Lake Crustacean (*Artemia fertilis* VERILL.). — Amer. Naturalist. Vol. 6. p. 771—772. 1872.
57. GISSLER CARL F.: Evidences of the Effect of Chemico-physical Influences in the Evolution of Branchipod Crustaceans. — Proc. Americ. Assoc. Adv. Sc. 29. Meet. p. 557—559. 1881. és Amer. Natural. 15 Bd. 1881.
58. GMELIN: LINNÉ's Systema naturæ. 1789.
59. GRAEFFE E.: Übersicht der Fauna des Golfes von Triest, nebst Notizen über Vorkommen, Lebensweise, Erscheinungs- und Leichzeit der einzelnen Arten. 5. Crustacea. — Arb. Zool. Inst. Univ. Wien. XIII. Bd. 1901—02.
60. GROCHOWSKI M.: Über eine neue, im Süßwasser lebende Spezies von *Artemia*. Mit 5 Figg. — Verhandl. k. k. Zool.-bot. Ges. Wien. 45. Bd. p. 95—101. 1895. — Ugyanez lengyelül a Kosmos (Lemberg) cz. folyóiratban. T. 20. p. 301—310. 1895.
61. GRUBE A. E.: Bemerkungen über die Phyllopoden. — WIEGMANN's Archiv 1. Bd. p. 71—172. T. 5—8. 1853.
62. HANKÓ JÓZSEF: Torda városának helyirata. Kolozsvár, 1844.
63. HARTING: Vormverandering van dieren door nitwendige invloeden (*Artemia salina*). — Album der Natur. 1877.
64. HARTWIG W.: Verz. lebender Krebstiere der Provinz Brandenburg. — Berlin, 1893.
65. HÖBER R.: Über die Bedeutung der Theorie der Lösungen für Physiologie und Medizin. — Biol. Centralbl. 19. Bd. 1899.
66. JOLY N.: Histoire d'un petit crustacé (*Artemia Salina* LEACH.) etc. — Montpellier. 1840.
67. KELLOG VERNON L.: A new *Artemia* and its Life Conditions. — Science. Vol. 24. p. 71—76. 1. pl. 1906.
68. KULCZYCKI W.: Materyaly do monographii skorupiakow liscionogich (Branchipodidæ), Materielen zu einer Monographie der Branchipodiden. Mit 1 Taf. — Kosmos (Lemberg). T. 10. p. 588—599. 1885.
69. LAMARK: Histoire des animaux sans vertébrés. Tom. V. p. 134. 1814.
70. LATREILLE: Nouv. dictionnaire d. histoire nat. T. 10. p. 333. 1817.
71. LEACH: Dictionnaires des Sciences naturelles. XIV. Bd. Entomostraca. 1819.
72. LEYDIG F.: Über *Artemia salina* und *Branchipus stagnalis*. — Zeitschr. f. wiss. Zool. 3. Bd. 1851.
73. LEUNIS LUDWIG: Synopsis der Thierkunde. 2. Bd. Hannover, 1886.
74. LIEVIN: *Branchipus Oudneyi*, der Fezzanwurm, oder dud; BAIRD's *Artemia Oudneyi*. — Neuesten Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. 5. Bd. 4. Heft. 1856.
75. LINNÉ C.: Systema Naturæ. Editio X. 1758. p. 634.
76. LOEB J.: Die chemische Entwicklungsregung des tierischen Eies. — Berlin, J. Springer. 1909.
77. MILNE-EDWARDS A.: Histoire naturelle des Crustacés. — Vol. 3. 1840.

78. MURDOCH J.: Seven new species of Crustacea and one Worm from Arctic Alaska. — Proc. U. G. Nat. Mus. Tam. 7. 1884.

79. NOLL F. C.: Lange Keimfähigkeit der Eier des kleinen salinen Krebses. — Zool. Garten. p. 282. 1889.

80. NOWIKOFF M.: Einige Bemerkungen über das Medianauge und die Frontal-Organen von *Artemia salina*. — Zeitschr. f. wiss. Zool. 81. Bd. p. 691—698. 1. Taf. 1906.

81. OSTROUMOFF A. A.: (Orosz dolgozat a következő czímű német kivonattal.) Über die Bedeutung des osmotischen Druckes beim Ausschlüpfen des Nauplius aus dem Ei der *Artemia salina*. — Kasan, 1901. 8°. Abgedr. aus: Protok. Naturforsch. Ges. Univ. Kasan. No. 198. p. 91.

82. PACKARD A. S.: A monograph of the Phyllopod Crustacea of North America, with remarks of the order Phyllocarida. 1883.

83. PALLAS: Reise durch verschiedene Provinzen des Russischen Reiches. — 1 Buch. 2. Theil. 1771.

84. PAULSEN J.: Über die Galvanotaxis der Entomostraken. — Zool. Anz. 29. Bd. p. 238—244. 4. figg. 1905.

85. PETRUNKEWITSCH A.: Die Reifung der parthenogenetischen Eier von *Artemia salina*. — Anat. Anz. 21. Bd. p. 256—263. 1902.

86. RAKETT J.: Observation on Cancer salinus. — Trans. of the Linn. Soc. 1812—15. II. Part. p. 205. Tab. 14. Fig. 8—10. 1812.

87. SAMTER u. HEYMONS: Die Variationen bei *Artemia salina* LEACH und ihre Abhängigkeit von äusseren Einflüssen. — Abhandl. k. preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1902.

88. SCHLOSSER: Lettre insérée avec figures dans les observations periodiques sur la physique, l'histoire naturelle et les beaux-arts par Gautier, 1756.

89. SCHMANKEWITSCH W.: Einige Krebse der Salzsee und süßsen Gewässer und ihr Verhältniss zu dem sie umgebenden Elemente. (*Branchipus medius* leirása.) — Schriften der III. Versammlung russischer Naturforscher. III. Bd. 1872? (orosz). SCHMANKEWITSCH után id.

90. SCHMANKEWITSCH W.: (Über den Einfluss d. physikalisch-chemischen Bedingungen auf d. Organisation v. *Branchipus*.) Auszug von KOVALENSKY aus d. Sitzungsber. d. Zool. Abhd. d. III. Versamml. russ. Naturf. Kiew. — Zeitschr. f. wiss. Zool. 22. Bd. p. 293—295. 1872.

91. SCHMANKEWITSCH W.: Sur les rapports de l'*Artemia salina* M. EDW. et de l'*Artemia Mühlhausenii* M. EDW. etc. Extrait. — Arch. Sc. phys. et nat. Genève. Nouv. per. T. 54. 1875. p. 284—287.

92. SCHMANKEWITSCH W.: Über das Verhältniss d. *Artemia salina* M. EDW. z. *Artemia Mühlhausenii* M. EDW. u. d. Genus *Branchipus* SCHAEF. Mit 1 Taf. — Zeitschr. f. wiss. Zool. 25. Bd. Suppl. Heft 1. p. 103—116. 1875.

93. SCHMANKEWITSCH W.: Sur les rapports de parenté de l'*Artemia salina* M. EDW. avec l'*Artemia Mühlhausenii* avec le genre *Branchipus* (SCHAEF.). — Arch. de zool. exper. et gen. IV. p. 61—64. 1875.

94. SCHMANKEWITSCH W.: On the Relations of *Artemia salina* and *Artemia Mühlhausenii* and on the Genus *Branchipus*. — Ann. Mag. Nat. Hist. 4. ser. Vol. 17. p. 256—258. 1876.

95. SCHMANKEWITSCH W.: Explications relatives aux differences qui existent entre l'*Artemia salina* et l'*Artemia Mühlhausenii* et entre les genres *Artemia* et *Branchipus*. — Arch. Sc. phys. et nat. Genève. Nouv. Period. T. 56. p. 358—365. 1876.

96. SCHMANKEWITSCH W.: Zur Kenntniss des Einflusses der ausseren Lebensbedingungen auf die Organisation der Tiere. — Zeitschr. f. wiss. Zool. 29. Bd. 1877.

97. SEMPER K.: Die natürlichen Existenzbedingungen der Thiere. — Leipzig. Brockhaus. I. 191—195. 1880.

98. SIMON E.: Étude sur les Crustacés du Sous-ordre des Phyllopoies. Avec 2 pl. — Ann. soc. Entom. de France (6). T. 6. 3. Trim. p. 393—432. 1886.

99. SIEBOLD C. Th.: Beiträge zur Parthenogenesis der Arthropoden. — 1871.

100. SIEBOLD C. Th.: Über Parthenogenesis d. *Artemia salina*. — Sitzungsber. d. math. phys. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. München. 3. Bd. p. 168—196. 1873.

101. SIEBOLD C. Th.: Über d. in München gezüchtete *Artemia fertilis* aus d. grossen Salzsee v. Utah. — Verh. d. Schweiz. naturf. Ges. Basel. 59. Vers. p. 267—280 1876. (1877.)

102. SILL VICTOR: Über die in den Salzsoolteichen Siebenbürgens vorkommende *Artemia*. — Verh. u. Mitth. d. sieb. nat. Vereins z. Hermannstadt. XII. p. 118—122. 1861.

103. STEUER A.: Der gegenwärtige Stand der Frage über die Variationen bei *Artemia salina* LEACH. — Verh. d. k. k. Zool. bot. Ges. Wien. Bd. 53. 1903.

104. STEUER A.: Planktonkunde. — Berlin, 1910. p. 387.

105. THOMPSON: Zoological Researches and Illustrations of natural history. Cork. Memoire VI. Development of *Artemia salinus* or Brine-shrimp demonstrativ of its relationship to *Branchipus* etc. — Fasc. 7. Tab. 3. 1834.

106. TUNNER J. KÁROLY: A csíkbogár hímivarkészülékének morfológiája és vérének osmotikus nyomása. — Állattan. Közl. 14. köt. 1905.

107. VERILL A. E.: New Localities of *Artemia*. — Americ. Journ. Sc. a. Art. 2. ser. Vol. 48. p. 430. 1869.

108. VISKI JENŐ: A tordai sós tavak. — Földrajzi Közlemények. 39. köt. 1911.

109. VOGT Ch.: Les *Branchipus* et les *Artemia*. — Act, Soc. Helvet. Sc. nat. Fribourg. 55-e. Ses. p. 149—153. (1872.) 1873.

110. VOGT Ch.: On *Branchipus* and *Artemia*. — Ann. Mag. Nat. Hist. 4. Ser. Vol. 10. p. 405—406. 1872.

111. WALTER A.: Vorläufige Diagnose und Beschreibung zweier neuer

Branchipoden aus Transkaspien (*Apus Haeckeli* n. sp., *Artemia asiatica* n. sp.) — Bull. Soc. Imp. Nat. Moscou. p. 924—927. 1887.

112. WALTER A.: Transkaspische Binnenkrustaceen. A. Transkaspische Phyllopoden. — Zool. Jahrb. 3. Bd. p. 987—1014. Taf. 35. 1887.

113. WESENBERG-LUND: Von den Abhängigkeitsverhältniss zwischen dem Bau der Planktonorganismen und dem specifischen Gewicht des Süsswassers. — Biol. Centralbl. 20. Bd. 1900.

114. WESENBERG-LUND: Grundzüge der Biologie und Geographie des Süsswasserplanktons etc. Aus dem dänischen übersetzt von O. GUYER. — Leipzig, 1910.

115. WOLTERECK R.: Weitere experimentelle Untersuchungen über Artveränderung, speziell über das Wesen quantitativer Artunterschiede bei Daphniden. — Verh. deutsch. zool. Ges. Vers. 19. p. 110—173. 18. figg. 1909.

116. ZENKER: System der Crustaceen. — WIEGMANN's Archiv. 20. Bd. 1854.

117. ZOGRAF N.: Phyllopodenstudien. — Zeitschr. f. wiss. Zool. 86. Bd. p. 446—522. 4. Taf. 2. figg. 1907.

118. ZOGRAF N.: La calott cervicale chez les Nauplius de l'*Artemia salina*. — C. R. Acad. Sc. Paris. T. 141. p. 903—905. 1905.

A táblák jegyzéke és magyarázata.

IV. tábla. Az *Artemia salina* L. konyhasós tenyészsorozatából 2-szeres nagyítású pillanatfényképek. A kép feletti szám az oldat fajsúlyát jelzi. A fényképek szembeszökően mutatják a potroh fokozatos megnövekedését a concentratio emelkedésével. Az eredeti fényképek $1\frac{1}{3}$ -ra vannak kisebbitve.

V. tábla. A potroh növekedése emelkedő töménységű oldatokban. *Artemia*-formák: 1. édes vízi; 2. hig sós vízi (1012 fs.); 3. közepes töménységű sós vízből (1090); 4. tömény sós vízi (1142). Az egyes számú rajz GROCHOWSKY hírnök Callaonella Jelskii-je, a többi 10× nagyítású eredeti photographia.

VI. tábla. *Artemia salina* laboratoriumi tenyészeinek méretsora 10× nagyításban. $\frac{2}{3}$ -ra kisebbitett rajz.

VII. tábla. Az *Artemia salina* Na Cl-os tenyészeinek fajsúly-számából és az állatok potroh-hosszasságának a törzshöz viszonyított arányszámából szerkesztett görbe az eddigi *Artemia*-formáknak a görbén való elhelyezésével.

VIII. tábla. Az *Artemia salina* törzs- és változtatott concentrációs, valamint Ca Cl₂-os és Mg SO₄-os tenyészeiből készült 2-szeres nagyítású pillanatfényképek. Az eredeti fényképek $1\frac{1}{3}$ -ra vannak kisebbitve.

IX. tábla. Az *Artemia salina* Na Cl-os görbéhez viszonyított megváltoztatott töménységű Na Cl-os, Ca Cl₂-os és Mg SO₄-os tenyészeinek jellemző adatai.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1913 június 16.-án tartott üléséből.)

A NASSA MUTABILIS NEVŰ CSIGA
REGENERÁLÓ KÉPESSÉGÉRŐL ÉS KÜLÖNBÖZŐ SZERVEINEK
REGENERÁCIÓJÁRÓL.

HANKÓ BÉLA-tól.

(Négy táblán 16 fénykép-másolattal és 23 rajzzal.)

I. Előszó.

Ámbár a regenerációs vizsgálatok terén, különösen az utolsó évtizedben, óriási nagyot haladt a tudomány, a lágytestűek (*Mollusca*) visszaszerző erejének tanulmányozásával mégis alig foglalkoztak.

Ennek a mellőzésnek valószínűleg az a száltében elterjedt hit az oka, hogy a lágytestűek visszaszerző képessége fejletlen, s a velük végzett ilyen irányú kísérletek nem sok eredménnyel kecsegtetnek. Kétségtelen, hogy a lágytestűek legnagyobb része ebben a tekintetben jóval elmarad más állatesoportok mögött, de bizonyára vannak közöttük is egyes fajok, a melyekben nagyobb visszaszerző erő szunnyad mint a többiben, s a melyek éppen ezért rendkívül alkalmasak a visszaszerzési folyamatok tanulmányozására. Csakhogy meg kell találni, ki kell keresni az erre alkalmas fajokat.

Ilyen a *Nassa mutabilis* L. nevű, a nápolyi öbölben igen közönséges csigafaj, a melylyel eddig még senkisémm kísérletezett, a melynek pedig valóban szokatlanul nagy a visszaszerző ereje.

Ezt a csigát tanulmányoztam az 1912. év márcziusának elejétől junius végéig a nápolyi «Stazione Zoologica»-n, s vizsgálataim eredményéről jelen dolgozatomban számolok be.

Hálás köszönettel tartozom szeretett professzoromnak, dr. ENTZ GÉZA, m. kir. udvari tanácsos, egyet. ny. r. tanár úrnak, a ki jóindulatával lehetővé tette nápolyi tanulmányaimat és a M. kir. Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium IV. ügyosztályának, a mely a nápolyi biológiai állomás magyar asztalát rendelkezésemre bocsátotta és ösztöndíjat is adott.

II. Általános rész és biológiai megfigyelések.

Vizsgálataim anyagául egy tengeri csigát, a *Nassa mutabilis* L.-t választottam. Ez a csiga, a mely a *Prosobranchiata*-rend *Pectinibranchiata* alrendjében a *Siphostomata* (TRYON) [vagy *Rhachiglossa* (FISCHER)] csoport *Nassidae* családjának fajokban gazdag *Nassa* nemébe tartozik, a nápolyi öböl partjain mindenütt megtalálható és nagyon gyakori. Jobbra csavart, rendkívül finoman rovátkált házát barna alapon világos-sárga márványozás díszíti. A teljesen kinyult csiga mintegy 5 cm hosszú, házának legnagyobb átmérője pedig (a főtengely mentén) körülbelül 3 cm.

A parti övben él, közel a víz színéhez, s gyakran annyira beássa magát a homokba, hogy csak a háza hegye és messzire kinyújtott siphója, esetleg tapogatói látszanak ki belőle. Rendesen azonban messzire előre nyújtott siphójával jobbra-balra szimatolva a sziklákon szokott mászkálni.

Dögevő s mint ilyennek fontos szerepe van a parti vizek tisztántartásában. Százzszámra lepik el ezek a kis csigák a halak hulláit, s a hal bőrén kis nyílást rágva, mélyen betolják ormányukat a hulla húsába. Igen rövid idő alatt teljesen letisztogatják a lágy részeket a hal csontvázáról, a melyet a meglehetősen épen hagyott külbőr vesz csak körül. De ha éhes a *Nassa*, a bőrt is megeszi, s a halból csak a csontváz s a pikkelyek maradnak meg. Nem válogatós, mindenféle állati hullát megemészt; le szokta enni a halászok horgáról a csalétket is.

Igen szívós életű. A hőmérséklet ingadozásaival szemben nagyon közönyösen viselkedik, de a víz kiédesedését rosszul tűri. Nem tudom, hogy a folyók torkolatában az erősen brakkos vízben előfordul-e ez a faj, de azt hiszem, hogy nem, mert

kísérleteimben az édes víz igen hamar megölte a házába görcsösen visszahúzódott állatot. A mi pedig visszaszerző erejét illeti, az egyenesen bámulatos.

A csigákról általában azt tartják, hogy a visszaszerző képességük nincsen jól kifejlődve. Azokról a fajokról, a melyekkel eddig kísérleteztek, ez csakugyan áll is, de a *Nassa mutabilis*-ben szunnyadó visszaszerző erő szokatlanul nagy. Ez a tulajdonsága, a melyhez hozzájárul közönségessége, igénytelensége és a fogsághoz való alkalmazkodása, a kísérleti alaktan céljaira minden más csigánál alkalmasabbá teszi ezt a fajt.

A *Nassa* ezen tulajdonságainak köszönhető, hogy kísérleteim jól sikerültek. Az aquariumok, a melyekben csigáimat tartottam, árnyékban állottak és átszellőztetett tengervíz keringett bennük. A víz hőmérséklete *állandóan 18 C° volt*. Minden második napon feldarabolt halakkal megettettem a csigákat. A mint a haldarabokat a medenczébe dobtam, a csigák a szagtól vezetve egész sorokban indultak a döghús felé, s csakhamar elborították azt.

Mintegy 2 cm-nyire kinyújtott ormányukkal hamarosan letisztogatták a csontokról a lágyrészeket. Ha a csigák jóllaktak, eltávolítottam a medenczéből a hulladékot. Ilyen körülmények között állataim igen jól érezték magukat az aquariumokban és szépen gyarapodtak.

Háromszáz megoperált példány közül csak öt pusztult el. Egészen szokatlanul kedvező arány ez, s bizonyára csupán csak a *Nassa mutabilis* szívósságával magyarázható. Különösen, ha tekintetbe vesszük, hogy szó sem volt sterilizésről és asepsisről, a mi különben vízi állatok operálásakor lehetetlen és úgy tapasztaltam régebbi kísérleteimben, hogy fölösleges is. Sok érdekes megfigyelést tettem az állatok életére vonatkozólag, s bár ezekről a dolgokról alig tudunk valamit, ez alkalommal mégis csak egyet említek meg közülük.

Ha az aquarium üvegfalán mászó *Nassa* talpát az üvegen keresztül megfigyeljük, a talp elején a középvonalban kis világos folt tűnik fel a talp környező sötét részéből. Ha ezt a világos foltot nagyítóval nézzük meg, észrevehetjük, hogy az a talp belsejébe vezető nyílásnak duzzadt és világos szélű ajka.

Ez a nyílás, a melyet először DELLE CHIAJE (11.)¹ észlelt és «porus aquaticus» néven írt le — mert azt hitte, hogy ezen át vizet vesz fel a csiga a testébe —, a középső nagy talpmirigynek szájadéka, a mint ezt CARRIERE vizsgálatai óta tudjuk. CARRIERE (9.) még 1882-ben leírta, hogy ez a mirigy a talp izomzatába bemélyedő, nagy faalakúan és bilaterálisan elágazó, mirigyes hámmal bélelt betüremlés, a melynek «folyékony anyag» a váladéka. Azóta senkisé meg vizsgálta ezt a mirigyet, a melyről nem tudták, hogy mire való. Sikerült megfigyelnem, hogy a *Nassa mutabilis* ennek a mirigynek a váladékából készíti a petéit körülvevő, meglehetősen kemény, rugalmas és átlátszó petetokat.

A csiga előbb 8—10 apró, a mákszemnél kicsit kisebb, sárga petét rak egy csomóba az edény falára, azután úgy helyezkedik el fölöttük, hogy a középső nagy talpmirigy erősen kitágult, tátongó szája körülvegye a petéket. Így marad azután körülbelül 20—30 perczig. Ez alatt az idő alatt választja el a mirigy a felső végén csúcsos, püspöksüveghez hasonló petetokat a peték körül, miközben talpával szorosan hozzátapad az üveghez. Ha a tok kész, a csiga felemelkedik s az éppen elkészült petetokról mintegy lehúzza a mirigyet.

Sorban 8—10 petetokat helyez így el szorosan egymás mellett, azután pedig újabb sort készít a meglévő mellé. Sort-sor mellé rakva, az üveg falán kisebb-nagyobb szabálytalan területet ragaszt tele petetokjaival. A peterakás és tokkészítés ideje április hó végére esett. Ebből a megfigyelésből nyilvánvaló, hogy a petetokok anyagát a középső nagy talpmirigy váladéka szolgáltatja.

III. A vizsgálatok módszere.

Vizsgálataim megkivánták, hogy csigáimat különböző módon megcsontsítsam. Ebből a célból az aquariumból kivett csigákat vízzel telt lapos üvegtálba helyeztem és megvártam, a míg házukból előbújva, hosszúra kinyultan másznak az üveg falán.

A tapogatókat, szemeket, vagy a talp végfonalait az óvatosan

¹ A zárjelben levő számok az irodalomban felsorolt munkák sor-számát jelölik.

közelített olló egyetlen gyors csapásával metszettem le, a talp egyéb csonkításait késsel végeztem. Sokszor el kellett bódítanom a csigát a műtét előtt, főleg mert máskülönben a legkisebb érintésre is visszahúzódott házába, s különösen ha már megsebeztem valamely testrészét, nem nyujtotta ki azt ismét kellőképen. Többféle narcoticummal kísérleteztem, a míg a tenger-vízben oldott 2%-os cocain-oldatnál állapodtam meg. Finom pipettával juttattam ebből az oldatból a tálba, a melyben a csigák mászkáltak, lassan és óvatosan, cseppről-cseppre egyre többet mindaddig, a míg a csigák házukból messzire kinyulva oldalra nem fordultak.

Ha a cocaint nem elég óvatosan juttattam a vízbe, akkor a csigák házukba visszahúzódtak és elbódulva is úgy maradtak, a miáltal céljaimra alkalmatlanná váltak. Óvatos altatás mellett azonban messzire kinyuló testtel körülbelül egy negyedóra alatt annyira elkábult a csiga, hogy bármely részét könnyen megoperálhattam. A sebzés után az altatott állat is rögtön visszahúzódtott házába s úgy is maradt.

Sok fejtörést okozott a csigák megkülönböztetése. Mintegy 300 egyénnel dolgoztam, természetes, hogy mindet külön edénybe nem tehettem. Kezdetben a ház szárazra törölt részére tussal írtam rá az állat sorszámát, s hogy a víz le ne mossza, bezsíroztam. De a tengervíz csakhamar elszappanosította a zsirt és a tusjelzés leoldódott.

Később lakkal vontam be a tussal írt számot, de ezt a módszert, bár tovább tartott az így kezelt jel, szintén abba-hagytam, mert a barna alapon a tussal írt számot nehéz volt megkülönböztetni. Azután alkoholos sellack-oldatból és fehér krétából festéket készítettem és ezzel jelöltem a csigákat. Sajnos azonban, ez a fehér festék, a mely nagyszerűen látszott, 2—3 napnál tovább nem maradt meg a csigán.

A sellack lekopott s a szám elmosódott. Mintegy 300 csigát minden harmadnap újból megjelölni nagyon fáradságos és unalmas munka volt. Végre rájöttem, hogy *Nassáim* megjelölésére legalkalmasabb a fehér email-festék. Ez is lekopott ugyan 8—10 nap alatt, de a sellackos krétánál mégis sokkal jobb volt.

Azt hiszem, hogy nem fölösleges mindezt elmondani, mert

ilyen apróságokon szokott az ember rendszeren megakadni és sok időt elveszíteni.

Még egy másik nehézséggel is küzdöttem, ezt azonban sajnos, nem sikerült legyőznöm. A csigákat nem bírtam kinyújtózott állapotban megölni. Próbáltam kiforralt vízben megfulasztani őket; a második napon szépen ki is nyultak, de haláluk előtt mindig visszahúzódtak házukba. Több más eljárás közül némi eredményt csak a következővel sikerült elérni, a mely körülbelül tíz eset közül egyszer sikerült. A több nap óta cocainozott és erősen kinyúlt állatokat óvatosan kivettem a vízből és a köpenyüregükbe hirtelenül forró eczetsavat fecskendeztem.

Csak ritkán bénult meg rögtön a visszahúzó izom, rendszeren még visszahúzódtott az állat a házába és úgy pusztult el. Eltekintve attól, hogy ez az eljárás nagyon bizonytalan volt és éppen akkor nem sikerült, a mikor egy-egy szép példányt kellett volna kinyúlva rögzítenem, még az a nagy hibája is megvolt, hogy a 2–3 napig tartó cocainozás következtében, úgyszólván az egész hám levált az állat testéről.

A biológiai állomás sem ismer oly módot, a melylyel a *Nassát* kinyújtott állapotban és úgy, hogy a szövetei is épségben maradjanak, biztosan meg lehetne ölni.

Az egyes levágott testrészeket, a melyek rendszeren nem zsugorodtak nagyon össze, ZENKER-féle folyadékban rögzítettem és paraffinba ágyazva, különböző festékekkel megfestett metszetek alakjában vizsgáltam rajtuk a regeneratio folyamatait. A csonkítás módjáról, a regeneratio menetéről és minden mozzanatáról vázlatos rajzokkal illusztrált pontos naplót vezettem.

A rajzok, a melyek értekezésem szövegét magyarázzák az eleven állatokról, Nápolyban készítettem, a fényképeket pedig a budapesti tud. egyetem állattani és összehasonlító bonczatani intézetben tisztelt barátom, dr. ABONYI SÁNDOR főisk. magántanár úr készítette metszeteimről, a kinek ezért a szívességéért ezen a helyen is őszinte köszönetet mondok.

IV. A regeneratio lefolyása általánosságban és a megállapítható szabályok.

A megcsonkítás után a csiga visszahúzódik a házába és így marad hosszabb-rövidebb ideig. A fedő letépése, a láb vagy a siphó megcsonkítása után gyakran már pár percz mulva ismét előbújt a csiga a házából és nyugodtan mászkált az edényben. A cocainozott állatok azonban csak a bódultságuk elmulása után, rendesen csak az éjszaka folyamán bújtak ismét elő.

A csonkítás után a seb szélei összehúzódnak, gyakran egészen egymásra borulnak, de még ha a seb tátongó marad, akkor is hamarosan elzárja a szétroncsolt szövetből, főleg pedig a megaldott vérből keletkezett var. (Tábl., 1 kép.) Ez az alvadék kéreg néhány óráig még egyre vastagszik, mert a szövetek kissé visszahúzódnak és az így keletkezett üreget fokozatosan kitöltik chromatinban gazdag és nagy magvú sejtek, a melyek réteget alkotnak a seb felületén.

A csonkítás után tömegesen látjuk ezeket a gömbölyű vagy kissé orsóalakú nagymagvú sejteket a vérerekben, a mint a vérerek végét eldugaszolják és a seb külső felületét elzárják.

Hasonló folyamatot észlelt TECHOW (39.) megcsonkított *Helix*eken.

A vérsejtek határai alig észlelhetők, csak az látszik, hogy tömötten álló nagy sejtmagvak vannak a seb felületén az alvadékban. Körülbelül 5—6 órával a csonkítás után megkezdődik a hám sarjadzása. (Narkosisban operált állataimon ez csak jóval később, körülbelül a kétszeres idő múltán következett be.)

A seb szélén álló, épen maradt hengeres hámsejtek megváltoztatják az alakjukat, ellapulnak, magjuk, a mely eredetileg álló helyzetben volt a sejtben, vízszintes helyzetbe fordul, a sejtek maguk pedig oszlásnak indulnak, s az így keletkezett rendkívül lapított hámsejtek minden oldalról rásarjadzanak a sebfelületre.

Ezt a folyamatot különben már CARRIERE (8.) is észlelte a kerti csigán. A minden oldalról a sebre sarjadzó hám a *Nassán* már körülbelül 24 óra mulva összeér és bevonja a sebfelületet.

Az új hámsejtek kezdetben rendkívül lapítottak, úgy hogy

szinte hártjának látszanak, magjuk azonban mindig kitűnően megkülönböztethető. Már a második napon koczkaalakúvá válnak a lapos hámsejtek és kezdenek mindinkább hasonlítani a szomszédos hengeres hámsejtekhez.

A 2—3. napon az új hám sejtjei nemcsak vízszintesen, hanem függélyes irányban is osztódnak s egyideig több rétegben vannak elhelyezve egymás felett, a mi rendes körülmények között a csiga hámján sohasem észlelhető.

Az alsó rétegek sejtjei egyenkint leválnak és úgy látszik, bevándorolnak az alattuk lévő szövetbe. A 3—4. napon az alsóbb rétegek sejtjei eltűnnek, a hám már csak egyrétegű és egészen rendes nagyságú sejtekből áll, a melyeknek a külső szélén most már hamarosan kifejlődik az a gyengén festődő, kutikulaszerű szegély, a mely a környező, rendes hámsejtekre jellemző.

CARRIERE szerint a kerti csigának hámja regenerációjához legalább is 29 napra van szüksége, TENCHOW különböző *Helix*-fajai pedig átlag körülbelül nyolcz nap alatt szerezték vissza normalis alakú hámjukat. A *Nassa mutabilis*en ez a folyamat még jóval gyorsabb lefolyású s ott, a hol a környező hámban nincsenek nyálkasejtek, már rendszeren a 4. napon sem lehet különbséget tenni a régi és az új hám között.

A hámsejtek külső végükön szépen sorakoznak egymás mellé, befelé néző végük azonban elkeskenyedik, a sejtek között nagy sejtközzötti üregek vannak, s a sejtek vége czafatos és hosszú nyulványokat bocsát az alsó szövetbe. De az alaphártya jól ki van fejlődve. (Tábl., 2. kép.)

Az 5—6. napon már akadnak egyes sejtek az új hámsejtek között, a melyek szürkés-barna szemecskékkel kezdenek megtelni. A keletkező pigmentsejtek ezek. Egyre több hámsejtbe rakodnak bele a festékszemcsék, s a pigment szemcséknek a száma a sejtben is egyre nagyobb. (Tábl., 3. kép.)

A visszaszerzett részben körülbelül két hét múlva már szabad szemmel is megállapítható a pigment jelenléte.

A nyálkát elválasztó mirigysejtek körülbelül a 15. napon kezdenek kialakulni az új hámban. Egyes hámsejtek lesülyednek mélyen az alattuk lévő szövetbe, de nem válnak le a hámról, hanem azzal mindvégig összefüggésben maradnak.

A fejlődő nyálkamirigysejt kezdetben széles alappal függ össze a hámmal, ez a nyél azonban egyre jobban vékonyodik és sokszor egészen fonálszerűvé válik (Tábl., 4. kép), ha a sejt mélyen sülyed le a kötőszövetbe. A lesülyedt, hosszú nyelű hámsejt átalakul mirigysejtté.

Alsó tágabb részében elnyálkásodik és hólyagszerűen felduzzad. Az elnyálkásodás egyre feljebb terjed, végül a kezdetben keskeny nyél is tágra duzzadva, a mirigy kivezető csövévé válik.

A mirigysejt most már nem hasonlít hosszú nyakú lombikhoz, hanem olyan tág tömlő, mint a csiga rendes nyálmirigysejtjei.

Néha két-három hámsejt együttesen sülyed le a kötőszövetbe s ilyenkor több sejttű nyálmirigy lesz belőlük. Ezt a megfigyelést két évvel ezelőtt TECHOW tette s én megerősíthetem. Ezek az együttesen lesülyedt hámsejtek egészen összeolvadnak s csak a mirigy nagysága, esetleg a több mag árulja el, hogy több sejt összeolvadásából lett.

A keletkező nyálmirigyek eleinte éppen úgy festődnek, mint a rendes hámsejtek, de később az elnyálkásodás előrehaladásával karöltve egyre erősebben festődnek, míg végre a jellegzetes sötét nyálkaszíneződést mutatják.

A csonkítást követő 4—5. napon megkezdődik a visszacszerzés az izomzatban is. Ebben az időben az izomnyaláb elmetsett és kissé felduzzadt vége közé odavándorolt sejtek rendeződnek el olyan módon, hogy hidakat alkotnak az izom csonkjától az új hám felé. Ezek az odavándorolt, megnyúlt, orsóalakú sejtek nem változnak át izomrostokká, ezek nem fiatal izomsejtek, mint a hogy TECHOW gondolja, hanem csupán támaszul, vezetőül szolgáló kötőszöveti hidak, a melyeknek a mentében az új izomrostok kifejlődnek.

Az új izomrostok a régi izmok csonka végéből sarjadznak ki.

Az elmetsett izomnyaláb végén az egyes izomrostok kissé megduzzadnak, világosabban színeződnek, egyesek pedig úgy látszik, el is hálnak, összezsugorodnak és széjjelesnek. Már körülbelül a 4—5. napon a régi izmok megduzzadt csonka

végéből egyes finom, alig festhető, hosszú vékony nyulványok kezdenek kisarjadzani, az előbb említett, odavándorolt sejtekből lett hidak mentén. Ezek a kezdetben alig vagy nehezen festődő fonalas nyulványok később éppen úgy festődő és épp olyan fénytörésű rostokká alakulnak, mint a régi izomnyaláb csonka végének rostjai. Az új izomelemeknek a csonk régi rostjaiból való kisarjadzása a fényképen is eléggé látható. (Tabl., 5. kép.)

Hogy a kezdetben odavándorolt orsóalakú sejtek is átalakulnak-e később izomrostokká, vagy pedig csak kötőszöveti elemek alakjában maradnak meg további életükben, azt nem birtam eldönteni.

Ismételt csonkítások után is visszaszerzi a csiga a levágott testrészt. Tapogatóit, végfonalait, utólábát és fedőjét mindig újból megnöveszti a *Nassa*, akárhányszor vágják is le. Ismételt, csonkítások után a visszaszerzés menete nem hosszabb, ellenkezőleg még kissé gyorsabbodik is. Pl. az 1. sz. csigán az első alkalommal 20 nap múlva látszott meg a visszaszerzett fedő első nyoma, másodszor 18, harmadszor pedig már 17 nap múltán. A regeneratio menete háromszori csonkítás után gyorsabb volt, mint kezdetben.

Az idősebb állatok regeneráló képessége rendesen kisebb szokott lenni, mint a fiataloké; *Nassáimon* azonban ezt nem észleltem. A teljesen kifejlett, ivarérett nagy példányok éppen olyan gyorsan visszaszerezték testük levágott részeit, mint a fiatal, félakkora csigák.

Hogy honnan ered a regenerationál az új részek felépítésére felhasznált sejtanyag, azt minden esetben nehéz pontosan eldönteni. Azelőtt azt tartották, hogy hasonló csak hasonlóból, hám csak hámból, kötőszövet csak kötőszövetből stb. fejlődhet. *Nassáim* regenerálódó szöveteinek egy része így fejlődik, de a metaplasziára: hogy hámsejtek kötőszöveti sejtekké változnak át és megfordítva, is van példa.

Erről ebben a fejezetben már volt szó.

A szervek legtöbbje, pl. a szem, a regeneratio menetében egészen úgy fejlődik ki, ugyanolyan eredetű szövetekből, mint embryonalis állapotban.

Azért emelem ezt ki, mert tudvalevő, hogy a *Triton* sze-

mének regenerálódó lencséje az embryonális fejlődéstől merőben eltérően nem a külhamból, hanem az iris széléből fejlődik. A *Nassa* regenerálódó szemében nem így van; itt éppen olyan fejlődési fokokon megy át ez a szerv, mint a minőket az egyéni fejlődés folyamában megfutott. (MÜLLER-f. törvény.)

Már a BARFURTH-f. szabály alól, mely szerint a regeneratum mindig a metszési síkra merőlegesen van elhelyezve, regenerálódó csigáimon számos kivételt észlelhettem. Példának csupán a 28. sz. állatot említem, melynek egyenesen elmetezett metapodiumából ferde sarjadék nőtt ki. (6. rajz.)

Néha kevesebb, egyszerűbb a visszaszerzett testrész a levágottnál, pl. a 222. sz. csigán (11. rajz) a levágott két végfonál helyett csak egy fejlődött. Hogy ez a páratlan fonál két összeforrt fonál értékével bír-e, avagy nem, arról később lesz szó.

Ezekkel a tökéletlen regeneratumokkal szembehelyezhetők azok, amelyeknél a rendesnél nem kevesebb, hanem több fejlődik a levágott testrész helyén.

Ismeretes, hogy a halak levágott úszói helyébe gyakran a rendesnél nagyobb új úszók nőnek. Így van ez néha a *Nassa*-kon is. Ezekben az esetekben a regeneratio közben valószínűleg több anyag állott az állat rendelkezésére, mint a mennyire elvesztett testrészeinek pótlására szüksége volt, és a túlbőséges táplálkozás következtében az illető visszaszerzett testrész túlnagyra növekedett.

Talán idesorolhatók a villás és kettős képződmények is.

Olyan testrészeket, amelyek rendesen páratlanul vannak jelen az állat testén, gyakran lehet villásan elágazva vagy duplán kifejlődve találni a szabadban élő *Nassa nutabilisek* testén.

Ilyen villás és kettős képződményeket tavaly irtam le (16.) szabadban fogott *Nassák* testéről. Ugyanolyan villás kettéágazást sikerült mesterséges úton is előállítanom az által, hogy a fiatal regeneratumot kettéhasítottam. A superregeneratio feltétlenül bekövetkezett, ha a sebfelületek nem simultak hamar össze.

Mindegyik hasított fél pótolta a hiányzó részeket és így a páratlan szerv helyén villás vagy kettős szerv keletkezett. (1. 19., 20., 21., 23. rajzokat.)

Még kell még emlékezni az idegrendszernek a regeneratio

lefolyására gyakorolt hatásáról is. Számos kísérlet van, a mely azt bizonyítja, hogy a szervek regenerációjához föltétlenül szükséges az idegrendszer kormányozó működése. Az idegdürczok eltávolítására a kísérletek nagy részében a regeneratio vagy egészen elmaradt, vagy szabálytalanul ment végbe; a levágott szervek helyén egészen más, merrőben eltérő alakú részek fejlődtek ki. Így pl. C. HERBST vizsgálatai óta tudjuk, hogy a tizlábú rákok szemének kiirtása után csak abban az esetben fejlődik ki új szem, ha a látóidegdürczot sértetlenül hagyjuk; ha ellenben ezt is eltávolítjuk, csáp nő a szem helyén.

Ebből és más hasonló kísérletből arra lehet következtetni, hogy az idegdürcz jelenléte a regeneratio szabályos lefolyásának biztosítására okvetlenül szükséges. Pedig nem úgy van.

A *Nassa* levágott szemének a helyén, akár a látóidegdürcz-czal együtt, akár a nélkül vágtuk ki, mindig regenerálódik a szem; a különbség csak az, hogy az előbbi esetben maga a látóidegdürcz is újból keletkezik. A szemhólyag sokkal előbb fejlődik ki, mint az ideg. A szemhólyag a regenerálódó csápon már teljesen zárt, amikor a látóidegdürcz még csak kezd kialakulni.

Az idegdürcz jelenléte a Nassa szemének regenerációjához tehát nem szükséges.

A láb regenerációjára vonatkozó irodalom.¹

A csigák talpának regenerációjára vonatkozó legrégibb megbízható adatot SPALLANZANI (37.) 1768-ban megjelent munkájában találjuk meg, aki ugyan főkép a tapogatóknak és az «egész» fejnek a regenerációját vizsgálta különböző *Helix*-fajokon és meztelen csigákon, de azt is leírja, hogy a talpukat is visszaszerzik a megcsonkított csigák.

SPALLANZANI leírásának főleg az a része, melyben elmondja, hogy a csigák egészen levágott fejüket is visszaszerzik, sok kortársát hasonló kísérletezésre indította, s a csigák csonkítása és

¹ A fedő visszaszerzésére vonatkozó irodalmat lásd a VIII. fejezet elején.

megfigyelése valóságos szórakozássá vált. Több ilyen tartalmú közlemény jelent meg ebben az időben, ezeket azonban, mert minden sorukból csak úgy sugárzik a naivság és megbízhatatlanság, nem lehet komolyan figyelembe venni. SPALLANZANI követői közül talán csak GIARDI érdemel figyelmet, bár az ő 1782-ben megjelent munkája sem mentes vaskos tévedésektől. Megemlíti, hogy különböző *Helix*-fajokba tartozó csigái közül 24-nek a talpa végéből, 24 másiknak pedig a talpa oldalából vágott ki kisebb darabokat s a hiányzó részeket a csigák egy hónapon belül visszaszerezték. SPALLANZANI-nak és kortársainak szórakoztató kísérleteiről szép összefoglaló ismertetést találunk CARRIERE (8.) munkájának bevezetésében.

Az újabb irodalomból elsősorban MORGAN-t (25.) kell megemlíteni, a ki «Regeneration» cz. könyvének 144. oldalán saját kísérleteinek eredményeként röviden megemlíti, hogy a *Physa*, *Limnea* és *Planorbis* talpának levágott részeit vissza bírja szerezni.

Legújabbban TETCHOW (39.) foglalkozott szárazföldi csigák talpának a regenerációjával. A *Helix pomatia*, — *hortensis*, — *fruticum* és — *arbusorum* nevű fajok közül a *H. fruticum* nem növesztette meg újból talpának levágott darabjait, a többi faj példányain azonban megállapíthatta a regenerációt. A visszaszerzés azonban rendkívül lassan folyt le, s a megnövesztett darab egy év alatt sem érte el régi nagyságát. Csigái között különben a halandóság is igen nagy volt.

Meg kell még említenem, hogy vannak csigafajok, a melyek talpuk végét gyengédten érintésre vagy megragadtatás esetén önként le tudják fűzni testükről. Ilyen öncsonkítást írt le SEMPER (36.) a fákon élő *Halicarion*-ról, QUOY és GAYMARD (31.) a *Harpa ventriculosá*-ról, COCKERELL (12.) a *Prophysaon hemphilei*-ről, PFEIFFER (27.) pedig GUNDELACH észlelései alapján három Cuba-szigeti szárazföldi csigáról, a *Helix crassilabris*, *Imperator Apollo* nevű fajáról. Az öncsonkítás után mindezek a csigák a physiologiai regeneratio során visszaszerzik a talp levett végét.

A láb végfonalainak regenerációja.

A metapódium végfonalainak regenerációját 51 *Nassán* vizsgáltam meg. Ezek között voltak olyanok is, amelyeknek nemcsak a végfona, hanem más testrésze is meg volt csonkítva, Ebben a szakaszban azonban csak végfonalak visszaszerzéséről lesz szó. Ennek a szervnek a leoperálása volt a legkönnyebb. Akár ollóval, akár késsel vágtam le a tál fenekén mászó állat testéről a végfonalakat, egyaránt könnyen hozzájuk férhettem. Egyes csigáknak csak az egyik végfonalát vágtam le, a másikat az összehasonlítás kedvéért meghagytam, másokon mindkét végfonálnak levágtam a hegyét. Sokan voltak az olyanok is, a melyeken mindkét végfonalat félig vagy egészen eltávolítottam.

Azokról a csigákról, melyeknek a végfonalát a talp egy darabjával együtt vágtam le, a következő szakaszban, a metapódium regenerációjával kapcsolatban lesz szó.

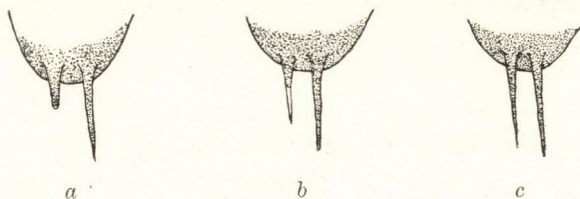
A végfonalak megcsonkítását alig vette fel az állat, sokszor még csak be sem húzódott a házába, hanem csupán a levágott végfonál meghagyott csonkját húzta össze görcsösen körülbelül félperczig; aztán oly nyugodtan mászkált tovább, mintha mi sem történt volna. Ezt a közönyösséget talán az érzőidegek csekély számával és a fájdalomérzés hiányával lehetne magyarázni. Úgy látszik, hogy ennek a szervnek az elvesztése okoz legkevesebb kellemetlenséget az állatnak. A seb elzárása a csonk görcsös összehúzása által történik; a seb szélei rendesen egészen ráborulnak egymásra; a regeneratio első nyoma tejfehérszínű kidudorodás alakjában szabad szemmel a 4. napon észlelhető. Az első hét végén már igen jól látszik és körülbelül két hét alatt visszaszerzi az állat a levágott fonalrész felét. Még ilyenkor is fehér a regeneratum színe, bár metszeteken meggyőződhetünk róla, hogy már nagyon sok hámsejt telve van pigment-szemcsékkel. A teljes nagyságát és sötét színét kb. 30—35 nap alatt éri el a visszaszerzett végfonál. Általában véve annál hosszabb a visszaszerzés menete, mennél kisebb a visszaszerezni való. A végfonál egy kisebb darabjának a visszaszerzése tovább tart, mint egy nagyobb darabé.

Pl. a 17. sz. csigának III/21. d. e. levágtam a bal végfonalának a felét. (*1. rajz a.*)

IV/9. kis kidudorodó fehér sarjadék. (a.)

IV/15. a regeneratum fehér, de eléri az épnék háromnegyedét. (b.)

IV/21. majdnem teljesen kész, bár még kissé világosabb az épnél. (c.)



1. rajz.

A 72. sz. csigán ellenben, melynek III/26. d. e. mindkét végfonalát többől levágtam:

IV/5. észleltem a kidudorodó fehér sarjadékokat.

IV/18. még fehérek, de majdnem teljes nagyságuk voltak.

IV/21. színük és nagyságuk teljesen kifejlődött.

Rövidebb idő alatt jóval többet regenerált tehát a 72. sz., mint a 17. sz. állat.

Ilyen viszonyt találunk valamennyi *Nassa* regenerációjának ideje és a levágott fonálrész nagysága között. Csigáim rövid idő alatt egytől-egyig mind visszaszerezték levágott végfonalaikat.

Rendellenes csak egy esetben volt a regeneratio lefolyása, a mikor minden szándékos beavatkozás nélkül villásan kettéágazó végfonál nőtt a levágott normális alakú helyén.

63. sz. csiga. III/26. d. e. mindkét végfonál fele lemetszve.

III/30. kis fehér sarjadékkúpok mindkét oldalt.

IV/21. bal normális alakú; jobb ellenben kétágú (!) fehér regeneratum.



2. rajz.

V/2. bal kész; jobb fehér, de teljes nagyságú, a villák vége bunkósan duzzadt. (2. rajz.)

V/26. jobb villás fonál is rendes, elhegyeződő végű és pigmentes.

Meg kell jegyeznem, hogy a végfonalat ollóval vágtam le, a vágás tehát simaszélű volt. Hogy miért fejlődött ki mégis villás végfonál, azt legfeljebb valami belső,

a szervezetet rendellenes fejlődésre terelő erő feltételezésével lehetne megmagyarázni.

Egészen hasonló villás végfonalakat írtam le (16.) a szabadban fogott *Nassa mutabilisek* testéről.

De hasonló, sőt még nagyobb mérvű villás elágazást sikerült kísérletileg előállítanom a sarjadzó kúp kettéhasítása által; ezekről a mesterségesen előállított villás végfonalokról azonban a XVI. fejezetben lesz szó.

VII. Az utóláb regenerációja.

A csigák utólába (*metapodium*) szinte önmagától kínálkozik csonkítási kísérletekre. Mint más helyen már láttuk, bizonyos tropusi csigák utólába autotómiával is bír.

A *Nassa mutabilis* példányai, egyetlen egy elpusztult egyének a kivételével, mind visszaszerezték utólábuk levágott kisebb-nagyobb darabjait. Összesen 76 darabon csonkítottam meg az utólábat, hogy a regeneratio menetét megfigyelhessem.

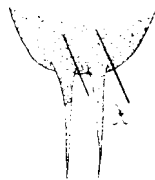
A sebzés legegyszerűbb módja az volt, hogy a lábon áthatoló bevágásokat tettem a csigán, a nélkül azonban, hogy az utóláb egyes részeit eltávolítottam volna. (3. rajz.) Az ilyen mély vágások nem tántogtak, a csiga a seb két szélét egymásra szoritotta, s a seb igen rövid idő alatt össze is forrt.

30. sz. csiga. III. 21. d. u. utóláb a végfonalak tövén egy cm-re bevágva.

III. 30. d. e. a seb simán összeforrt, helye sem látszik. (3. rajz.)

Hogyha azonban a vágás a test széléhez közel és azzal párhuzamos lefutású volt, a bemetszéstől kifelé eső testvég, minthogy a csiga nem tudta azt testéhez hozzászorítani, igen gyakran elhalt és levált az utóláb széléről. (4. rajz.)

Az elhalt és levált darab helyén azután épp úgy visszaszerezte a csiga a hiányzó részt, mint hogyha mindjárt kezdetben teljesen eltávolítottam volna.



3. rajz.

185. sz. csiga. IV. 9. az utóláb jobb szélével párhuzamosan mélyen bevágtam. (4. rajz, a).

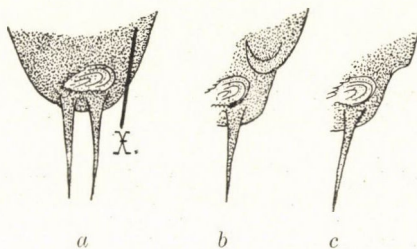
IV. 10. a vágástól kifelé eső rész felkunkorodott. (b).

IV. 12. a felkunkorodott és elhalt rész levált.

IV. 24. a hiányzó rész regenerálódni kezd. (c).

IV. 30. a regeneratio befejeződött.

Hogyha az utóláb végének kisebb-nagyobb darabját a végfonalakkal és az operculummal, esetleg a nélkül, levágjuk, a seb



4. rajz.

szélei nem zárulnak el olyan gyorsan, mint azt a végfonalakon végzett csonkítási kísérletekben láttuk.

A test ezen részében vonul végig a hatalmas lábizom, maga az utóláb is tekintélyes vastagságú. A láb végének levágásakor a seb szélei a szövetek tömörsége miatt nem birnak teljesen összehorolni és a sebet elzárni. A nyitott seb közepéből fehér színnel tűnik elő az izomzat.

A láb középvonalában lefutó hatalmas vérér elmetsett végéből kiömlő vér azonban csakhamar megalvad a seb felületén és mint egy kéregréteg bevonja azt. (Tábl. 1. kép.) Ez alatt a var alatt újabb nagymagvú apró sejtek (vérsejtek), a melyek a vérekből vándoroltak ki, több sorban egymás fölött szépen rétegbe rendeződnek. Körülbelül 5 órával a csonkítás után megkezdődik a hám sarjadzása.

A seb szélén álló épségben maradt hengeres hámsejtek megváltoztatják az alakjukat, ellaposodnak, magjuk, a mely kezdetben álló helyzetben volt, a sejtben vízszintes helyzetbe fordul, maguk a sejtek pedig oszlásnak indulnak, s az így keletkezett rendkívül lapos hámsejtek minden oldalról rá-

sarjadjanak a sebfelületre. Ezt a folyamatot már CARRIERE és TECHOW is észlelte a kerti csigán. A minden oldalról a sebre rásarjadjó hám a *Nassa mutabilis*en már egy nappal a sérülés után teljesen bevonja a sebfelületet.

A seb szélén álló hengeres hámsejtek ellapulásuk előtt $15\ \mu$ magasak, $7\text{--}8\ \mu$ szélesek voltak, megnyúlt magjuk, a mely álló helyzetben foglalt helyet, $6\ \mu$ magas és $3\text{--}4\ \mu$ széles lehetett. A mikor belőlük az új, rendkívül lapított hám keletkezett, az első nap végén mérve, az új hámsejtek $1.5\text{--}2\ \mu$ magasak, $6\text{--}7\ \mu$ szélesek voltak, a lekerekedett mag átmérője pedig körülbelül $3\ \mu$ volt. A második naptól kezdve a lapított hámsejtek magassága nőni kezdett (körülbelül $6\ \mu$), a sejtek koczkaalakúvá váltak és ettől kezdve egyre jobban nyúltak és a szomszédos ép hengeres hámsejtekhez mindinkább hasonlítottak. Mielőtt ez azonban még megtörtént volna, rendszeren a $2\text{--}3$. napon, azt észleltem, hogy a koczkaalakú új hámsejtek nemcsak a vízszintes síkban, hanem a függőleges irányban is oszlásnak indulnak és egyideig több rétegben vannak elhelyezve egymás felett, a mi rendes körülmények között a csiga hámján sohasem észlelhető. Ez az ideiglenes többrétegű hám körülbelül $5\ \mu$ széles és magas koczkaalakú vagy lekerekített sejtekből áll, a melyekben körülbelül $3\ \mu$ átmérőjű kerek mag van. Az alsó rétegek hámsejtjei előbb legömbölyödnek, majd csepp- vagy orsóalakúvá válnak, a számuk egyre fogy, úgy látszik bevándorolnak az alattuk levő szövetek közé. A $3\text{--}4$. napon az alsóbb rétegek hámsejtjei már egészen eltűntek, az új hám már csak egyrétegű és $15\ \mu$ magas, $7\ \mu$ széles hengeres hámsejtekből áll. (Tábl. 2. képe.)

A sejtek külső végeiken összeérnek és itt hamarosan kiválasztják azt a hártyszerű cuticularis szegélyt, a mely a normalis hengerhámra jellemző (l. a képen), de befelé néző végeiken az egyes hámsejtek elkeskenyedve, egy vagy több csücsökbe kihúzva végződnek. A sejtek közötti társsejtközi hézagok maradnak. Az új sejteket azonban alsó végükön is összeköti a kiválasztott alaphártya, a mely a fényképen szintén igen jól látszik.

Az $5\text{--}6$. napon már akadnak ezek között az új hám-

sejtek között egyesek, a melyek kissé nagyobbak a többi hámsejtnél, és a melyeknek plasmájában barna szemecskék kezdenek megjelenni. A keletkezõben levõ pigmentsejtek ezek. Rendesen csoportosan jelennek meg, egy-egy folton 8—10 festéksejt keletkezik a normalisan maradó többi hámsejt között. A pigmentsezemecskék száma egyre nõ ezekben a pigmentsejtekbén. Rövid idõ múlva olyannyira megtöltik a gömbölyû festékszemesek a sejtet, hogy a sejtmagot is elfödik. (Tábl. 3. kép.)

Ez a fénykép öt nappal a megcsonkítás után mutatja a már kész vagy éppen kialakuló pigmentsejteket normalis hámsejtek között. A pigmentsejtek mintegy 16—17 μ magasak és 10 μ szélesek, kissé nagyobbak tehát, mint a rendes hámsejtek. A pigmentsejtek száma egyre nõ, a sok festéksejt lassankint sötétre festi a visszaszerzett testrészt is. A festéket, a mely, mint láttuk, már az 5. napon jelenik meg, szabad szemmel csak mintegy két hét múlva lehet észrevenni a regenerált testrészben.

Az új hámsejtek még egy harmadik irányban is differenciálódnak. A festéksejtek kialakulása után kezdõdik meg a nyálkamirigysejtek fejlõdése.

A nyálkát elválasztó mirigysejtek elsõ nyomát körülbelül a 15. napon lehet észlelni a *Nassa* új hámjában.

Egyes hámsejtek az alattuk levõ kötõszövet felé megnyúlnak és egyre jobban lesülyednek az alattuk levõ szövetbe, de felsõ végükön nem válnak le a hámról, hanem azzal mindvégig összefüggésben maradnak. A fejlõdõ nyálkamirigysejt kezdetben széles alappal függ össze a hámmal, ez a nyél azonban egyre jobban megvékonyodik, a mint a sejt lejjebb sülyed, és sokszor egészen fonálszerüvé válik. Ez a lesülyedt, hosszú nyelû hámsejt átalakul mirigysejtté. Alsó tágabb részében elnyálkásodik és hólyagszerüen megduzzad. Az elnyálkásodás s a velejáró megduzzadás alulról felfelé egyre tovább halad, a keskeny fonálszerü kivezetõ rész is vastagra duzzad. A mirigysejt ilyenkor már teljesen kész és nem hasonlít egy hosszú nyakú lombikhoz, hanem olyan tág tömlõ, mint a csiga rendes nyálkamirigyei.

Néha 2—3 sejt együttesen sülyed le a hámból, ilyenkor

többsejtű mirigy lesz belőlük. A tábla 4. képén ábrázolt kialakulóban levő mirigy két sejtből áll, a mint azt a két magból látni, és a 116. sz. csiga 18 napos hámjából való. Ez a mirigy $70\ \mu$ hosszú, a környező $15\ \mu$ magas hámmal szemben, a csöves része mindössze $1.5\ \mu$ átmérővel bír, alsó duzzadt része ellenben $12\ \mu$ vastag.

A nyálkamirigyek ilyen kialakulását TECHOW a *Helixidák* regenerálódó szöveteiben észlelte, és az egész folyamatot részletesen le is írta és lerajzolta. A *Nassa* nyálkamirigyeinek kialakulása egészen olyanféle módon megy végbe, mint a TECHOW szárazföldi és édesvízi csigáin, azonban a *Nassa* jóval nagyobb visszaszerző képességének megfelelően jóval gyorsabban.

A hám kialakulásával egyidejűleg és azzal párhuzamosan megkezdődik a visszaszerzés az izomzatban is. A megcsonkítást követő 4—5. napon, az izomnyaláb elmetsett és kissé megduzzadt vége körül odavándorolt sejtek rendeződnek olyan módon, hogy az izomcsonktól az új hámig vonuló hidakat alkotnak. TECHOW azt írja, hogy ezek az odavándorolt, megnyúlt, orsóalakú sejtek átváltoznak izomrostokká az általa tanulmányozott csigák regenerálódó szövetében. A *Nassa mutabilis* regenerálódó izomrostjai nem ezekből az odavándorolt sejtekből alakulnak ki. Nézetem szerint ezek az orsóalakú odavándorolt sejtek támaszul, vezetőül szolgáló kötőszöveti hidak csupán, a melyek mentén indulnak fejlődésnek az új izomrostok. Az új izomrostok az elmetsett régieknek a végéből sarjadzanak ki.

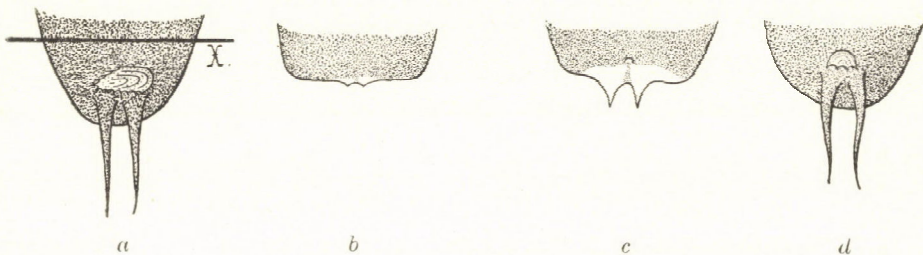
Az elmetzés helyén a régi izomnyalábok vége megduzzad, kissé szétpamatolódik, néha hátrafelé kunkorodnak az egyes rostok. Egyes nyalábok úgy látszik el is hálnak, összezsugorodnak és széjjelesnek.

A legtöbb elmetsett izomnyaláb vége azonban csupán megduzzad és világosabban festődik, de nem hal el. Már a 4—5. napon a régi izmok megduzzadt csonka végéből egyes finom, alig festhető vékony nyulványok kezdenek kisarjadzani az előbb említett odavándorolt kötőszöveti hidak mentén. Ezek a kezdetben alig vagy csak nehezen festhető fonalas nyulványok későbbben éppen úgy festődő és épp olyan fénytörésű rostokká alakulnak át, mint a minők a régi csonka izomnyaláb végének

rostjai. A régi nyáláb végéből kisarjadzó új izomelemek a tábla 5. képén is eléggé látszanak.

Az utóláb lemettszése után a sarjadék, melynek láttuk, mi módon alakulnak ki a szövetei, körülbelül 12 nap múlva olyan nagy már, hogy szabad szemmel is észrevehető.

Az 5. rajzon, a mely a 40. sz. állat levágott utólábának visszaszerzését ábrázolja, figyelemmel lehet kísérni a regeneratio előrehaladását.



5. rajz.

40. sz. csiga. 1912. IV. 4. utóláb a fedővel együtt lemettszve (X vonal mentén). (a).

IV. 17. kis fehér sarjadék a végfonalak nyomával. (b).

IV. 22. regeneratumon a fedő és a pigment nyomai észlelhetők. (c).

V. 22. visszaszerzett rész teljes, csak a fedő kicsi még. (d).

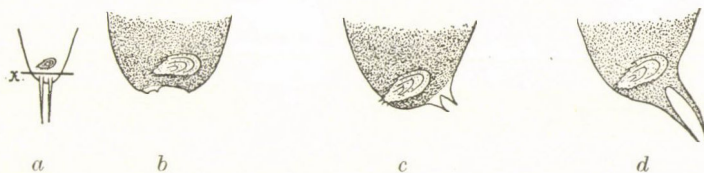
A mintegy 1 cm² nagyságú darab lemettszése után az első kis sarjadék a seb széléit bevonó fehér szalag alakjában 10—13 nappal a csonkítás után látszott meg (5. rajz, b). A két végfonálnak megfelelő csücskök is meglátszanak már. Öt nappal később a regenerált rész már hatalmasan fejlett, a fedő is megvan rajta már (c). Mintegy 48—50 nap alatt annyira kifejlődött a visszaszerzett rész s a színe is olyan sötét volt már, mint a láb épségben maradt részei, és csupán a kicsi új fedő jelezte azt, hogy itt visszaszerzett és nem normálisan fejlődött utólábakkal van dolgunk (d).

A regeneratio menete ebben és a legtöbb hasonló esetben teljesen rendes volt. A visszaszerzett részek a levágott eredetiek-

nek a helyén fejlődtek ki s olyan alakjuk is volt, mint az eredetieknek.

Észleltem azonban olyan eseteket is, a melyekben a visszaszerzés rendellenes lefolyású volt, mert a regenerált részek nem a metszési síkra (*x*) merőlegesen fejlődtek ki, mint pl. az előbb említett esetben, hanem a metszési síkra ferdeszög alatt s így ezek az esetek a BARFURTH-féle szabály alól kivételek.

A 28. sz. csigán pl., a melynek az utólábát a test hossz-tengelyére merőlegesen metszettem le, épp úgy, mint az előző esetben, a visszaszerzés nem a seb közepéből, hanem annak a balszéléből indult meg s maga a visszaszerzett rész helyzete nem volt merőleges a metszési síkra, hanem arra ferdén, még pedig meglehetősen hegyesszög alatt állott. (L. a 6. sz. rajzokat.) A kis sarjadékkúpok a seb belsőcskében indultak fejlődésnek (6. rajz, *b*) és növekedésük előrehaladásával az egész új metapodium-részlet a középvonalból jobbfelé erősen elesavarodott (l. 6. rajz, *c* és *d*).



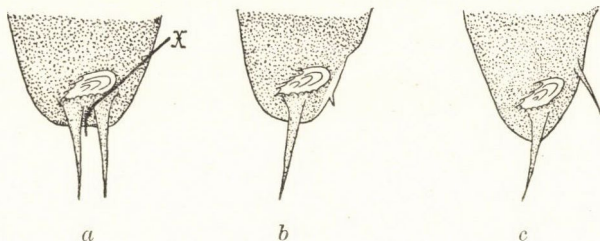
6. rajz.

Ezek az esetek csak úgy érthetők, ha felteszszük azt, hogy a seb jobboldali részén mélyreható táplálkozási zavarok voltak, a melyek megátolták a seb jobboldalának regenerálódását. A visszaszerzés csak baloldalt indult meg s az elmaradt jobboldali részek is itt a baloldalon fejlődtek ki.

A legtöbb esetben azonban a visszaszerzés szabályos lefolyású volt, a test éppen csak az eltávolított részt pótolta s a sarj a metszési felületre merőlegesen állott.

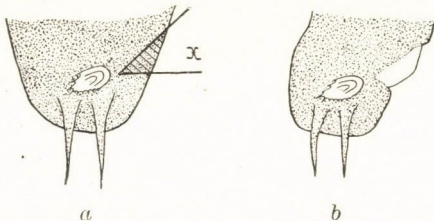
A 186. sz. csigán pl. (7. rajz) az utóláb jobboldalát úgy metszettem le (*x* vonal mentén), hogy a jobb végfonalat is levágtam. A seb összehúzódása folytán az egész ujonnan sarjadzó rész feljebb csúszott ugyan, de a visszaszerzés rendes lefolyású

volt, a mint az a rajz *b* és *c* ábrájából látszik. A *b* 13 napos, a *c* 27 napos korában ábrázolja a sarjadékot.



7. rajz.

A *Nassa* testében a polaritás is jól fejlett; megvan a megcsönkített testnek az a törekvése, hogy az eltávolított testrész helyén ugyanolyan helyzetű sarjat hozzon létre, mint a minő a régi testrész volt. A test végén levő vágás helyén, a mely pl. a végfonalakat távolította el, a seb hátrafelé néző részéből megint csak hátrafelé néző végfonalak fejlődnek ki, sohasem előlábi csücskök, vagy megfordítva. Ha olyan sebet ejtünk az állaton, a melynek egyik felülete előre, a másik hátrafelé néz (l. a 8. rajzot), akkor nem indul meg a sarjadzás mind a két sebfelületből, mint pl. a planariák testén hasonló csönkításkor, hanem csak az egyik sebfelületből sarjad ki a hiányzó rész.



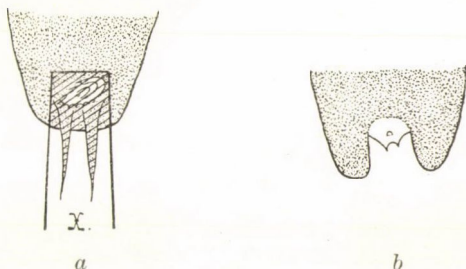
8. rajz.

A test első felében levő kétfelé néző sebből mindig csak az előrenéző oldalon, a test hátulsó felében levő két irányban tátongó sebből pedig mindig csak a hátrafelé néző oldalon indul meg a visszaszerzés, még pedig az illető sebfelületre merőlegesen.

Így látjuk ezt a 8. rajzon, a mely a 195. sz. csiga két

irányban nyitott sebét mutatja. IV. 10.-én az x -szel jelzett bevonalozott rész kivágása után, minthogy a sebesülés helye a test hátulsó végén az utólábon van, a sarjadzás a hátrafelé néző sebfelületből indul ki. A *b* ábrán a 12 napos sarjadék már csaknem kitöltötte az egész folytonossághiányt.

A 192. sz. csigának az utólábából három egymást metsző vágással kivágtam az utóláb azon részét, a melyen a fedő és a végfonalak vannak.

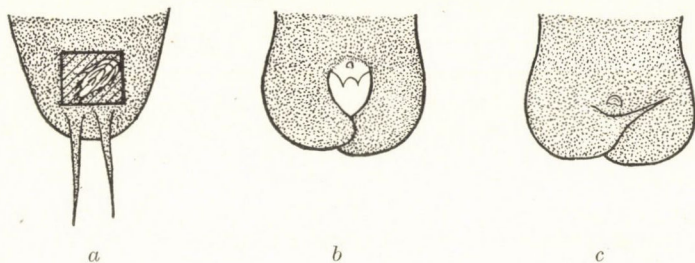


9. rajz.

A csonkítás módját a 9. rajz mutatja, az x -szel jelzett bevonalkázott lábrészletet IV. 10.-én távolítottam el. A sebnak mind a három széle összeforrt, a regeneratio azonban csupán csak a hátrafelé néző seboldalból indult meg, a mint az a rajznak 12 nappal később készült (*b*) részén látszik. A sarjadék lassan kitöltötte az egész tátongó ürt.

Egynéhány csigának az utólábából egy körülbelül $\frac{1}{2}$ cm² nagyságú négyszögletes darabbal együtt eltávolítottam a fedőjét. Az utólábon tehát nagy négyszögletes lyuk keletkezett. (L. a 10. rajzon, *a*). Azt reméltem, hogy ennek a négyszögletes lyuknak hátrafelé néző sebfelületéből megindul majd a sarjadzás s a sarjadék túlnő majd az épségben hagyott végfonalakon s a lyuk kitöltése után egymás fölött két utóláb részlete lesz az így megcsonkított csigának. Várakozásom azonban csak részben teljesült; nevezetesen a seb hátrafelé néző részéből megindult ugyan a sarjadzás s a regenerátumon ki is fejlődtek a fedő- és a végfonalak, de a régi végfonalak a környező lábrészlettel együtt elhaltak s pár nappal a csonkítás után kiestek, úgy hogy a

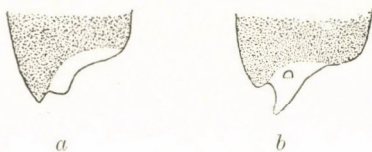
sérülés olyan képet mutatott, mint az előbb leírt és a 9. rajzon ábrázolt esetben.



10. rajz.

A 9. rajz *b* ábrájának a 10. rajz *b* ábrájával való összehasonlításából ez jól látható. Az utóbbi esetben a fejlődés sajátos rendellenes irányba vágott, úgy hogy furcsa torzképződmény (*c*) lett az utóláb helyén, ennek a kialakulása azonban a következő fejezetbe tartozik.

Néha az utóláb eltávolítása után az eltávolított testrésznél egyszerűbb fejlődött ki a régi helyén. A 222. sz. csigának (11. rajz) éppen úgy levágtam az utólábát a két végfonállal és a fedővel együtt, mint az 5. rajzon ábrázolt csigán.



11. rajz.

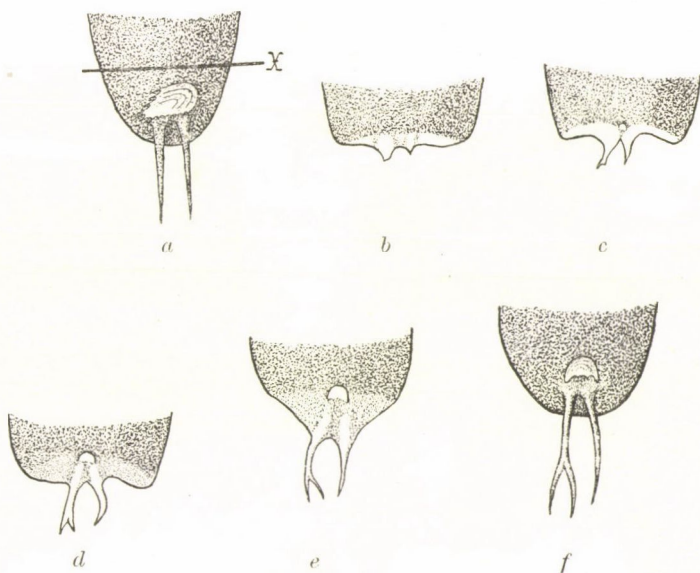
A sarjadzás egészen szabályosan megindult, 9 nappal a csonkítás után (11. rajz, *a*) már mintegy 2 mm széles, még fehér sarj nőtt ki a seb széléből, de azután, valószínűleg elégtelen táplálkozás folytán, a sarj csak lassan fejlődött s mint a 8 nappal később készült *b* rajzon látjuk, az eltávolított két végfonál helyén csak egyetlen vastag fonál fejlődött.

Régebben leírtam egy a szabad tengerből hozott *Nassát* (16.), a melynek éppen ilyen egyszerű volt az utólába.

Minden beavatkozás nélkül különös torzulás fejlődött ki a

31. sz. csigának visszaszerzett utólábán. Ennek a csigának, mint a 12. rajzon x -szel jelölve látható, III. 22.-én lemetszettem a fedővel együtt az utólábát.

A sarjadzás rendszeren megindult, de a mint a *b* ábrán látni, a regenerálódó részen a baloldali végfonál a jobbnál jóval erősebben fejlődött. A 4 nappal később készült *c* ábra a regenerálódó részt jóval előrehaladottabb fokon tünteti fel, a fedő is kifejlődött már, de a mi a legérdekesebb, a balvégfonál hegyén két kis csücsök látszik, jelezve, hogy ebből a fonálból villás képlet lesz. A *d*—*f* ábrán a villás fonál kialakulása figyelemmel kísérhető.



12. rajz.

31. sz. Nassa. III. 22.-én utólábát a fedővel együtt levágtam (12. rajz, *a*).

IV. 6. a kis sarjadékon a balkúp nagyobb (*b*).

IV. 10. a fedő megjelent, a balvégfonál kétcsücskű pigment (*c*).

IV. 13. a balfonál villás lesz, a pigment kifejlődött (*d*).

IV. 24. a regenerált rész 1 cm hosszú, a bal villa erősebb a jobbnál (*e*).

V. 17. a villás végfonál teljesen kialakult, mindkét ága érzékeny és mozgékony (*f*).

Ez az eset azért érdekes, mert villás fonál fejlődött ki az eltávolított egyszerű helyén, a nélkül, hogy a sarjadékkúpot kettéhasítottam volna. Éppen ilyen villás végfonalakat írtam le (16.) számos a szabadban fogott *Nassárról*, a melynek úgy látszik nagy hajlama van torzképződésre, de éppen ilyen, sőt még nagyobb mérvű villás torzulásokat sikerült kísérleti úton is előállítanom a sarjadékkúp kettéhasítása által. Ezekről a mesterségesen előállított torzképződményekről külön fejezet szól.

VIII. A fedő regenerációja.

A csigák utólabájának hátoldalán elhelyezett pánczéллеmeznek, a fedőnek (operculum) regenerációját alig ismerik. Bár a csigaház regenerációjával többen foglalkoztak, a fedő visszaszerzéséről csak három adat szól.

Az egyik még 1838-ból való és POWER JANETTE-től (28.) származik. Ez a hölgy Messinában különböző csigákat megcsontított s a regenerációra vonatkozó észleleteit közzétette. Ezek között a csigák között volt 10 db *Murex trunculus* is, melyeknek POWER szeptember 6.-án letépte a fedőit. Október 10-én kettő elpusztult, kettőnek a fedője nem regenerálódott, hat csiga azonban visszaszerezte letépett fedőjét. A szerző a kísérlet módját s a regeneratio menetét nem mondja el. Az egész czikk igen rövid és sem anatómiai vagy szövettani adatokat, sem pedig rajzokat nem tartalmaz.

A második adat új és TECHOW-tól (38.) való, a ki három évvel ezelőtt a csigaház regenerációjának vizsgálata közben a *Pululinán*, tehát édesvízi csigán megkísérlette a fedő regenerálódásának tanulmányozását. Az eredmény negatív volt. Tizenhárom *Puludina viviparának* távolította el a fedőjét s a megoperált csigák három hónapon belül mind elpusztultak, anélkül, hogy a regenerációnak csak nyomait is észlelhette volna rajtuk.

TECHOW negatív eredményével szemben az én (17.) vizsgálá-

lataim, amelyeket a *Murex brandaris*-en végeztem, eredményesen végződtek. Az új fedő minden esetben már 25 nappal a régi letépése után szabad szemmel is jól látszott és teljes nagyságát kb. 5 hónap alatt érte el. Ezen vizsgálataimból kitűnik, hogy a biborcsiga elvesztett fedőjét vissza tudja szerezni és hogy a regeneratio menete annál gyorsabb, mennél nagyobb az eltávolított fedőrész; leggyorsabb akkor, ha az egész fedőt letépjük. A fedő letépése után a környező hám rásarjadzik a sebfelületre, azt bevonja és átalakul a fedő anyagát elválasztó mirigysejteké.

A biborcsiga fedőjének visszaszerzésére vonatkozó megfigyeléseimet most megtoldhatom a *Nassa* fedőjének regenerálódására vonatkozó vizsgálataim eredményével. Összesen 83 *Nassán* végeztem ebben az irányban kísérleteket, amelyek igen szépen sikerültek. Csak egyetlen egy csigám pusztult el öt nappal a csonkítás után.

A csonkítást kétféleképpen végeztem: vagy csak a fedőt távolítottam el az állat testéről, de a lábat magát épségben hagytam; vagy pedig, az esetek túlnyomó többségében, levágtam a fedővel együtt a csiga talpának a hátulsó végét is.

Az első esetben úgy jártam el, hogy erős csipeszszel megfogtam a fedőt és lehetőleg óvatosan lefeszítve, késsel leválasztottam tapadása helyéről. Bár lehetőleg kerültem a lágyrészek megsértését, mégis legtöbbször kb. 3—4 mm hosszú és 1—2 mm széles sebet ejtettem a csigán.

Az állatok a csonkítás után mélyen visszahúzódtak a házukba és csak kb. 1—2 óra múlva bujtak ismét elő; de ekkor azután éppen úgy viselkedtek mint az épek.

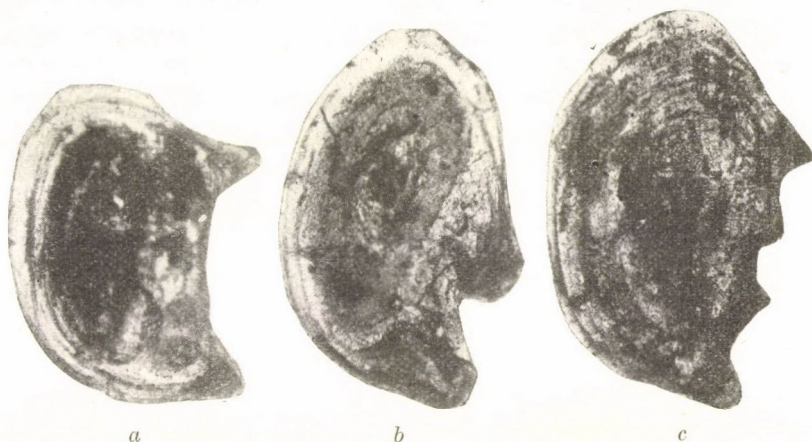
Ha a fedőt letéptem, de a metapodiumot épségben hagytam, a láb izomzatának az a kis darabja, a melyet eddig a hozzánőtt fedő borított, szabadra került. A sebfelületet itt is elsősorban vérárvadék zárja el. Ezalatt az árvadék alatt a vérekből odavándorolt nagymagvu sejtek sorokba rendeződnek. A hám regenerációja csak 7—8 nap múlva kezdődik meg. A sebet körülvevő hám sejtjei minden oldalról rásarjadzanak a sebfelületre és beboltozzák azt. Ezek a sebet bevonó hámsejtek részben a megmaradt fedőtkészítő mirigyes sejtekből, részben

pedig a metapodium sok nyálkakehelysejtet és pigmentsejtet tartalmazó rendes hámjából keletkeznek. Ezek a háromféleképpen differenciálódott hámsejtek, a melyek a sebet körülvették, gyorsan oszlanak, egészen egyformán ellapulnak és lapított pikelyalakúvá válnak, de a magjuk kerek marad. Ilyen lapos hámsejtek vonják be egy rétegben a sebet kb. a 9. napon. Ettől kezdve a lapos sejtek duzzadni kezdenek, koczkaalakúvá, majd pedig hengeressé válnak. Közben egyre oszlanak tangentialis irányban és egyre jobban összenyomják egymást, úgy hogy kb. két hét múlva a letépett fedő helyén hosszúra megnyúlt, tömötten álló pálczikaalakú sejteket találunk. (Tábl. 7. kép.) Plasmájukban most erősen fénytörő apró rögöcskék kezdenek megjelenni, a melyek megtöltik a sejtek külső végét. Ezek a rögöcskék a sejt külső végén összeragadnak, rétegbe rendeződnek és vékony hárttyát alkotnak. Metszeteken átlag kb. 20 nappal a csonkítás után már igen jól lehet ezt a hárttyát látni. Rendszeren már több rétegből áll. (Tábl. 7. kép.)

Szabadszemmel azonban átlag csak 25—50 nap múlva lehet a letépett fedő helyén egy finom fehér hárttyát észrevenni. Ez a hárttya a visszaszerzett fedő első nyoma. A fedő anyagát elválasztó mirigyes hámsejtek kezdetben csak a seb helyén alakulnak ki s ez a jól körülírt folt rendszeren szemölcyszerűen kiemelkedik a metapodium hátoldalából. (Tábl. 6. kép.) Ennek a foltnak az alakja szarvaival hátrafelé álló félholdhoz hasonlít. A sejtek ennek a foltnak a területén egyre készítik az új chitinszerű anyagból álló rétegeket, a melyek az új fedőt vastagítják. Közben a meghatározott, félholdalakú foltnak a szélén lévő sejtek is átalakulnak fedőkészítő mirigyes sejtekké a folt domború részei körül, s így a félholdalakú fedőszemölcs domború oldala körül új mirigysejtöv keletkezik. Azok a sejtek, a melyek ebben az övben vannak, szintén hozzájárulnak a fedő készítéséhez, és csakhamar megjelennek a fedőn az első növekedési övek (13. rajz a, b). Ezek a növekedési övek a fedőt csak domború oldala felől övezik, a homorú oldalán eredeti állapotban marad a fedő.

Közben azonban a régi folt területén levő mirigyes hámsejtjei is egyre újabb és újabb réteget készítenek a már meg-

levő fedőhöz, az új fedő ezen része tehát vastagabb és sötétebb színű mint a szélei és ezáltal a világosabb növekedési övek még inkább szembetűnnek.



13. rajz.

A kezdetben függélyesen álló fedőkészítő hámsejtek később mindinkább hátradülnek és csakhamar mintegy 60° -nyi szögben hajlanak hátrafelé. Ennek a hátrahajlásnak és annak, hogy fedő csak az elülső domború részen növekedik, az a következménye, hogy az újonnan elválasztott fedőrétegek maguk előtt tolják hátrafelé a fedőt. Nemsokára a fedő hátulsó homorú és két csücsökbe kihúzott széle túlemelkedik a szemölcs hátulsó szélén és arról, mint az emberi köröm az ujjpercz végén, hátrafelé eláll. Maga a fedőszemölcs is megváltoztatja az alakját; mintha az egész szemölcsöt hátrafelé nyomta volna egy fölötte elülről hátrafelé végigsimító erő: elején alig emelkedik ki a talp hámjából, hátulsó részén ellenben magasra kiáll és olyan mint egy hátrafelé hajló félholdalakú bőrredő vagy pikkely. (Tábla 6. képe.)

A fedőszemölcs domború oldalán az új hámsejtövek a kialakulása nem lassankint történik, hanem ugrásszerű szakaszokban megy végbe. A 2—3. hónapban hirtelen, meglehetősen széles, mintegy két miliméteres új öv keletkezik a fedőszemölcs domború oldalán. Ezeknek az új mirigyes sejteknek a

kialakulása meglátszik csakhamar a fedőn, a melynek kezdetben csak két hátrafelé álló csücske volt. Az újonnan keletkezett mirigyes sejt-öv hátulsó végének megfelelően két újabb csücsök keletkezik a fedő hátulsó végén. (13. rajz c.) Néha ez már a második hónapban megtörténik. Így alakulnak ki a *Nassa nutabilis* fedőjének hátulsó szélére olyan jellemző fogacskák. A normális fedőn HONIGMANN (22.) szerint 14 ilyen fogacska van, de sokszor több vagy kevesebb a számuk. Ezek a fogacskák a fedő ajakszegélyén sűrűbben állanak, mert itt kisebb időközökben fejlődnek ki új mirigysejtövek a fedőszemölcsön mint a tengelyszegély felőli oldalon.

Ha nemcsak a fedőt téptem le a csiga testéről, hanem a fedővel együtt levágtam a talp végét is, a fedő regenerációja, daczára annak, hogy aránytalanul többet kellett a csigának visszaszereznie, mégis gyorsabb volt. Már kb. 18—20 nappal az operatio után szabadszemmel is jól látható alakban ott volt az új, fehér hártás fedő a regenerált utóláb megfelelő helyén. (l. az 5, 9, 12 stb rajzot.)

Hogy mennyivel gyorsabb volt a regeneratio menete, ha a fedővel együtt a talp végét is levágtam, mint hogyha csak magát a fedőt távolítottam el, az naplóm két találomra kivett adatának összehasonlításából is kitűnik.

47. sz. csiga. III 25. d. e. fedőjét letéptem.

V 2. új fedő első nyoma fehér hártya alakjában (38 nap.)

V 12. az új fedő már jól látható.

Ezzel szemben:

40. sz. csiga. IV 4 d. u. metapodium vége a fedővel együtt levágva. (5. rajz a.)

IV 17. fehér metapodium regenerációs végfonalakkal.

IV 22. az új fedő is jól látszik már (5 rajz) (18 nap.)

VI 12. a visszaszerzett fedőt letéptem. (13. rajz a.)

A második esetben a 40. sz. csigán az új fedő a csonkítás utáni 18. napon már olyan jól volt kifejlődve, mint a 47. sz. csigán a fedő letépését követő 48. napon.

Itt is érvényes az a szabály, hogy annál gyorsabb a fedő regenerációja, mennél nagyobb testrészszel együtt távolították el. Nem ritkaság, hogy 10—12 nappal a csonkítás után a rege-

nerált fedő már jól látható kb. 2 mm hosszú és 1 mm széles fehér hártya alakjában.

Az 5, 9, 10, 12 számú rajz összehasonlításából is kiviláglik ez.

Néhány csigán a fedőt a talpnak egy négyszögletes darabjával együtt kivágtam, úgy hogy a metapodiumon nagy négyszögletes luk keletkezett. (A 10. rajzon a bevonalkázott rész.) Azt reméltem, hogy a négyszögletes nyílás hátrafelé néző (tehát elülső) falából fedővel és végfonalakkal ellátott új metapodium fog kinőni s így olyan csigát hozok létre, a melynek egymás fölött két metapodiuma lesz. Várakozásomban azonban csalódtam, mert a vágott luktól hátrafelé eső metapodium-részlet elhalt és 3—5 nap alatt kiesett (10. rajz b), úgy hogy a seb olyan alakú lett, mint a 192 sz. csigáé, a mely a 9. rajzon látható. A regeneratio az elhalt testrész leválása után rendesen folyt le; a seb közepéből hátrafelé kisarjadzott a metapodium hiányzó része, a melyen kifejlődtek a fedő és a végfonalak. A sarjadzó új szövet lassan kitöltötte az egész patkóalakú hézagot.

A fedőnek egy négyszögletes metapodiumdarabbal együtt való kivágása után azonban nem mindig ilyen simán folyt le a regeneratio. A 198 sz. csigán (10. rajz) a négyszögletes luktól hátrafelé eső lábész elhalása és kiesése után a sebnek nemcsak első széle, hanem oldalfalai is sarjadzani kezdtek. A seb elülső széléből éppen úgy kifejlődött az új metapodium a fedővel és a végfonalakkal együtt, mint az előző esetekben; de a seb szélei is sarjadzásnak indultak, egyre jobban közeledett tehát a test két hátulsó csonka karéja a középvonalban egymáshoz. V 5.-én a két növekedő karéj találkozott egymással a középvonalban és összenőtt, még pedig úgy, hogy a baloldali karéj feljebb került és ráborult szélével a jobbra (c). Az összenőtt karéjok előtt a test közepén egyideig még nyílás maradt, melyet azonban egyre jobban kitöltött az elülről, a seb elülső széléből, hátrafelé növekedő új metapodium-részlet. Ezen a metapodium-részleten, mint az a rajzon is jól látható, nemcsak a fedő regenerálódott, hanem kifejlődtek a végfonalak is. Lassankint ez az egyre jobban növekedő új metapodium-rész kitöltötte az ösz-

szenőtt oldalkarékjok előtt maradt lukat, a regenerált végfonalak pedig, a mint a metapodium elérte az összenőtt karékjokat, visszafejlődtek s az új metapodium összenőtt az oldalkarékjokkal.

Az összenőtt oldalkarékjok előtt levő luk tehát eltűnt. Ezek közül az összenőtt oldalkarékjok közül a baloldalin, a mely felülre került, később kifejlődött egy páratlan végfonál, az alul levő jobbkarékjón végfonál nem keletkezett.

Igy alakult ki az a sajátságos torzulás, a melyet a VI 12.-én készült rajz híven ábrázol. A fedő, mint látható, szabályosan fejlett. (10. rajz c.)

A fedő ismételt eltávolítás után is újból kifejlődik. Sőt úgy látszik, hogy a regeneratio menete ismételt csonkítások után, gyorsabb.

Az 1. számú csigának pl. háromszor egymásután levágtam az éppen visszaszerzett metapodiumát a fedővel együtt s az időközök, a melyekre az állatnak fedőjének visszaszerzéséhez szüksége volt, egyre kisebbedtek.

1. sz. (a) csiga. III 22.-én levágtam metapodiumát a fedővel.

IV 11.-én a regenerált metapodiumon az új fedő 2 mm nagy.
(20 nap.)

1. sz. (b) csiga. IV 11.-én levágtam új metapodiumát a fedővel.

IV 29.-én a regenerált metapodiumon az új fedő 2 mm nagy.
(18 nap.)

1. sz. (c) csiga. V 2.-án regenerált metapodium új fedővel, levágom.

V 19.-én a regenerált metapodiumon az új fedő 2 mm nagy.
(17 nap.)

A háromszori csonkítás daczára a csiga visszaszerzé erejét, tehát nem merült ki, sőt ellenkezőleg még fokozódott. Mert míg 2 mm nagyságú fedő visszaszerzéséhez az első megcsonkítás után 20 napra volt szüksége az állatnak, addig a regenerált fedőnek másodszori eltávolítása után ugyanolyan nagy új fedő visszaszerzéséhez már csak 18 nap kellett, a harmadszori megcsonkítás után pedig 17 nap alatt növesztette meg ugyanakkorára harmadszor is visszaszerzett fedőjét.

Itt emlitem meg azt is, hogy torzult, illetve kettős fedőt mesterségesen nem sikerült előállítanom. HONIGMANN (22.) nápolyi tartózkodásom alatt 1500 *Nassa mutabilis* fedőjének átvizsgálása után két dupla fedőt talált. Ezek a fedők olyanok voltak, mintha a rendes fedőnek a hátoldalából hegyes szög alatt egy kisebb fedő nőtt volna ki.

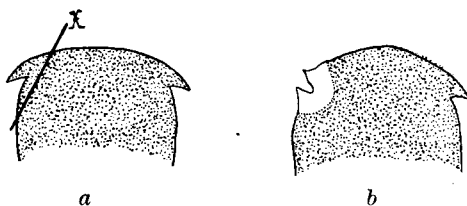
Ilyen torzult fedőket szerettem volna mesterséges úton előállítani.

Úgy jártam el, hogy a fiatal regenerált fedőt kettéhasítottam. Az újonnan elválasztott fedőállományból álló hártvány azonban mindig összeragasztották a kettéhasított fedőt, a mely később csak abban különbözött a rendestől, hogy hátoldalán a kettéhasítás nyomán barázda maradt, alsó rétegei azonban összefüggően fejlődtek ki.

IX. Az előláb csücskeinek regenerációja.

A propodium két oldalán levő fülszerű csücsköket 17 esetben vágtam le a csiga lábáról.

Az esetek legnagyobb részében simán és nagyon gyorsan visszaszerezte a csiga a levágott lábrészletét. A visszaszerzett előlábi csücskök két-három hét alatt rendesen elérték a levágott réginek a nagyságát, csupán pigmentjük volt még kevesebb.



14. rajz.

Ha a csücskőkön kívül a lábnak a csücskök mögött fekvő részéből is levágtam egy darabot, a regeneratum rendesen úgy indult, mintha a levágott csücsök helyén kettő akarna keletkezni, mint az a 199. sz. csigáról készült 14. rajzon látható (b).

A 199 sz. csigának IV 10.-én d. u. levágtam bal csücskét a láb oldalának darabjával (a).

IV 24. kétsücskű fehér regeneratum (b).

V 5. már normális alakú, de még fehér.

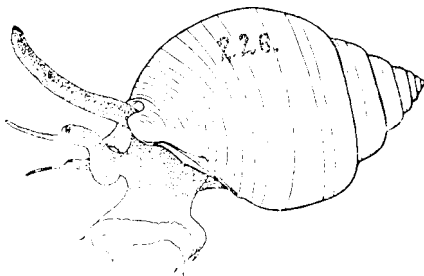
Ha a láb egész elejét levágtam mind a két csücsökkel együtt, a regeneratio akkor is rövid idő alatt bekövetkezett, a visszaszerzett rész azonban sokkal kisebb volt a levágottnál és csak jóval később nyerte vissza eredeti nagyságát.

Megemlítem, hogy a fiatal előlábi csücsök-regeneratumoknak kettéhasítása által kettős csücsköket sikerült előállítanom, (21. rajz), de erről az utolsó fejezeiben részletesen lesz szó.

X. Az egész láb regenerációja.

Öt csigának levágtam az egész lábát. Ezek közül egy az operatio utáni első éjjel elpusztult, a többi négy azonban életben maradt és aránylag rendkívül rövid idő alatt visszaszerezte egész levágott lábát. (15. rajz.)

A csonkítás után az állatok mélyen visszahúzódtak házukba szörnyű sebükkel, de már 5 óra múlva kidugták siphójukat és



15. rajz.

épségben hagyott tapogatóikat a ház szájadékából. A második naptól kezdve táplálkoztak is. A csigaház oldalt feküdt s szájadéka elé odatettem egy-egy darab halhúst, s a csigák bár mozdulni nem tudtak, messzire kinyújtott orrmányukkal elérték a húst és annak egy részét meg is ették; különösen jól sikerült ez, ha fogtam a húst és így meggátoltam abban, hogy elcsúszson a csiga orrmánya elől.

A regeneratio előrehaladását nem figyelhettem meg, mert a csiga sohasem jött ki annyira házából, hogy a sebet jól láthattam volna. Három-négy hét alatt azonban annyira kinőtt az új láb, hogy a csiga már mászni is tudott rajta.

A 226 sz. csigának V 3.-án levágtam az egész lábát.

VI 3.-án már az egész lábát visszaszerezte. (15. rajz.)

A visszaszerzett láb ekkor még igen kicsi volt és alig volt benne még pigment, de minden szerv megvolt már rajta.

Kifejlődtek a nyálmirigyek, a középső nagy talpmirigy, melynek nyílása a rajzon is jól látszik, az előlábi csücskök, az utólábi végfonalak és a fedő. A láb belsejének is kifejlődött minden része. Ezek az esetek is a *Nassa mutabilis* óriási visszaszerző képességéről tesznek tanubizonyságot.

XI. A tapogató, szem és homlok regenerációjára vonatkozó irodalom.

Hogy egyes csigafajok levágott tapogatójukat és fejük hiányzó részeit vissza tudják szerezni, azt már 1768-ban megállapította SPALLANZANI (37.); az az állítása azonban, hogy a csigák teljesen levágott fejüket újból megnövesztik, tévedésen alapult. Mintegy 50 évvel SPALLANZANI munkájának megjelenése után SCHWEIGGER átvizsgálta SPALLANZANI konzervált csigáit és a «lefejezett» csigák mindegyikében megtalálta az agyduczot. Bár tehát SPALLANZANI tévedett, a mikor azt állította, hogy a csigák levágott fejüket újból megnövesztik, mégis éppen ez az állítása hívta fel kortársai figyelmét a csigákra és rövid idő alatt nagyon sokan foglalkoztak a csigák lefejezésével és megfigyelésével; kísérleteik eredményét többen le is írták. De ezek a kísérletezők olyan nagy felületességgel és naivitással jártak el, hogy feljegyzéseiket figyelmen kívül kell hagynunk.

Különben CARRIERE (8.) alapvető munkájában mind ezek a kísérletek részletesen le vannak írva.

CARRIERE (8) nagyobb számú házas csigának levágta a fejét a garatföldről duczokkal együtt, de ebbe a súlyos sérülésbe belepusztultak a csigák. A mikor ellenben csak a két tapogatót és a homlok szélét vágta le, két esetben kedvező eredményt ért el,

mert már 41 nap alatt mintegy 1 mm nagyságú regenerált kúpokat észlelt, a melyeken a sötét szemfoltot is megkülönböztethette.

A regeneratio gyorsasága egyénenkint változott. Leggyorsabb volt a szövetek sarjadzása április és május hóban. Megállapította, hogy egyenlő idő alatt az egyes egyének testén ugyanazon fajon belül is különböző nagyságú darabok regenerálódtak. Meztelen csigákon az eltávolított tapogatók és szemek visszaszerzését nem figyelhette meg, mert a meztelen csigák mind elpusztultak.

ČERNÝ (10.) *Planorbisok*, *Limneák*- és *Paludinák* levágott tapogatóinak a helyén már 14 nap mulva kis, növekedő sarjadék-kúpokat észlelt. A *Limneus stagnalis*-szal végzett kísérletei ellenben nem adtak eredményt, mert a csigák elpusztultak. A *Paludinák* himjének levágta a jobb tapogatóját, a mely tudvalevőleg párosodó szervül szolgál és bunkós. Az így megcsonkítottak közül 40% elpusztult, a maradékon csak mintegy három hónap mulva észlelhette a levágott tapogató helyén az újnak a kisarjadzását, a mely azonban sohasem fejlődött bunkós párosodó szervvé.

CARRIERE-rel szemben ČERNÝ-nek sikerült meztelen csigákon, még pedig 24 db *Limax arborum*-on a levágott jobb tapogató visszaszerzését észlelnie, s kb. egy hónap mulva szemfolt is keletkezett.

MEGUŠAR (24.) négy *Limnea* megcsonkított tapogatóinak helyén három hét mulva látott kis sarjadékkúpot kifejlődni. Ezek közül egyik a szemét is visszaszerezte.

TECHOW (39.) több fajta házascsigán észlelte a tapogatók, részben pedig az eltávolított szemek regenerációját. Legkevesebbé sikerültek kísérletei a *Limneák*-kal; 60 megoperált közül négy hónap alatt 42 db elpusztult, csak két darabon ért el a visszaszerzett tapogató 2 mm hosszúságot, a többin még ennél is kisebb maradt a sarjadék, vagy pedig egyáltalában ki sem fejlődött.

Megoperált *Planorbis*-ai közül csak 22 db halt el, a többin, kevés kivétellel, a melyek nem szerezték vissza levágott tapogatójukat, jól megfigyelhette a visszaszerzés menetét. Ren-



desen már két hét múlva észlelhette a fehér sarjadék-kúpot a csonk helyén. Kb. 30—40 nap alatt a visszaszerzett tapogató elérte a réginek a nagyságát.

Meglehetősen sikerültek *Paludiná*-kon végzett kísérletei, bár 3 mm-nél hosszabb tapogató regeneratutumot nem tudott elérni. A regeneratio első nyomát csak hat hét múlva észlelhette. *Paludinái* közül ötnek a szeme is regenerálódott, de ezek közül csak egyen látszott az új szem szabad szemmel, a másik négyen csak metszeteken lehetett kimutatni.

Szárazföldi csigáink közül *Helix pomatia*-, *arbustorum*, *Arion empiricorum* és *Limax marimus*-szal kísérletezett.

A nyári hónapokban összesen 147 db-ot csonkitott meg, de ezek közül csak 19 szerezte vissza a szemét. Ősszel újabb 169 db *Helix arbustorumot* csonkitott meg, de ezek kettő kivételével mind elpusztultak a tél folyamán, s csak hat darabon észlelhette még elpusztulásuk előtt a visszaszerzett szemhólyag első nyomait. Az eredmény tehát nem valami kedvező. TECHOW-nak a tapogatók ezek és a szemnek regenerációjára vonatkozó vizsgálatait a következőben foglalhatjuk össze: A vízicsigák közül a levagott tapogatóikat a *Planorbisok* szerezik vissza leghamarabb és legtökéletesebben, a *Limnák* a leglassabban és legtökéletlenebben. *Paludinán* észlelte a szem regenerációját is, s egynehány stádiumot szövettanilag is leírt. A szem regenerációját szárazföldi csigákon is észlelte és leírta, hogy az a már CARRIERE által ismertetett módon megy véghez; hogy t. i. a külhámból betüremlés útján fejlődik ki a szemhólyag és a jövődöbéli retinának megfelelő helyen lévő sejtek pálczikaalakuan megnyúlnak. A lencse elválasztás útján jön létre.

XII. A tapogatók és a homlok regenerációja.

A tapogatók visszaszerzésének lefolyását 69 Nassán figyelem meg. Ezeknek vagy mind a két, vagy csak az egyik tapogatóját vágtam le, még pedig vagy csak a hegyét, vagy félig, vagy pedig töből; az utóbbi esetekben természetesen eltávolítottam a tapogató közepén ülő szemet is.

Kilencz esetben a két tapogatóval egyidejűleg eltávolítottam

a tapogatókat összekötő homloklebenyt is, a nélkül azonban, hogy a garatfölrötti duczokat különösebben megsértettem volna. Egyetlenegy csigám sem pusztult el.

A regenerált tapogató kis fehér kúp alakjában jelentkezik és 7—8 nap múlva mint a seb közepéből kisarjadzó fehér kúp szabad szemmel is igen jól észrevehető.

Ha összehasonlítjuk ezt az adatot régebbi szerzőknek más csigafajokon végzett hasonló kísérleteinek eredményével, csodálkozunk kell a *Nassa* hatalmas visszaszerző erején. *CARRIERE Helix*ein 41 nap múlva, *ČERNÝ Planorbis*ain már 14 nap múlva, *Paludin*áin pedig 2—3 hónap múlva észlelte a sarjadékkúpot, *Limne*ái ellenben egyáltalában nem szerezték vissza levágott tapogatóikat. *MEGUŠAR Limne*ái 3 hét múlva tüntették fel a sarjadékkúpot. *TECHOW Limaci*ákon 2 hónap múlva, *Planorbis*okon körülbelül 14 nap múlva, *Paludin*ákon 6 hét múlva, *Helix*eken pedig mindig csak legalább 5 hét eltelte után észlelte a sarjadzás első nyomait.

Ezeknek az adatoknak az összehasonlításából kitűnik, hogy *Nass*dím félannyi idő alatt (7 nap) már annyira előrehaladtak tapogatóik visszaszerzésében, a mint az eddig leggyorsabban regenerálóknak ismert *Planorbis*ok. (14 nap.)

Az első, szabad szemmel is látható sarjadékkúp megjelenése után a tapogató teljes kialakulásig is éppen ilyen gyors ütemben halad a fejlődés tovább.

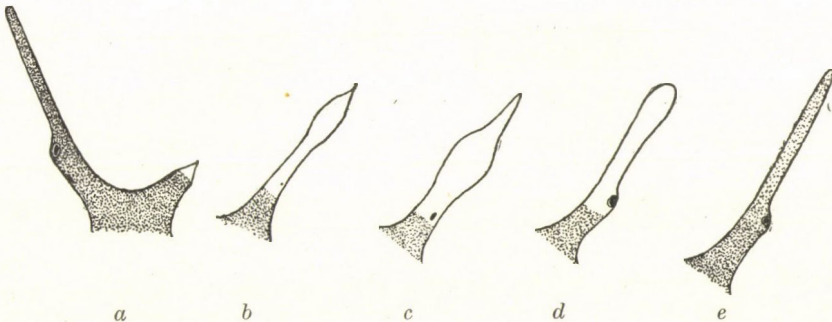
A visszaszerzett tapogató első nyoma széles alapú és felfelé gyorsan elhegyesedő kúp. Ez a kezdetben rövid és zömök fehér kúp napról-napra jobban megnyúlik; 10—12 nap múlva kinyújtott állapotban eléri a réGINEK a felét. Rendesen 12—15 nap múlva (néha valamivel hamarább) megjelenik az új tapogaton egy kis fekete folt, ez a fejlődő szeme a csigának. A mikor így fekete foltnak látszik a szem, akkor már a szemhólyag zárt, az ideghártya kialakult nagyrészt és a fekete festék kezd a sejtek közé letelepedni. Éppen ezek a festékszemcsék teszik a szemet fekete pötty alakjában észrevehetővé körülbelül a 15. napon. De magának a szemhólyagnak a kialakulása még jóval előbb kezdődik, mint azt a következő fejezetben látni fogjuk. A tapogató egyre nő, erősödik és hosszabbodik, de még egé-

szen fehér, csak a szemfolt fekete és egyre jobban látható. Az is nő.

A pigment lerakódása a tapogató sejtjeiben körülbelül a 18—20. napon kezdődik meg, de szabad szemmel rendesen csak 28—30 nap múlva látszik meg a nyoma; ekkor kezd a visszaszerzett tapogató barnulni. Másfél hónap múlva a visszaszerzett tapogatót nem lehet az eredetitől megkülönböztetni, teljesen olyan színű és nagyságú, csak a szeme kisebb néha a réginél.

Egyes esetekben a regenerálódó tapogató körülbelül a második és harmadik héten sajátságos kidudorodást lehetett észlelni.

A tapogató alsó, de már regenerált része nyélszerűen elvékonyodott, hegye felé ellenben vastagságának a két-, néha a



16. rajz.

háromszorosára duzzadt, feldagadt, a leghegye azután hirtelenül elvékonyodott. Ezt a furcsa duzzadt állapotot néha 20 napig is figyelhettem, de körülbelül ennyi idő eltelte után lassankint eltűnt, lelohadt s a tapogató ismét visszanyerte szabályos alakját. Valószínűnek tartom, hogy a tapogató végének ezt az átmenetileg gyakrabban észlelt megduzzadását a tápláló nedvek túlbősége okozza. A tapogató végében gyorsan oszló szövet felé nagy mennyiségben áramlik a vér s minthogy az odaáramlott vér nagy nyomásának nem bír eléggé ellenállni az új tapogató vékony fala, az a végén bunkósan megduzzad.

Így pl. a 12. sz. csiga levágott jobb csapja regenerációjának

menetében a 16. rajzon észlelhetjük a visszaszerzés minden módosztatát, a duzzanat keletkezésével és eltűnésével együtt.

12. sz. Nassa. 1912. III. 21. d. e. jobb tapogatója a szemmel együtt le.

IV. 2. csonkon fehér regenerált kúp (16. rajz, *a*).

IV. 6. a regeneratum fele a réginek.

IV. 9. a regeneratum vége bunkósan duzzadt, a szem kis folt alakjában látszik. (16. rajz, *b*).

IV. 10. a szem jól látható, a duzzadás nagyobb. (16. rajz, *c*).

IV. 22. a regeneratum kezd színeződni. (Pigment.)

IV. 30. a duzzadás lelohadt. (16. rajz, *d*).

V. 15. teljesen normalis alakú, kész. (16. rajz, *e* és Tábl. 12. kép.)

Ennek a 60 napos, teljesen visszaszerzett tapogatónak a szeme is teljesen kifejlett és eredeti nagyságát is elérte. (Tábl. 12. kép.)

Némely esetben az egészen egyformán levágott tapogatók helyén egyenlőtlenül fejlődtek a sarjadékok, az egyik sokkal gyorsabban nő és hamarabb alakul ki a szem is rajta, mint a másikon. Csak hogyha már teljesen kifejlődött, kezdett a túloldali tapogató is gyorsabban növekedni.

Érdekes, hogy azokban az esetekben, a mikor az egyik oldal rovására gyorsabban fejlődött a másik oldali tapogató, a fejlődésében sokkal gyorsabb volt, mint a rendes lefolyású esetekben, a hol egyformán nőttek az új tapogatók.

Mintha két tapogató visszaszerzésére való erőt és táplálékot kapott volna az az egy; sokkal gyorsabban fejlődött, mint a normalis viszonyok között levők. A szemfolt is már a 10. napon rendkívül jól látszott. Az ilyen túlgyorsan fejlődő tapogatón három esetben észlelhettem ki nem egyenesíthető torzulásos görbülést, mint pl. a 17. rajzon, mely a 131. sz. csiga egyenlőtlen és torzult tapogatóját mutatja be az egyenlő megcsonkítás után 10 (!) nappal.

131. sz. Nassa. 1912. III. 27. d. e. mindkét tapogató szemmel együtt le.

IV. 9. bal háromszor akkora, mint a jobb és görbe, jól fejlett szemmel. (17. rajz.)

A tapogatók ismételt csonkítását is jól tűrték a csigák és a szem is újból meg újból kifejlődött.

a) 27. sz. Nassa. 1912. III. 21. d. e. jobb tapogató szemmel együtt le.

IV. 11. d. e. a regeneratumon kis szemfolt.

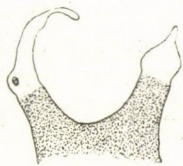
b) IV. 11. d. u. a regenerált tapogató ismét többől le.

IV. 24. kis regenerált kúp.

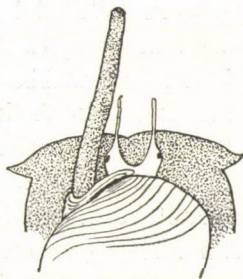
IV. 30. a regeneratumon kis szemfolt.

V. 21. teljesen normalis.

Hogyha többől kivágjuk mind a két tapogatót, úgy hogy az őket összekötő homloklebenyt is eltávolítjuk, a visszaszerzés gyorsabb lefutású, mint hogyha csak a tapogatókat vágjuk le.



17. rajz.



18. rajz.

223. sz. Nassa. 1912. V. 3. homlok a tapogatókkal többől le.

V. 10. a regenerált tapogatókon apró szemfolt.

V. 27. a homlok is, a tapogatók is már pigmentesek, a szemek fejlettek, az egész körülbelül fele a réGINEK. (L. a 18. rajzot.)

A míg a csigának nem nőttek még ki levágott tapogatóinak a helyén az újak, addig messzire előrenyújtott siphójával tapogat. A tapogatókat megcsonkításuk után, a mennyre birja, előre szokta nyújtani ha mászik és nem tartja visszahúzva a regeneratio befejezéséig, mint más csigák, éppen azért a visszaszerzés menete nagyon szépen szemmel kísérhető a *Nassa mutabilis* tapogatóin.

XIII. A szem regenerációja.

Az előbbi fejezetben láttuk, hogy a levágott tapogatók helyén egy hét múlva szabad szemmel jól meg lehet különböztetni a sarjadékkúpot. Ez a sarjadékkúp gyorsan kis tapogatóvá nyúlik meg, a melyen 12—15 nap múlva szabad szemmel is jól látható a szemfolt. A szabad szemmel látható kis szemfolt mikroszkóp alatt már meglehetősen előrehaladott fejlettségű szemnek bizonyul.

A szemhólyag már egészen lefűződött a külhámról és zárt; reczehártyájában az érzék- és a festéksejtek már elkülönültek, utóbbiakban sok már a fekete pigment, a mely az egész szemhólyagot feketére festi és a fehér tapogatón jól láthatóvá teszi. A szemlencse is megvan már s gyakran idegekkel is el van már látva ilyen fejlettségi fokon a visszaszerzett szem.

Persze vannak egyes példányok, a melyeken az egész folyamat eltolódott és lassúbb.

A szem keletkezésének első nyomait körülbelül 6 nappal a csonkítás után készített metszeteken kell keresnünk. Kicsiny gödörszerű betüremlés ez, a mely a külhám más beöblösödésétől vagy ránczától kezdetben semmiben sem tér el. Ez a gödörszerű betüremlés egyre mélyebbre hatol, felső széléin a hám gyűrűsen elszűkül; az egész kis hólyaghoz hasonlít, a mely nyílással a szabadba vezet és éppen olyan hámsejtekből áll, mint maga a külhám. Két-három nappal később a hólyag egészen elzárul és lefűződik a hámról; sejtjei a hólyag külső végén ellapulnak, befelé néző falain ellenben eredeti hosszuknak körülbelül háromszorosára megnyúlnak.

Ezek közül a megnyúlt sejtek közül, melyek a szemfenékfalat alkotják, egyesekbe fekete pigmentszemcsék kezdenek lerakódni, míg a köztük levő kissé vékonyabb, pálczikaalakú sejtek szintelenek maradnak. A 116. sz. csigán (Tábl. 8. kép) körülbelül ilyen állapoton látjuk a fejlődő szemet. Hogy a regeneratio menetében hogyan alakul ki a külhamból a szemkehely s hogyan fűződik le és hogyan különülnek sejtjei kétfelé: azt már CARRIERE (8.) megfigyelte és azóta más is leírta, éppen ezért csak röviden foglalkozom ezzel a részszel, annál

is inkább, mert TECHOW (39.) munkájában eléggé részletesen van leírva. Ki kell emelnem azonban, hogy míg CARRIERE a hám legelső gödørszerű bemélyedését, a melyről bizonyos valószínűséggel föl lehetett tenni, hogy a szemhólyag első nyoma, csak 29 nap múlva észlelte, hasonlóképen TECHOW is csak 20 nappal az operatio után látta először, addig a *Nassa mutabilis* ennyi idő múlva már teljesen kész, működő szemeket találtam s a szemkehely betüremelésének legelső nyoma körülbelül a 6 napon keresendő, a mi ennek a csigafajnak bámulatos visszaserző erejével van összefüggésben.

A tapogató levágása után a seb szélei összeborulnak s az alvadé vérből keletkezett var ideiglenesen elzárja a sebet. (Tábl. I. kép.) Ez alatt az alvadék alatt a már előzőleg ismertetett módon megindul a környező hámsejteknek a sebhelyre való rásarjadzása, a mely két nap alatt teljesen bevonja a seb felületét. A var leválik, a kezdetben igen lapított hámsejtek előbb koczkalakúvá válnak, majd körülbelül a 4. napon rendes hengeralakúvá nyúlnak meg, úgy hogy ilyenkor az új hámot csak az különbözteti meg a régítől, hogy alig van benne pigment.

Két-három nap múlva azonban a pigmentsejtek is kialakulófelben vannak. Ilyenkor a regenerálódó tapogatócska már kúp alakjában kiemelkedik az alapjáról.

Rögzítés közben ez a kúpocska mindig zsugorodik s a metazeten már számos olyan helyet találunk rajta, a hol kisebb-nagyobb redők, beöblösödések vannak. Hogy ezek közül melyikből lesz a szemhólyag, azt még nem lehet biztosan megállapítani; illetve az első hét végén a szemnek megfelelő helyen levő betüremelés egészen olyan, mint a szomszédos többi. A 10—11. napon azonban már határozottan megjelölhető az a gödørszerű hámbetüremelés, a melyből a szemhólyag lesz, mert lekerekedik és felső, a szabad felé néző végén kezd lefűződni a külhámról. Ez a lefűződés, a szemhólyag elzáródása, a 12—13. napon szokott rendesen bekövetkezni. Már ilyenkor elkülönülnek a fejlődő szemhólyag kifelé néző oldalának sejtjei a hólyag fenekén levő sejtektől.

Utóbbiak megnyúlnak, hasábalakúvá válnak, az előbbieket

koczkáalakúak maradnak vagy ellapulnak. A szemhólyag fenekén levő megnyúlt sejtek egy részébe már a hólyag befűződésének idejében pigmentszemcsék kezdenek lerakódni.

Jól láthatóak ezek a viszonyok a tábla 8. képén, a mely a 116. sz. csiga 18 napos szemét ábrázolja.

Ebben a kis szemhólyagban, a melynek átmérője a főtengely irányában (az a vonal, a mely a szem legmélyebb pontját a legkívül eső pontjával összeköti) még csak $90\ \mu$, az erre a tengelyre merőleges irányban pedig $75\ \mu$ nagyságú, még nyoma sincsen a szemlencsének; kerületein idegág sem észlelhető sehol. A következő napokban a későbbi retina helyén levő megnyúlt sejtek közül egyre többre rakódnak bele pigmentszemcsék. Ezek a szemcsék körülbelül $1\frac{1}{4}\ \mu$ nagyságú fekete gömbök, a melyek a megnyúlt sejteknek centrálisan a szemhólyag belseje felé néző végebe rakódnak le egészen sűrűn egymás mellé, úgy hogy fekete öv keletkezik a szemhólyag fenekén, a melybe azt meg-megszaggatva, színtelen és keskenyebb érzéksejtek nyúlnak. CARRIERE szerint a pigmentöv kialakulása előtt indul meg a lencse elválasztása, TECHOW szerint előbb a pigmentöv fejlődik ki s csak ezután alakul ki a lencse. Az utóbbi sorrendet figyelhettem meg én is *Nassáim* szemének a fejlődésében. A lencsét HESSE (20.), BÄCKER (21.) és mások vizsgálatai szerint a szemhólyag sejtjei választják el, a lencse tehát nem sejtes szerkezetű, hanem megszilárdult váladékból áll, a melyen különbözőképpen színeződő koncentrikus öveket lehet megkülönböztetni.

A lencse kialakulását legkorábban 18 napos regenerált szemén észlelhettem (a 119. sz. csigán); átmérője $18\ \mu$, alakja kissé szabálytalan gömb volt. Metszésközben nem tört darabokra, mint a hogy az idősebb lencsék rendesen tenni szoktak, a miből arra lehetne következtetni, hogy nem volt olv merev, mint a teljesen kifejlett lencse. Ugyancsak 18 napos tapogatón levő fejlődő szemben (117. sz. csiga) észleltem már $30\ \mu$ átmérőjű lencsét is. Viszont más 18 napos szemekben még nyoma sem volt a lencsének. (116. sz. csiga.)

A lencse a 18—20. naptól kezdve rohamosan nő. (Tábl. 9. kép.) A 102. sz. csiga, melynek 28 napos regenerált szeme a tábla 10. képén látható, lencséjének átmérője $52\ \mu$. A lencse

alatt a fejlődő üvegtest is látszik. Maga a szem a főtengely mentén 120, erre merőleges irányban 90 μ átmérővel bír. Ebben az időben megváltozik a szemhólyag alakja, a melynek eddig a főtengely mentében hosszabb volt az átmérője, mint keresztben; most kezd lekerekedni, majd a főtengelyre merőleges irányokban megnyulni, mintha a főtengely mentében összenyomnák. A tábla 13. képen látható 103. sz. csiga 30 napos szemének pl. már ilyen az alakja.

A szem főtengelyében 120 μ , erre merőlegesen ellenben 125 μ az átmérője. A tábla 11. képen a 12. sz. csiga 60 napos szeme látható, jól fejlett, metszésközben megrepedt, 75 μ átmérőjű lencsével és azt körülvevő üvegtesttel. A szem előtti előcsarnok, melynek nyoma már a két előző képen is látszik, itt teljesen ki van fejlődve. Kezdetben a fejlődő szemhólyag közelében nem lehet ideget találni, ez csak később fejlődik ki, a szem alatt idegdúcot alkotva, a melyből csészealakúan indulnak minden irányban elágazó idegek, a melyek körülfogják a szemet. Bár idegfestésekkel nem dolgoztam, a 28 napos szemtől kezdve (Tábl. 10. kép) mindenütt jól kivehető a látóideg, a melyből pamatokban induló neurofibrillumok látják el az érzéksejteket. (Tábl. 15. kép.)

Érdekes a látóideg kialakulása és az érzéksejteknek idegekkel való ellátása, erről a tárgyról azonban, bár van egynéhány megfigyelésem, nem nyilatkozom, minthogy a látóideg regenerációját a legfinomabb részletekre is kiterjeszkedő pontossággal barátom, KÜPFER M. (Zürich) szándékozik megírni, a kit még Nápolyban elláttam megfelelő anyaggal.

A 175. sz. csiga 80 napos regenerált szeme (Tábl. 12. kép) már teljesen olyan, mint a normális szem. Jól fejlett, concentrikusan rétegzett, 90 μ átmérőjű gömbölyű lencséje van, a melyet kehelyszerűen vesz körül hátulról az üvegtest.

A szem még kissé kisebb ugyan a normálisnál — átmérője 255 μ és 360 μ , míg a normális szemé átlag 325 μ és 360 μ —, de máskülönben teljesen hasonló hozzá.

A szem regenerációjának előrehaladását az alábbi táblázat adatainak összehasonlításából jól figyelemmel kísérhetjük.

Táblázat a regenerálódó szem növekedéséről.

| Hány napos a visszaszerzett szem? | A csiga sorszáma | A szem átmérője a főtengely mentén | A szem átmérője a főtengelyre merőlegesen | A visszaszerzett lencse átmérője |
|-----------------------------------|----------------------------|------------------------------------|---|----------------------------------|
| 6–12 napos | A szemhólyag még nem zárt. | | | |
| 12 " | 111. | 68 μ . | 32 μ . | — |
| 13 " | 112. | 75 " | 50 " | — |
| 18 " | 116. | 90 " | 75 " | ? (Tábl. 8. kép) |
| 18 " | 119. | 90 " | 75 " | 18 μ . |
| 18 " | 117. | 90 " | 82 " | 30 " |
| 23 " | 114. | 95 " | 85 " | 35 " (Tábl. 9. kép.) |
| 28 " | 102. | 120 " | 90 " | 52 " (Tábl. 10. kép) |
| 30 " | 103. | 120 " | 125 " | 58 " (Tábl. 13., 14., 15. kép) |
| 55 " | 168. | 120 " | 150 " | 62 " |
| 60 " | 12. | 160 " | 165 " | 75 " (Tábl. 11. kép) |
| 80 " | 175. | 255 " | 360 " | 90 " (Tábl. 12. kép) |

Az összehasonlítás kedvéért közlöm három normális szem méreteit is.

A szem átmérője a főtengely mentén: a) 300 μ , b) 330 μ , c) 325 μ .

A szem átmérője a főtengelyre merőlegesen: a) 345 μ , b) 370 μ , c) 360 μ .

A lencse átmérője: a) 100 μ , b) 125 μ , c) 110 μ .

A regenerálódó szem, bár minden része kifejlődött, a második hónap végén még csak félakkora, mint a régi volt és teljes nagyságát csak a harmadik hónap végén éri el. Már CARRIERE észlelte egy esetben s hasonlót látott TCHOW is, hogy a regenerált szemlencse közepében a környezettől eltérően színeződő folt van. Ezeket a foltokat ők vacuoláknak mondják, én azonban azt hiszem, hogy épp ellenkezőleg töményebb anyagból álló foltok.

Ilyen foltokat észleltem a regenerált lencsékben is (Tábl. 13. kép, 103. sz. csiga), de hasonlók vannak a normális szemek lencséiben is, sőt néha több is egymás mellett. A tábla 16. képe normális szemet ábrázol keresztmetszetben, lencséjében számos ilyen folt látható. Maga a lencse, mint a fejlett lencsék általában, metszés közben összetöredezett és repedezett.

Másfajta rendellenességeket is észlelhettem regenerált szemek lencséin.

A 103. számú csiga 30 napos szemében kettős szemlencse van (Tábl. 13. kép); a két fél szorosan egymás mellett, egymáshoz tapadva foglal helyet és mindegyiknek a közepében az előbb említett folt látható. A kettős lencse keletkezésének a története nézetem szerint a következő. Elég gyakran talál az ember olyan eseteket, a mikor a betüremelő szemhólyag, kialakulásának legkezdetén, egy a belvilága felé kiemelkedő taraj által két, néha több részre van osztva. Ilyen esetet észlelt TECHOW is *Helix*-én. Ha a metszet úgy éri az ilyen kettős szemhólyagot, hogy a válaszfal szerepét játszó ráncz beleesik, akkor olyan a kép, mintha egymás mellett két szemhólyag indulna fejlődésnek. Ez azonban csak látszólagos, mert metszetsorozatokon mindig meg lehet találni azt a helyet, a hol a két üreg közlekedik egymással.

A fejlődés menetében a válaszfal eltűnik, az előbb mintegy behorpadás által kettéosztott szemhólyag a horpadás megszüntével ismét egységes üreggel bír.

Az észlelt esetben a 103. sz. csiga szemhólyagja még akkor is ketté volt osztva egy ilyen behorpadás által, a mikor a lencse elválasztása javában folyt s a két félnek megfelelően kettős lencse keletkezett, a mely csak a szemhólyag üregének egységgé válása után egyesült s melyet csak felületes rétegei kötnek össze. (Táb. 13. kép.) Ez a szem máskülönben teljesen szabályos alakú. A külhám előtte, a mely a conjunctivának felel meg (*pellucida externa*), $8\ \mu$ nagyságú négyzet alakú sejtekből áll, a melyeknek $6\ \mu$ nagy kerek magjuk van. Jobbra-balra ettől a folttól a hámsejtek hengerek és $18\ \mu$ nagyok.

A szemhólyag kifelé néző hámréteg-fala, a mely a corneának felel meg (*pellucida interna*), rendkívül lapított $1\cdot5\ \mu$ magas sejtekből áll. A szem belső üregének átmérője $45\ \mu$ az egyik, $62\ \mu$ a másik irányban. A kettős lencse átmérője $58\ \mu$. A retina $47\ \mu$ magas, pálcikaalakú sejtekből áll. Az érzéksejteket körülvevő pigmentsejtek festékrétege $20\ \mu$ vastag övet alkot a szem belső falán. A festéköv és a lencse között az üvegtestet alkotó $15\ \mu$ vastag pálczikás szegély a fényképen is jól kivehető.

A mint ugyanennek a szemnek egy következő metszetéből látjuk (Táb. 14. kép), a szemnek az idegburokja is igen szépen fejlett és csészealakban veszi körül kívül a szemhólyag hátsó részét.

A visszaszerzett hatalmas, $52\ \mu$ átmérőjű látóidegdúc is jól kivehető a képen. A látósejtekbe hatoló idegek a tábl. 15. képen szintén jól láthatók.

A mint láttuk, a szemhólyag már teljesen zárt, a hólyag elejének sejtjei már különváltak a szemfenék sejtjeitől, a lencse elválasztása is javában folyik már, a mikor a regenerálódó idegágak eléri a fejlődő szemhólyagot, hogy azt a látóidegekkel ellássák. A szemhólyag kialakulása az idegrendszer kormányzó hatása nélkül és attól függetlenül megy végbe. A *Nassa mutabilis* regenerált szeme egy hónapos korában már teljesen működésképes, bár még jóval kisebb a normalisnál. Teljes nagyságát a visszaszerzett szem a harmadik hónap végén éri el.

XIV. A siphó regenerációja.

Siphójának kisebb-nagyobb levágott darabját igen hamar vissza bírja szerezni a *Nassa mutabilis*. Hiszen ez a szerv van leginkább kitéve a szabadban való életmódnál is mindennemű sérüléseknek.

A messzire kinyújtott siphót valószínűleg nagyon gyakran leharapják apróbb halak az állat testéről. Én összesen 30 csigán csonkitottam meg a siphót és az minden esetben hamar regenerálódott.

A siphó végének levágása után körülbelül félpercczel a megcsonkított csiga épp úgy használta siphóját, mint annak előtte. Ha nem volt nagy a levágott darab, rendszeren észre sem lehetett venni a hiányt, mert a csiga csonka siphóját olyannyira kinyújtotta, hogy a régi hosszát csaknem teljesen elérte.

A sebnak a szélei mindjárt a csonkítás után olyannyira összehorultak, hogy szabad szemmel észre sem lehetett venni a sebhelyet; csak mikroszkóp alatt látszott egy igen keskeny sáv az összehorult hámrétegek között, a mely vérálvadékkal volt kitöltve. Két nappal a csonkítás után már egészen normális

alakú, bár szintelen és nyálkasejteket sem tartalmazó hám borította be a seb helyét. A 4—5. napon a fehér szín is eltűnt és a berakódott festék még jobban eltörülte a régi és az új hám határát.

A 204. sz. csiga siphójának felét IV. 11.-én levágtam.

IV. 25. 3 mm magas, kissé világosabb regeneratum.

V. 2. teljes hosszát elérte és normális alakú.

Ha a siphót több más szervvel egyidejűleg vágtam le a csiga testéről, mindig a siphó volt az, a mely leghamarabb regenerálódott és a regenerált siphón már régen eltűnt a regeneratio minden nyoma, a mikor a vele egyidejűleg eltávolított szerveknek még csak kis sarjadéka volt meg.

V. 3.-án a 223. sz. csiga siphójának $\frac{1}{3}$ -át és egész homlokát a két tapogatóval együtt levágtam.

V. 10.-én a siphó regenerált szegélye még világosabb, a tapogatók helyén kis fehér sarjak.

V. 27.-én a siphó kész. A homlok és a regenerált tapogatók még fehérek, a szemek is jól fejlettek már. (18. rajz.)

Ezek szerint elvesztett siphóját szerzi vissza legkönnyebben a *Nassa mutabilis*.

XV. Az orrmány regenerációjáról.

Az orrmány visszaszerzésére irányuló kísérleteim eredménytelenül végződtek. Az a néhány csiga, a melynek levágtam az orrmányát, éhenhalt, még mielőtt az orrmányát visszaszerezte volna. A regeneratio kezdő szakait csak egy esetben észlelhettem, de később ez a csiga is elpusztult.

A mikor a csigák táplálkozásközben messzire kitolták orrmányukat, gyors ollócsapással levágtam az orrmánynak mintegy 1 cm-nyi darabját. Előrelátható volt, hogy az így megcsontított csigák, megfosztva rágókészüléküktől, el fognak pusztulni. Érdekes, hogy az öt ily módon megcsontított közül éppen az maradt életben, a melynek még más súlyos sérülése is volt és ezeket az eltávolított testrészeket vissza is szerezte.

V. 3.-án a 224. sz. csiga metapodiumát levágtam, jobb tapogatóját a szemmel és a homloklebenynyel és kidugott orrmányát.

V. 27.-én a láb, a tapogató a szemmel, a homlok regenerált, az orrmány helyén körülbelül 2 mm nagyságú kiálló fehér gömb.

VI. 3.-án az orrmánygömb kivételével a regenerált részek már pigmentesek.

VI. 5.-én éhenhalt.

A mint látjuk, a levágott orrmány helyén is megindult a regeneratio, de a regenerált orrmányrészt nem tudta az állat testébe visszahúzni és a gömbalakú regenerált orrmányrészen nem volt nyílás. A seb szélei összeforrtak és lehetetlenné tették a csiga táplálkozását.

XVI. Mesterségesen előállított torzképződmények.

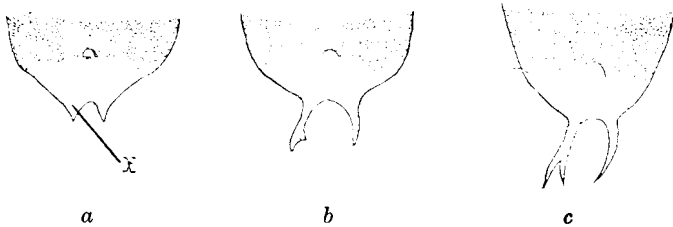
Gyakran észlelhető a legkülönbözőbb állatesoportokba tartozó állatok testén, hogy a rendes testalaktól feltűnően elütő, rendellenes alakú, torzult testtel bírnak. Ezeknek a torzképződményeknek egy része embryonális eredetű s keletkezésük ideje messzire visszanyúlik az egyén fejlődésének legelső szakaiba; másik részük azonban kétségtelenül sérülések nyomán, a rendellenes irányt vett visszaszerzés folyamán keletkezett. Bár már minden állattörzsből leirtak torzképződményeket, mégis éppen a lágytestűek között a test (nem héj) eltorzulásai nagy ritkaságszámba mennek.

Az újabb időkben a kísérleti állattan arra is kiterjesztette figyelmét, hogy mi módon lehetne a szervezetet arra kényszeríteni, hogy torzképződményeket hozzon létre, hogy azután ezeknek az eseteknek a kapcsán meg lehessen állapítani a torzulások okát, keletkezésük módját és mindazokat a tényezőket, a melyek előidézésükben szerepet visznek.

Csakhamar általánosan ismeretessé vált az, hogy bizonyos állatok testén torzképződményeket — főleg kettős vagy villás torzulásokat — kísérleti úton is elő lehet idézni az által, hogy a megfelelő helyen alkalmas módon sebeket ejtenek az állatok eredetileg teljesen normális testén; a sebek nyomában meginduló visszaszerzés azután torzképződményeket hozhat létre. Ily módon sikerült a legtöbb olyan torzulást, a melyet a természetben talált egyéneken észleltek, mesterséges úton is előállítani.

A csigák osztályában eddig megfigyelt torzképződményeket egy előző értekezésemben mind részletesen ismertettem (16.), ugyanott közöltem számos, a szabad természetben gyűjtött torzult testű *Nassa mutabilis* torzulásának leírását és rajzát. Éppen azért említett értekezésemre utalva, itt mellőzhetem az eddig ismeretessé vált torzulások leírását és mindjárt rátérhetek azoknak a torzulásoknak az ismertetésére, a melyeket a *Nassán* kísérleti úton, mesterségesen sikerült előállítanom. Megemlíthetem még azt is, hogy csigákon még senki sem próbált szándékosan torzképződményeket előállítani.

Eljárásom a következő volt. Valamely testrészt levágása után megvártam, míg a regeneratio szabályszerűen megindult és a mikor az új kis sarjadék szabad szemmel már jól láthatóvá vált, késsel vagy ollóval kettémetszettem a sarjadékkúpot. Az



19. rajz.

esetek nagy részében a vágás hamarosan összeforrt és torzulás létrehozása nem sikerült. De hogyha sikerült a bemetszés széleinek összeborulását megakadályoznom, mindig kettéosztottam a regenerációs kúpot s ennek megfelelően kettéágazó, villás alakúvá vált a regenerálódó testrészt. A dolog legfontosabb része tehát a kettémetszett sarjadékkúp összenövésének a megakadályozása volt.

Ennek az elérésére, hosszabb kísérletezés után, a következő módot találtam legalkalmasabbnak. A kettémetszést nem acél-késsel, hanem keményfából, vékonyan kés. formára kifaragott éles és hegyes végű fadarabbal végeztem. A fakést előzőleg 10% formalinba kissé beáztattam. A mikor a fapenge kettévágta a sarjadékkúpot, a likacsában levő formalin a vele érintkező szövetrészeket megalvasztotta. A seb két belső felén tehát két

vékony elhalt hártya keletkezett, a mely a sarjadékkúp egyesülését meggátolta.

Így állítottam elő pl. a 32. sz. csigának villás baloldali végfonalát, a mely a 19. rajzon látható.

Márczius 21.-én lemetszettem ezen csiga első lábának hátulsó részét a fedővel és végfonalakkal együtt úgy, a mint azt az 5. rajzon x -szel jelölve lájuk. A regeneratio szabályosan megindult. Április 13.-án a kis regeneratumot, a melyen már a fedő is kifejlődött és a pigment is észrevehető volt, a 19. rajzon ábrázolt módon (x) a fakéssel bemetszettem. (19. rajz, a).

A *b* rajz április 24.-én ábrázolja a kettémetszett ág növekedését, a két sarjadékkúpot jól meg lehet különböztetni rajta. A *c* rajz, a mely május 17.-én készült, a villás végfonalat közvetlenül végleges alakjának elérése előtt ábrázolja. Éppen ilyen villás végfonalakat irtam le a szabadban fogott *Nassák*-ról (16.) (1—2. és 15—19. kép) s nagyon valószínűnek tartom, hogy ezeknek a torzulásoknak nagy része ily módon, a regenerálódó kúpot kettéosztó sérülés nyomán keletkezett.

Bár tagadhatatlan, hogy ilyenféle beavatkozások nélkül is létrejöhetnek villás végfonalak (pl. a 12. rajzon ábrázolt esetben), a mikor magában a szervezetben van a rendellenes fejlődési irányba terelő inger székhelye.



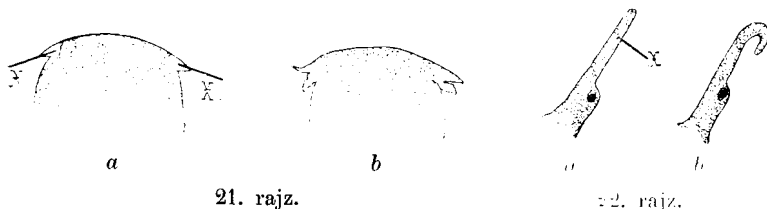
20. rajz.

Fölös számú végfonalakat is sikerült mesterségesen létrehoznom. A 184. sz. csigának IV. 9.-én oly módon vágtam le a két végfonalát két vágással, hogy a vágások hátul a test végéhez közel hegyes szög alatt metszették egymást. (20. rajz, a). Hasonló csonkításokkal mindig 4 végfonalat sikerült előállítanom, mert a két sebfelület mindegyikéből, egymástól teljesen függetlenül, ket-két végfonál nőtt ki. A *b* ábrán, 13 nappal a

csonkítás után, már kivehető mind a két oldalon a végfonalak sarjadékkúpja. Nyolcz nappal később készült a *c* rajz, a mely a négy végfonalat kialakulásának jóval előrehaladottabb fokán ábrázolja. Ilyen volt az a szabadban fogott torzult *Nassa*, a melyet régebben (16.) a 21. rajzon ábrázoltam.

Az előlábi csücskök regenerálódó sarjainak kettéhasítása által olyan dupla czimpájú csücskök keletkeztek, mint azok, a melyeknek a képét az 1. és 2. ábrán közöltem (16.).

A 29. sz. csigának pl. III. 21.-én a 21. rajzon *x*-szel jelölt vonal mentén lemetszettem három hetes visszaszerzett előlábi csücskét. A bemetszés szélei nem forrtak össze, mind a két előlábi csücsök dupla maradt, a mint azt a IV. 6.-án készült *b* ábrán lehet látni.



21. rajz.

22. rajz.

A regenerációs kúp kettémetszése által villásan elágazó tapogatókat is sikerült előállítani, épp olyan módon, mint a már leírt villás végfonalakat. Ezek a villás tapogatók olyanok voltak, mint a szabadban fogott torzult testű *Nassák* közül (16.) a 3. és 4. képen ábrázolt csiga tapogatója.

Egyoldalú bemetszésekkel állandóan megmaradó meggyömbüléseket lehet előidézni, a mint ezt pl. a 178. sz. csiga esetében (22. rajz) látjuk. A IV. 28.-án oldalt bemetszett tapogató a seb összehúzódása s az illető oldalon levő szövetek heges zsugorodása és megrövidülése folytán állandóan görbe maradt, a mint azt az V. 16.-án készült 22. *b* rajz mutatja.

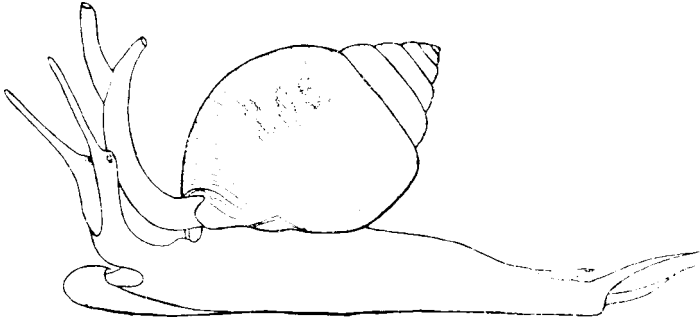
Egyike a legérdekesebb mesterségesen előállított torzulásoknak az az eset, a mely a 23. rajzon van ábrázolva s mely a 206. sz. csigának kettéágazó siphóját mutatja be.

IV. 11.-én levágtam a csiga siphójának felét és 3 nappal később a fakéssel kettéhasítottam a regenerált szegélyt.

A siphónak, a mely tulajdonképen csőszerűen egymásra

borított szélű lemezből áll, felső kettéhasított végén, mindjárt a bemetszés után, mindegyik fele csőszerűen összezsavarodott.

A 23-ik rajz V. 18.-án készült és jól látható rajta, hogy a siphónak nemcsak a főága, hanem a mellékága is csöves.



23. ábra.

Mindkét siphoágát egyaránt használta az állat, a mely messzire előrenyújtott kétágú siphójával meglepően szokatlan látványt nyújtott, a mint az aquarium fenekén mászkált.

XVII. Összefoglalás.

1. A *Nassa mutabilis* (L.) nevű tengeri előlkopoltyús csiga bír a legnagyobb visszaszerző képességgel a lágytestűek között (az eddigi ismereteink alapján), éppen ezért ez a faj kísérleti célokra rendkívül alkalmas. Nagyon szívós életű, de a víz kiédesedését rosszul tűri.

2. A püspöksüveghez hasonló petetok kemény anyagát a középső nagy talpmirigy megszilárduló váladéka szolgáltatja. A peterakás ideje április hó végére esik.

3. Különböző szerveinek megcsonkítását (az ormány kivételével) igen jól tűri a csiga s igen rövid idő alatt visszaszerzi a levágott részeket. Ismételt csonkítások után a visszaszerzés meggyorsabbodik. A csiga korának előrehaladásával a visszaszerző erő csökkenése nem észlelhető; idős, teljesen fejlett példányokon is épp oly nagy, mint fiatal, még nem teljesen kifejlett egyéneken.

4. A talp levágott végfonalait mindig visszaszerzi az állat, a visszaszerzett rész első nyoma szabad szemmel a 4. napon észlelhető.

5. Az utóláb lemetszett részét is visszaszerzi; 8—12 nap múlva mindig jól látható már a sarjadék.

6. A regenerált részek néha a metszési síkra nem merőlegesen, hanem ferde szög alatt fejlődnek ki. A test hátulsó felébe eső sérülések után a két vagy több szegletű sebnek mindig a hátrafelé néző széléből, a test első felében pedig mindig az előre néző sebszélből indul ki a sarjadzás. A polaritás tehát jól fejlett.

7. A fedő letépése után az új fedő regenerációja egészben véve úgy megy véghez, a mint azt a *Murex brandarison* leírtam. A sebet vérálvadék zárja el. Ez alatt 7—8 nap múlva a sebet körülvevő hámsejtek minden oldalról rásarjadzanak a sebfelületre, gyorsan oszlanak, ellapulnak és lapos pikkelyalakban boltozzák be a sebet a 9. napon. Ekkor a lapos sejtek duzzadni kezdenek, koczkaalakúvá, majd pedig hengeressé válnak es oldalt oszolva, egyre jobban összenyomják egymást, úgy hogy körülbelül két hét múlva a letépett fedő helyén tömötten álló, hosszúra megnyúlt, pálczikaalakú sejtek vannak, a melyeknek külső végében sorokba rendeződő fénytörő rögöcskék jelennek meg. Ezek a rögöcskék összeragadva hárttyát alkotnak, a mely az új fedő első nyoma. A fedő anyagát elválasztó mirigyes sejtek kezdetben csak a seb helyén alakulnak ki s ez a körülírt folt, a melynek az alakja szarvaival hátrafelé néző félholdhoz hasonlít, rendesen szemölcsszerűen kiemelkedik a metapodium hátoldalából. Majd a félholdalakú folt domború szélei körül levő indifferens hámsejtek is átalakulnak fedőkészítő sejtekké s így a félholdalakú fedőszemölcs domború oldalán új mirigysejtöv keletkezik s váladékuk a fedő domború oldala körül új növekedésű öveket hoz létre. Az új fedő szabad szemmel 25—40 nappal a csonkítás után mint 1—2 mm átmérőjű fehér pikkely jól látható. Ha a fedővel együtt az utóláb egy darabját is levágjuk, a visszaszerzés jóval gyorsabb, mint hogyha csak magát a fedőt tépjük le. A fedő ismételt eltávolítása után is mindig újból kifejlődik.

8. A levágott előlábi csücsköket is visszaszerzi a *Nassa*.

9. Az egész levágott lábát 3—4 hét alatt szerzi vissza a csiga, ha tehetetlen állapotában táplálkozásáról gondoskodunk.

10. Tapogatóját is visszaszerzi. A regenerált tapogató 7—8 nap múlva már jól látható, újabb 6—7 nap múlva a visszaszerzett szem is megjelenik már rajta kis fekete folt alakjában. Másfél hónap alatt eléri az új tapogató teljes nagyságát. A túlbő nedváramlás gyakran bunkósan megduzzasztja az új tapogató végét.

11. A két tapogatót összekötő homloklebenyt is visszaszerzi a csiga. A tapogatók visszaszerzésének ideje rövidebb, ha a homloklebenyt is levágjuk a csiga testéről.

12. Eltávolított szemét mindig visszaszerzi a *Nassa*. Már 12—15 nap múlva jól láthatók szabad szemmel az új szemfoltok. A szemhólyag betüremlése a külhamból körülbelül a 6. napon kezdődik, két-három nappal később a szemhólyag egészen elzárul és lefűződik a hámról, sejtjei a hólyag kifelé néző végén ellapulnak, belső oldalán ellenben hosszuk háromszorosára megnyúlnak. Ezek közül a szem fenekét alkotó megnyúlt sejtek közül egyesekbe fekete festékszemecskék rakódnak bele, míg a közöttük levő pálczikaalakú sejtek szintelenek maradnak és érzéksejteké válnak. A reczehártya mindkét alkotó eleme, az érzéksejtek és a festéksejtek a külhamból (ektoderma) erednek.

13. A regenerálódó szemben előbb indul meg a festékszemcsék lerakódása s csak később kezdődik a szemlencse elválasztása. A lencse jelenlétét legkorábban a csonkítás utáni 18. napon észlelhettem. A szemhólyag már teljesen zárt, a mikor az idegek kialakulni kezdenek. A regenerálódó látóideg a szem alatt dúczot alkot, a melyből minden irányban idegek indulnak, a szemet csészealakúan körülfogják és látóidegrostokkal ellátják. A visszaszerzett szem, bár már egy hónapos korában működésre képes, csak 80 nap múlva éri el az eltávolított régiének a nagyságát.

14. Hogyha a fejlődő szemhólyag a lencse elválasztatása idejében egy betüremelő taraj által két egymással közlekedő részre van osztva, akkor kettős lencse keletkezik, a melynek két felét

később a szemhólyag üregének egységessé váltá után közös rétegek kötik össze egymással.

15. Levágott siphóját igen rövid idő alatt mindig visszaszerzi a csiga.

16. Az orrmány regenerációját, bár szépen megindul, megátolja a csiga éhhalála.

17. A szövetek regenerálódása a megcsonkítás után a következő: A seb szélei összehúzódnak és összeborulva elzárják a sebet, a seb szabadon maradó felületét pedig alvadt vérből keletkezett var fedi. A var alatt a vérsejtek tömött sorokba rendeződnek a seb felületén. 5—6 órával a csonkítás után kezdődik a hám regenerálódása. A sebszáron álló, épségben maradt hengeres hámsejtek ellapulnak, oszlanak indulnak és egészen lapos sejtek alakjában rásarjadzanak a seb felületére s azt körülbelül 24 óra múlva egészen bevonják. A második, harmadik napon az új sejtek tangentialis irányban is oszlanak, úgy hogy egyideig több sorban állanak egymás fölött a hámsejtek, de az alsó sorok sejtjei leválva bevándorolnak a kötőszövetbe. A legfelső sor sejtjei duzzadni kezdenek, kockaalakúvá, majd hengeressé válnak.

18. Az 5—6. napon az új hám egyes sejtjeiben megkezdődik a festékszemeccék lerakódása.

19. A nyálkát elválasztó mirigyes sejtek kialakulása a 15. napon kezdődik meg és a TECHOW által leírt módon megy végbe.

20. Az izomszövetben a csonkítást követő 4—5. napon kezdődik meg a sarjadzás. Az elmetezett izomnyaláb duzzadt vége köré odavándorolt sejtek rendeződnek el oly módon, hogy hidakat alkotnak az izom csonkjától az új hámig. Ezek az odavándorolt orsóalakú sejtek nem változnak át izomrostokká (TECHOW), hanem csak támaszul szolgáló kötőszöveti hidak, a melyek mentében fejlődnek ki az új izomrostok, a melyek a régi nyaláb csonka végéből sarjadzanak ki finom izomrostok alakjában.

21. Mesterséges úton, a regenerálódó sarjadékkúp kettémetszése által villásan elágazó, torzult végfonalakat, tapogatókat, siphókat stb. lehet előállítani.

Irodalom.

1. ABILGAARD P. C.: Bemerkungen über den Bonnet-schen Versuch, dass die abgeschnittenen Köpfe der Schnecken wieder hervorstechen. Nordisches Archiv. f. Nat. u. Arzneiwiss. I. St. 3. Kopenhagen p. 566. 1799.
2. BÄCKER R.: Die Augen einiger Gastropoden. Arb. Zool. Inst. Wien. Bd. XIV. p. 259—290. 1903.
3. BAUER A.: Missbildungen an den Fühlern von Wasserschnecken. Zool. Anz. Bd. XXXII. p. 773—775. 1908.
4. BONNET C.: Observations sur le physique de Rozier. X. p. 165—179. Paris. 1777.
5. Ugyanő. Collection complète oeuvres. V. part. I. Neuschatel. p. 246—283. 1781.
6. BRONN: Classen u. Ordn. Mollusca 3. II. 1907.
7. CARRIÈRE I.: Über Regeneration bei Landpulmonaten. Zool. Jahresbericht. II. p. 836. 1879.
8. Ugyanő. Studien über die Regenerations-Erscheinungen bei Wirbellosen. I. Die Regeneration bei de Pulmonaten. Würzburg, 1880.
9. Ugyanő. Die Fussdrüsen der Prosobranchier etc. Arch. f. mikr. Bd. XXI. p. 387—467. 1882.
10. ČERNÝ A.: Versuche über Regeneration bei Süßwasser- und Nachtschnäcken. Arch. f. Entwicklungsmech. Bd. XXIII. p. 503—510. 1907.
11. CHIAJE ST. DELLE: Descrizione della Jantina e del suo Mollusco. Mem. Soc. Italiano e del suo Mollesco. Mem. Soc. Italiano XXII. p. 312—319. 1844.
12. COCKERELL S.: On the generic position of Arion foliolatus. Gould. Nautilus p. 126—128. 1890.
13. DIMON A. C.: The mud. snail: Nassa obsoleta. Cold Spring Harbour's monographs. Brooklyn. 1905.
14. FISCHER P.: Observations anatomiques sur des Mollusques peu connus. Journ. de Conchyliol. Paris, Tome V. p. 230. §. 4. 1856.
15. Ugyanő. Note sur une monstruosité de l'animal du Patelle vulgate. Ibid. Tome. XII. p. 89—90. 1864.
16. HANKÓ B.: Torzult testű tengeri csigák. Állattani Közl. XI. k. p. 103—108. 1912.
17. Ugyanő. A biboresiga (Murex brandaris) fedőjének regenerációjáról. Állattani Közl. XI. kötet, p. 221—261. 1913.
18. Ugyanő. Über den gespaltenen Arm eines Octopus vulgaris. Arch. f. Entwmech. Bd. XXXVI. p. 739—747. 1913.
19. HESSE R.: Untersuchungen über die Sehorgane bei niederen Thieren. Die Augen einiger Molluscen. Zschft. f. wiss. Zool. Bd. LXVIII. p. 379—477. 1900.
20. Ugyanő. Untersuchungen über die Organe der Lichtempfindung bei niederen Thieren. Zschrft. f. wiss. Zool. Bd. LXXII. p. 565—656, 1902.

21. HONIGMANN H. L.: Über Regeneration u. Wachstumstörungen bei Mollusken. Zschft. f. Naturwiss. (Halle) Bd. 83. p. 451—454. 1911.
22. Ugyanő. Über Doppeldeckelbildungen bei *Nassa mutabilis*. Zool. Anz. Bd. XXIX. p. 690—692. 1912.
23. KÖHLER W.: Regenerieren Süßwasserschnecken verloren gegangene Fühler? Blätter f. Aqu. u. Terrazienkde. Bd. XVII. p. 49. 1906.
24. MEGŠUAR F.: Regeneration der Tentakel und des Auges bei der Spitzschlamm Schnecke. Arch. f. Entwicklungsmech. Bd. XXV. p. 135—143. 1907.
25. MORGAN T. H.—Moszkowszki M.: Regeneration. Leipzig. 1907.
26. MÜLLER O. F.: Historia vermium terrestrium et fluviatilium succincta. II. 1774.
27. PFEIFFER L.: Zur Molluscenfauna der Insel Cuba. Malakozoolog. Blätter. 66. VI. 1860.
28. POWER I. Versuche die zum Zwecke angestellt wurden in Erfahrung zu bringen, inwiefern gewisse Seeschaltiere die Fähigkeit besitzen, von ihnen abgelöste Körperteile zu reproduzieren. Forrieps Neue Notizen a. d. Geb. d. Nat. u. Heilkunde. VI, No. 14. p. 209—210. 1838.
29. PRESCIANI: Giornale di Pisa XXXII. 1778.
30. PRZIBRAM H.: Experimental Zoologie. II. Regeneration. 1909.
31. QUOY et GAYMARD: Voyage de l'Astrolabe. Zool. II. p. 611—619. 1832.
32. ROOS N.: Mercure de France. 200. Dez. 1768.
33. RÖMER I.: Natur u. Haus, illustr. Zschft. für Naturfreunde. Heft 16. u. 19., p. 235 u. 300. 1903.
34. SHÄFER I. CH.: Erstere und fernere Versuche mit Schnecken nebst einem Nachtrag. Zweite Auflage. Regensburg. 1770.
35. SCHÜLKE H.: Regenerieren Schnecken verlorengegangene Fühler? Blätter f. Aqu. u. Terrazienkde. Bd. XVII. Heft. 10. 1906.
36. SEMPER: Reisen im Archipel der Philippinen II. Teil. Wiesbaden. 1868.
37. SPALLANZANI: Prodomo oi. Opera ad impremeri sopra le riproduzioni animali. Modena. 1768.
38. TECHOW G.: Zur Kenntnis der Schalenregeneration bei den Gastropoden. Arch. f. Entwicklungsmech. Bd. XXXI. p. 258—288. 1910.
39. Ugyanő. Zur Regeneration des Weichkörpers bei den Gastropoden. Arch. f. Entwicklungsmech. Bd. XXXI. p. 359—386. 1910—1911.
40. Ugyanő. Missbildungen bei der Fühlerregeneration von Süßwasserschnecken. Zool. Anz. Bd. XXXV. p. 322—324. 1910.
41. WIEGMANN. Verdoppelung eines Auges bei einer *Helix*. Nachrichtsblatt d. deutsch. Malakozool. Gesellsch. Jhg. 37. 1905.
42. ZIEGLER M. Regenerieren Schnecken verlorengegangene Fühler? Blätter f. Aqu. u. Terrazienkde. Jhg. XVI. u. XVII. Heft. 41. u. 10. 1905. u. 1906.

A táblák magyarázata.

1. kép: A tapogató elmetsett vége $\frac{1}{2}$ órával a csonkítás után. A seb szélei összehorultak, a sebfelületet véralvadék zárja el. (150-szer nagyítva.)

2. kép: A sebet bevonó 4 és $\frac{1}{2}$ napos új hám. A kutikuláris szegély és az alaphártya ki van már fejlődve; a sejtek belső vége között sejt-közötti üregek vannak. (1000-szer nagyítva.)

3. kép: Az öt napos új hám sejtjeiben megkezdődött a festék-szemecskék lerakódása. (1000-szer nagyítva.)

4. kép: Nyálkát elválasztó mirigy keletkezése a 16 napos új hám-ban. (850-szer nagyítva.)

5. kép: Tapogató regenerált vége öt nappal a csonkítás után (az $x-x$ vonal mentén.) Az izomnyaláb elmetsett végéből kisarjadzanak az új izomrostok. (250-szer nagyítva.)

6. kép: A letépett fedő helyén 25 nappal a csonkítás után kialakultak az új, pálczikaalakú fedőkészítő mirigyos sejtek; fölöttük a fedő egynehány levált rétege. (300-szor nagyítva.)

7. kép: Ugyanaz 29 nappal a csonkítás után. (650-szer nagyítva.)

8. kép: Az újból fejlődő 18 napos szem. A szemhólyag éppen lefűződött a külhámról. (500-szor nagyítva.)

9. kép: 20 napos regenerált szem a fejlődő szemlencsével. (500-szor nagyítva.)

10. kép: 28 napos szem, a melyben már az üvegtest is kifejlődött. A szemhólyag alatt láthatók a fejlődő látóideg rostjai. (700-szor nagyítva.)

11. kép: 60 napos szem metszete, a melyen már az előcsarnok is kialakult. (500-szor nagyítva.)

12. kép: 80 napos, teljesen kész, regenerált szem metszete. (500-szor nagyítva.)

13. kép: 30 napos regenerált szem dupla lencsével. A lencse bel-sejében tömöttebb foltok. (500-szor nagyítva.)

14. kép: 30 napos regenerált szem, jól fejlett látóidegdúcvezet és az érzéksejteket ellátó idegrostokkal. (500-szor nagyítva.)

15. kép: 30 napos szem reczehártyájának egy darabja. A kerek-magvú festéksejtek között megnyúlt érzéksejtek vannak, a melyeket idegrostok látnak el. (1500-szor nagyítva.)

16. kép: Nem regenerált szem, a melyben szintén (mint a 13. képen) láthatók a lencse tömöttebb foltjai. (500-szor nagyítva.)

A FÉNYFORRÁS MOZGÁSÁNAK HATÁSA A FÉNYJELENSÉGEKRE.

ZEMPLÉN GYÖZÖ 1. tagtól.

TARTALOMJEGYZÉK.

1. §. Bevezetés.
2. §. A MICHELSON-féle kísérlet és az eddigi eredmények.
3. §. Az új föltevés.
4. §. A MICHELSON-féle kísérlet eredményének értelmezése az új hypothesis alapján.
5. §. Elektrodynamikai jelenségek és a Föld mozgása.
6. §. Az új hypothesis és az eddigi elméletek. — A hypothesis második alakja.

1. §. Bevezetés.

Ismeretes, hogy mindazok a kísérletek, a melyeknek célja volt kimutatni a Föld haladó mozgásának hatását optikai és elektrodynamikai tűneményekre, negatív eredménynyel végződtek, úgy hogy mindinkább gyökeret vert a tudományos körökben az a vélemény, hogy az említett hatást egyáltalában nem is lehet kísérlettel kimutatni. E véleményt EINSTEIN igen általános physikai hypothesis rangjára emelte és bámulatos abstractióval az összes physikai jelenségek olyan új elméletének vetette meg alapjait, melyben csupán anyagi rendszereknek egymáshoz viszonyított *relatív* sebességei szerepelnek, melyben tehát definitio szerint nem lehet hatása a föld haladó mozgásának a rajta végbemenő elektrodynamikai jelenségekre.

EINSTEIN rendszere önmagában teljesen ellenmondásmentes, és eddig oly kísérleti tapasztalataink sincsenek, melyekkel a «relativitás elmélete» össze ne férhetne; az elméletnek mind

a mellett több oly eredménye van, mely eddigi felfogásunkat gyökeresen megváltoztatja és szokatlanságával a physikusok idegenkedését, sőt sok esetben nyílt ellenszegülését idézte elő. Különösen meglepők EINSTEIN fejtegetései, melyek az idő fogalmának definitiójára vonatkoznak és a melyekből kitűnik, hogy a relativitás elméletében még az *időbeli sorrendnek* sincs abszolút értelme.

Természetesen valamely felfogás szokatlansága semmiképen sem érv a felfogás jogosultsága ellen, sőt ellenkezőleg, a tudomány történetének tanúsága szerint az igazi nagy haladás legtöbbször megszokott fogalmaknak és ismereteknek gyökeres felforgatásával jár; mind a mellett jogosan vethetjük fel azt a kérdést, vajjon azok a negatív kísérletek, a melyek EINSTEIN elméletének tapasztalati alapját alkotják, szükségképen maguk után vonják-e a relativitás elméletét, vagy pedig lehet-e ezeket a negatív eredményű kísérleteket megmagyarázni, a nélkül, hogy az egész fizikának, sőt egész világfelfogásunknak rendszerét megváltoztassuk.

A következőkben megmutatom, hogy — mindenesetre egy újabb hypothesis bevezetésével — valóban sikerül megmagyarázni az eddigi kísérletek negatív eredményét, úgy, hogy a fény tovaterjedése eddigi törvényeinek csekély módosítása árán az EINSTEIN-féle elmélet összes idegenszerűségeitől megszabadulhatunk.

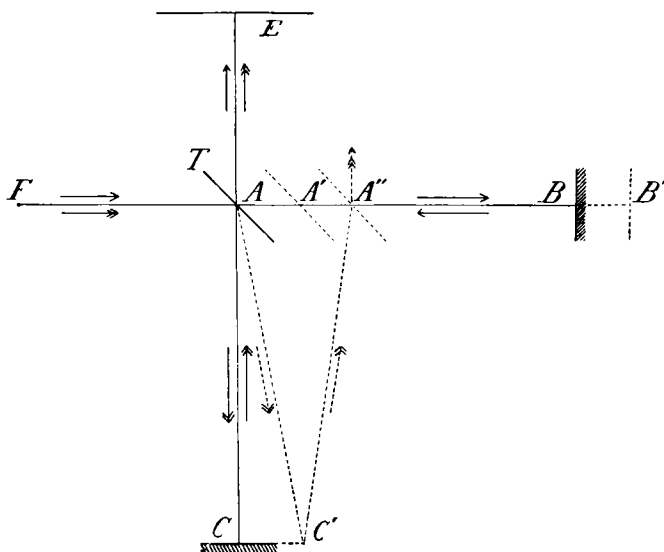
Az általam bevezetendő hypothesis lényege az, hogy *mozgó* fényforrásból kiinduló fénysugarak a különféle irányokban más-más sebességgel terjednek tova, míg EINSTEIN elmélete éppen a fény terjedésssebességének universalis állandóságán épül fel.

2. §. A Michelson-féle kísérlet és az eddigi elméletek.

A legfontosabb idevágó kísérlet a MICHELSON-féle,¹ melynek vázlata az 1. rajzon látható: az *F'* fényforrásból kiinduló fény-

¹ A. A. MICHELSON: American Journal of Science (3) 22 k. (1881), 120. l. A. A. MICHELSON és E. W. MORLEY: American Journ. of Science (3) 34 k. (1887), 333. l.

sugár az A -ban lévő planparallel üveglemezre (T) esik, részben visszaverődik, részben pedig keresztül halad rajta. A visszavert sugár a C tükrön merőlegesen visszaverődve visszajut A -ba s a lemezen keresztülhatolva az E ernyőre esik. A törött sugár áthalad a lemezen és a B tükrön merőlegesen visszaverődve visszajut A -ba s újabb visszaverődés útján jut az ernyőre, a hol a két sugárnak A -ban történt találkozása folytán interferencia-



1. ábra.

csíkok fognak megjelenni. A csíkrendszer eltolódásával árulja el a két sugár útja között fellépő útkülönbségnek bármely megváltozását. Az egyik sugár útja $FACAE$, a másiké $FABAE$; minthogy pedig az FA és AE útdarabok közösek, az útkülönbség csupán ABA -tól és ACA -tól fog függeni. Tegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy $AB = AC$. Ha az egész rendszer nyugalomban van, akkor a fénynek az AB út befutásához ugyanannyi időre lesz szüksége, mint a BA út befutásához; ugyanúgy nem lesz különbség az AC és a CA utak befutásához szükséges idők között sem. Ámde ha az egész rendszer

fényforrással, tükörökkel együtt pl. az FA irányban u sebességgel mozog, a viszonyok megváltoznak; ha fölteszük, hogy *a rendszer mozgása a fény tovaterjedésének c sebességét nem változtatja meg*, az egyes útdarabok befutásához szükséges időket a következő képletek szolgáltatják:

$$t_{AB} = \frac{AB}{c-u} \quad t_{BA} = \frac{AB}{c+u}. \quad (1)$$

De még az AC és CA utak befutásához szükségelt idők sem maradnak ugyanazok, mint nyugvó rendszerben, mert az alatt, hogy a fénysugár a C tükrön való visszaverődés után a T lemezhez visszajut, A már elmozdult, a sugár útja $AC'A''$, tehát feltétlenül hosszabb ACA -nél. A számítás eredménye:

$$t_{AC} = \frac{AB}{c} \sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}} = t_{CA}. \quad (2)$$

Az ABA sugár átkelésének teljes ideje e szerint:

$$t_I = t_{AB} + t_{BA} = AB \left(\frac{1}{c-u} + \frac{1}{c+u} \right), \quad (3)$$

az ACA sugaré:

$$t_{II} = t_{AC} + t_{CA} = \frac{2AB}{c} \sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}. \quad (4)$$

Elhanyagolva az $\frac{u^2}{c^2}$ -nél magasabbrendű tagokat:

$$t_I = \frac{2AB}{c} \left(1 + \frac{u^2}{c^2} \right) \quad (5)$$

$$t_{II} = \frac{2AB}{c} \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} \right). \quad (6)$$

Ha tehát nyugvó rendszerben állítanók elő az interferentiatűneményt, azután a rendszert u sebességű mozgásba hozzuk, a csikrendszer

$$t_I - t_{II} = \frac{2AB}{c} \cdot \frac{u^2}{2c^2} \quad (7)$$

időkülönbségnek, illetőleg

$$AB \cdot \frac{u^2}{\lambda c^2} \quad (8)$$

optikai útkülönbségnek megfelelő eltolódást fog szenvedni, a hol λ az alkalmazott fény hullámhossza.

Ezt az eltolódást MICHELSON úgy akarta megvalósítani, hogy a rendszert előbb úgy állította be, hogy FA a Föld Nap körüli mozgásának irányába essék; ez esetben u a Föld Nap körüli mozgásának sebessége és

$$\frac{u}{c} = \text{körülbelül } 10^{-4}.$$

Ha most az egész rendszert a rajz-síkra merőleges tengely körül 90° -kal elforgatta, a két sugár szerepet cserélt, az elsőnek útja csökkent, a másodiké megnövekedett, úgy hogy a csíkoknak a (8) alatti útkülönbség kétszeresének megfelelően $\frac{2ABu^2}{\lambda c^2}$ csikszélességgel kellett volna eltolódnok. Azonban a legnagyobb gonddal végzett kísérletekben sem tudták sem MICHELSON, sem követői az eltolódásnak még a nyomát sem felfedezni, pedig a kísérleti berendezés legutóbb¹ már oly tökéletes volt, hogy a számított eltolódásnak $\frac{1}{200}$ -részét még észre lehetett volna venni.

A kísérlet negatív eredményének magyarázatára FITZGERALD² és LORENTZ³ föltette, hogy a mozgó testek sebességük irányában megrövidülnek, még pedig:

$$1 : \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 1 : \left(1 - \frac{u^2}{2c^2}\right) \quad (9)$$

arányban; az (5) képlet ez esetben, ha az I. sugár fut a Föld mozgása irányában, a következőképpen módosul:

$$t_1 = \frac{2AB}{c} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{2AB}{c} \left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right), \quad (10)$$

¹ MORLEY és MILLER: Philosophical Magazine (6), 8. k. 753. l. (1904) és (6). 9. k. 680 (1905).

² FITZGERALD: Transactions of the Royal Society Dublin (2) 1 k. 319 (1883). LODGE: Transactions of the Royal Society London 184. k. 727 (1893).

³ LORENTZ H. A.: Zittingsverslag Akad. v. Wet. Amsterdam 1. 74. l. (1892).

a (6) azonban változatlan marad; minthogy e szerint $t_I = t_{II}$ akárcsak a nyugvó rendszerben, a csikok a tengely körüli forgás közben nem fognak eltolódni.

A FITZGERALD-LORENTZ-féle contractio-hypothesis elég idegenszerű; nem is késett soká kísérleti czáfolata sem. Lord RAYLEIGH és BRACE¹ a contractio folytán előálló kettős törést kereste, de nem tudta kimutatni, pedig a kísérleti berendezés oly érzékeny volt, hogy a számított hatásnak 10,000-ed részét még észre lehetett volna venni. RANKINE és TROUTON² a contractio hatását fémdrót elektromos ellenállásán vizsgálták meg és ugyancsak arra az eredményre jutottak, hogy contractio nincsen.

Említésre méltó még COHN³ javaslata, a ki a mozgó rendszerek elektrodinamikája alapegyenleteinek adott oly alakot, hogy a MICHELSON-kísérlet negatív eredménye magyarázatot találjon. Az egyenletek következménye, hogy mozgó közegben a fényhullám hossza más oly sugárnál, mely a sebesség irányában terjed tova, mint a reá merőleges sugaraknál. A COHN-féle elméletről alább még részletesen szólnunk.

E szerint a ma ismeretes elméletek közül egyedül a relativitás tana ad helyesen számot a kísérleti eredményekről, azonban ez az elmélet megszünteti az æther fogalmát is, mely sok jelenség megértésére oly hasznos szolgálatot tett és az egész mai physika újbóli felépítését teszi szükségessé.

A következőkben ismertetendő elmélet eddigi felfogásunk gyökeres átalakítása nélkül alkalmas a kísérleti jelenségek kielégítő magyarázatára, ámbár nem hagyja egészen változatlanul a fény terjedésére vonatkozó mai felfogásunkat, a mi természetes is, mert hiszen kétségtelen, hogy változatlanul megtartva a mai mechanikát és elektrodinamikát, a MICHELSON-féle kísérlet eredményét megmagyarázni nem lehet.

¹ LORD RAYLEIGH: Phil. Mag. (6) 4. 678. l. (1902). BRACE: Phil. Mag. (6) 7. 317. l. (1904).

² RANKINE és TROUTON: Proceedings of Royal Society 8. 420. l. (1908).

³ E. COHN: Ann. d. Phys. 7, 29. l. (1902).

3. §. Az új föltevés.

Az ismertetendő elmélet megtartja a LORENTZ-féle elméletnek nyugvó, mindent átható és az anyagok mozgásában részt nem vevő *aetherét*, melynek alapján LORENTZ-nek sikerült a mozgó testek optikájának minden kísérleti jelenségét megmagyarázni (aberratio, a fényhullámok tovaragadása mozgó anyagi közegben stb.), éppen csak a MICHELSON-féle kísérlet kedvéért kellett neki új hypothesis-t bevezetni. Nekem is szükségem van ez utóbbinak magyarázata végett új föltevésre, ámde ez a föltevés először is nem oly idegenszerű, mint a LORENTZ-féle contraction-hypothesis, másodszor nincs ellenmondásban lord RAYLEIGH, BRACE továbbá RANKINE és TROUTON kísérleteivel.

A továbbiakban ugyanis fel fogjuk tenni, hogy az ætherhez képest mozgó fényforrásból a fény különféle irányokban más-más sebességgel terjed tova. A fényforrás mozgása által okozott változás nagyságát pedig úgy állapítjuk meg, hogy a MICHELSON-féle kísérlet negatív eredménye meg legyen magyarázva.

E célznak teljesen megfelel a következő feltevés:

$$c_m = c_0 \left(1 - \frac{u \cos \alpha}{2c_0^2} \right), \quad (11)$$

a hol c_0 a nyugvó, c_m pedig a mozgó fényforrásból kiinduló fény tovaterjedésének sebessége, α pedig az a szög, a melyet a fénysugár iránya a fényforrás u sebességével bezár.

Oly sugárban tehát, mely a fényforrás mozgásának irányában terjed tova, a terjedésssebesség:

$$c_m = c_0 \left(1 - \frac{u^2}{2c_0^2} \right), \quad (12)$$

míg a mozgás irányára merőleges sugárban:

$$c_{m\perp} = c_0, \quad (13)$$

tehát a terjedésssebesség változatlan marad.

★

Vizsgáljuk most meg, vajjon elfogadható-e a (11) illetve a (12) és (13) alatti föltevés. Helyezkedhetnénk ugyan arra az elvi állás-

pontra is, hogy egy alaphypotesisről nem kutatjuk, hogy igaz-e vagy sem, csupán azt vizsgáljuk, vajjon következményei megegyeznek-e a kísérleti tapasztalatokkal. Mind a mellett kívánatos magát a hypotesist már abból a szempontból is bonczolgatni, hogy vajjon nem vonja-e maga után a máig szép sikerrel felépített elméletnek oly gyökeres átalakítását vagy felforgatását, mely miatt az új hypotesis, mint czélszerűtlen, elvetendő volna.

Kétségtelen, hogy a tovaterjedés sebességének függése a fényforrás sebességétől első pillanatra idegenszerű és a classicus mechanikában és elektrodynamikában ismeretlen. Különös aggályaink támadnak a hypotesis ellen, ha a fényhullámot akkor vizsgáljuk, a mikor a fényforrástól már elszakadt; hogyan lehetséges az, hogy az æther-deformatio, melylyel a fényjelenséget magyarázni próbáljuk, a fényforrástól elszakadva, tőle bármilyen távolságban, még mindig a fényforrás mozgásától függő módon közlódik a szomszédos ætherrészekkel? Hogyan tartható meg akkor a HUYGENS-féle elv, a hullámelméletnek ez a legbecsesebb kincse, ha a mozgó fényforrás nem helyettesíthető a hullámfelülettel, mert hiszen a hullámfelület rezgései a nyugvó ætherben történnek, tehát — az új hypotesis szerint — más sebességgel terjednek tova, mint a mozgó fényforrásból kiinduló rezgések?

Ezeket az aggályokat véleményem szerint eloszlatják a következő megfontolások. Mindenekelőtt be kell látnunk, hogyha a MICHELSON-féle és egyéb kísérleteket meg akarjuk magyarázni, okvetlenül meg kell változtatnunk valamely részletében a classicus mechanikát és elektrodynamikát, tehát le kell mondanunk valamely jól megszokott, eddig esetleg igen czélszerűnek bizonyult optikai képről. Mind a mellett beláthatjuk, hogy a c_m és c_0 között feltételezett különbség egészen jól összefér a pontról-pontra való terjedés eddigi fogalmával és a HUYGENS-féle elvvel sincs semmiképpen ellenmondásban.

A hullámszerű tovaterjedés leglényegesebb tulajdonsága az, hogy a közeg bármely része deformációjának tovaterjedése csakis az illető rész deformációjától függ és teljesen független ama részek állapotától, a melyeken a deformatio *előbb* végigfutott.

Ez jut kifejezésre a HUYGENS-féle elvben is, mely szerint a *deformatio* forrása bármely hullámfelülettel helyettesíthető, ha a hullám további sorsát akarjuk megismerni. Ámde éppen ez a leglényegesebb alaptulajdonsága megvan az új hypothesis szerint történő tovaterjedésnek is. Igen jól lehet ugyanis elképzelni, hogy az ætherhez képest mozgásban lévő fényforrás az ætherben bizonyos *deformatiót* kelt, mely a fényrezgésekhez hozzáadódik, valami módon velük összeszővődik, úgy, hogy a mozgó fényforrásból kiinduló rezgés tulajdonképpen másféle ætherdeformatio, mint a nyugvó forrás fénye. Közelfekvő tehát annak föltevése, hogy az ilyen a fényforrás mozgása által megváltoztatott *deformatio* más sebességgel fog tovaterjedni, mint a tiszta fényrezgés. Még jobban kivetkőztetjük idegenszerűségéből feltevésünket, ha meggondoljuk, hogy a fényt az elektromágneségi fényelmélet szerint nem az ætherrészesecskék rezgő mozgása okozza, hanem elektromos és mágnességi erőknek periodusos változása; már most semmiképen sem lehetetlen, hogy ezek az erők más sebességgel terjednek tova akkor, ha még egy a fényforrás mozgásától származó ætherimpulsus is kíséri őket. De még egy körülményt említhetünk, mely az új hypothesisra kedvező: a fényrezgések transversalisak, míg feltevésünk szerint csak a fényforrás longitudinális mozgása okoz változást a fénysebességben, úgy hogy végeredményben hypothesisünk a következő formában is fogalmazható: az oly transversalis ætherdeformatiók, melyeket longitudinális *deformatio* is kísér, más sebességgel terjednek tova, mint a tiszta transversalis *deformatiók*.

Ebből a fogalmazásból világosan kitűnik, hogy hypothesisünk nincsen ellenmondásban a HUYGENS-féle elvvel, mert hiszen a mozgó fényforrásból kiinduló fény oly bélyeget szerez a forrás mozgása révén, melyet tovaterjedése folyamán változatlanul megtart, úgy hogy itt is a *deformatio* tovaterjedésének sebessége a közeg bármely pontjában kizárólag az illető pont környezetének *deformatiójától* függ.

Hogy a fényforrás mozgásának hatása a tovaterjedés sebességére miért mutatkozik számszerűen éppen a (11) alatti egyenlet értelmében, azt persze nem kutatjuk. Sőt nem is keresek oly

részletes szerkezetet vagy képet, mely a (11) egyenletre vezet, még pedig a következő okból: az ily kép vagy szerkezet vagy a classicus mechanika és elektrodynamika alapján épül fel és akkor nem vezethet a (7) egyenlethez, vagy pedig megint egy újabb hypothesis alapján készül; annak pedig nincs czélja, hogy az egyik hypothesis-t egy ugyanarra az eredményre vezető másikkal helyettesítsük.

4. §. A Michelson-féle kísérlet eredményének értelmezése az új hypothesis alapján.

Lássuk már most vajjon a (12), illetőleg (13) alatti föltevések alapján miképpen lehet a MICHELSON-féle kísérlet negatív eredményéről számot adni.

E kísérletben tükrözések, sőt törések is előfordulnak, kérdés tehát, vajjon megváltoztatja-e a fényforrással egyenlő sebességgel mozgó határfelületeken való visszaverődés a fény tovaterjedésének sebességét. Erre a kérdésre a HUYGENS-féle elvnek czélszerű általánosítása adja meg a feleletet. Ennek az elvnek igazi jelentése pedig az, hogy a hullámfelület minden pontja a fényforrással hasonló szerepet játszik, a mi esetünkben tehát úgy viselkedik, mint egy *a fényforrással egyenlő sebességgel mozgó fényforrás*; a fényforrással egyenlő sebességgel mozgó felületekről visszavert vagy tükrözött fénysugarban e szerint a tovaterjedés sebessége — a közegtől és rezgésszámtól való ismert függésen kívül — *kizárólag a sugár és az eredeti fényforrás irányai által bezárt szögtől fog függeni.*

Oly sugárban, mely akárhány törés vagy visszaverődés után α irányt zár be a fényforrásnak u sebességével; a tovaterjedés sebessége e szerint:

$$c_{ma} = c_0 \left(1 - \frac{u \cos \alpha^2}{2c_0^2} \right) \quad (14)$$

éppen úgy, mintha a visszaverődés vagy törés helyén u sebességgel mozgó fényforrás volna jelen.

A (11) és (14) alatti egyenleteink alapján már most azonnal meg tudjuk magyarázni a MICHELSON-féle kísérlet negatív eredményét.

Valóban az $AB'A''$ (I.) sugár AB' darabján $\alpha = 0$, a továbbterjedés sebessége:

$$c_m = c_0 \left(1 + \frac{u^2}{c_0^2} \right). \quad (15)$$

a B' -ben történő merőleges visszaverődés után $\alpha = \pi$, tehát ismét a (15) képlet szolgáltatja c_m -et. E szerint az átkelési idő:

$$t_I = \frac{2BA \left(1 + \frac{u^2}{c_0^2} \right)}{c_0 \left(1 + \frac{u^2}{2c_0^2} \right)} = \frac{2AB}{c_0} \left(1 + \frac{u^2}{2c_0^2} \right). \quad (16)$$

Az $AC'A''$ sugár átkelési ideje ugyanaz marad, mint a mit a régi elméletből számítottunk, mert e sugár mindvégig merőlegesnek tekinthető a fényforrás mozgásának irányára:¹

$$t_{II} = \frac{2AB}{c_0} \left(1 + \frac{u^2}{2c_0^2} \right). \quad (19)$$

E szerint $t_I = t_{II}$ éppen úgy, mint nyugvó rendszerben. Igaz tehát, hogy mindkét sugár átkelés-ideje a rendszer mozgása folytán megváltozott, ámde mind a Föld mozgásának iránya mentén, mind pedig a reá merőlegesen haladó sugáré egyenlő arányban, úgy, hogy a találkozók sugarak fáziskülönbségeit a mozgás nem fogja megváltoztatni. Ha tehát az egész kísérleti berendezést mint merev rendszert az I. és II. sugarak síkjára merőleges tengely körül 90° -kal körülforgatjuk, az E ernyőn észlelhető interferenciacsíkok helyzetében változás nem lesz észrevehető. De akkor sem észlelhető változás, ha a rendszer elforgatásának szöge nem 90° ,

¹ Szigorúan véve AC' és $C'A''$ nem merőlegesek AB -re; azonban ez esetben közelítőleg:

$$\cos \alpha = \frac{u}{c_0} \quad (17)$$

(α alatt most a BAC' szöget értve), tehát:

$$c_m = c_0 \left(1 + \frac{u^2}{2c_0^2} \right). \quad (18)$$

Számításunkban azonban az $\frac{u}{c_0}$ -ban másodfokú tagokra szorítkozunk.

hanem tetszésszerű φ értékű. Mert hiszen akkor az FA irányban $u \cos \varphi$, a reá merőleges irányban $u \sin \varphi$ lesz a rendszer translációja az ætherben; ámde sem az FA , sem az AC irányba eső sebességi összetevő nem okoz különbséget a két sugár átkelési ideje között, együttes fellépésük sem fog tehát az interferentia-csíkok helyzetében eltolódást okozni. Egyszerű számítás mutatja, hogy az átkelési idők φ -től a következőképpen függenek:

$$t_I = \frac{2AB}{c_0 \left(1 + \frac{u^2 \cos^2 \varphi}{2c_0^2}\right)} \left(1 + \frac{u^2 \cos^2 \varphi}{c_0^2} + \frac{u^2 \sin^2 \varphi}{2c_0^2}\right) =$$

$$= \frac{2AB}{c_0} \left(1 + \frac{u^2}{2c_0^2}\right) \quad (20)$$

másrészt:

$$t_{II} = \frac{2AB}{c_0 \left(1 + \frac{u^2 \sin^2 \varphi}{2c_0^2}\right)} \left(1 + \frac{u^2 \sin^2 \varphi}{c_0^2} + \frac{u^2 \cos^2 \varphi}{2c_0^2}\right) =$$

$$= \frac{2AB}{c_0} \left(1 + \frac{u^2}{2c_0^2}\right) = t_I.$$

A rendszer forgatása közben e szerint nincs különbség a különböző irányok közt.

A mint látjuk, hypothesisünk teljesen megmagyarázza a MICHELSON-féle kísérlet negatív eredményét. Azonban semmiképen sem állítom, hogy más kísérleti berendezéssel ne lehetne a hypothesisist ellenőrizni. Az oly berendezés, melylyel a fénysebességet 10^{-8} -adrészig lehet lemérni, már eldönthetné a kérdést, vajjon okoz-e a földmozgás különbséget a fényforrásból más-más irányban tovaterjedő fénysugár tovaterjedésének sebességében.

Csillagászati jelenségek is alkalmasak lehetnek a hypothesis megvizsgálására. A legújabb irodalomban már találkozunk oly fejtegetésekkel, a melyeknek célja csillagászati úton megvizsgálni, vajjon függ-e a fény tovaterjedésének sebessége a fényforrás sebességétől. W. de SITTER¹ a spektroskopos kettős csil-

¹ W. DE SITTER: Physikalische Zeitschrift, 14. 429. l. 1913.

lagok megfigyeléséből meritett adatok alapján czáfolni törekszik a RITZ-féle elmélet (lásd alább) ama föltevését, hogy a fényforrás sugármenti sebessége a fény sebességéhez egyszerűen hozzáadódik. Minthogy a kettős csillagokban oly fényforrásokat figyelhetünk meg, melyek közös tömegközéppontjuk körül nagy sebességgel keringenek: ha a szükséges adatok rendelkezésünkre állanak, a RITZ-féle föltevés valóban ellenőrzésnek vethető alá. SITTER a dolgozatában felhozott adatok alapján a RITZ-féle föltevést megdöntöttnek tekintí. E. FREUNDLICH¹ azonban figyelmeztet arra, hogy a SITTER-féle megdöntés még nem bizonyítja azt, a mi a SITTER-féle dolgozat czímében is kifejezésre jut (Ein astronomischer Beweis der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit), hogy a fénysebesség független a fényforrás mozgásától, legfeljebb azt, hogy a RITZ-féle föltevés, mely szerint

$$c_m = c_0 + u,$$

tarthatatlan. FREUNDLICH szerint azonban lehetséges volna még a

$$c_m = c_0 + ku,$$

föltevés, a hol k az egységnél kisebb pozitív szám. Az eddigi adatok alapján FREUNDLICH arra a következtetésre jut, hogy a fénysebesség állandóságának csillagászati bizonyítékairól ma még nem beszélhetünk, ámbár elismeri, hogy a kettős csillagok megfigyelését erre a célra rendkívül alkalmasnak tartja. Sőt az a körülmény, hogy pl. MILLER BAR szerint 28 kettős csillag közül 23-nak látszólagos pályája a Föld felé irányított tengelyű ellipsis, FREUNDLICH szerint úgy is értelmezhető, hogy a pályák valóságban körök és a fénysebesség függ a fényforrás sugármenti sebességétől.

Minthogy a kettős csillagoknál u 100 km/sec rendű, tehát

$$\frac{u}{c} = 3 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{u^2}{c^2} = 10^{-7}$$

volna, érdeklődéssel tekinthetünk a további ily irányú vizsgálatok elé.

¹ E. FREUNDLICH: Physikalische Zeitschrift, 14. 835. l. 1913.

5. §. Elektrodynamikai jelenségek és a Föld mozgása.

A MICHELSON-féle kísérleten kívül még két kísérletcsoport van, melyet a relativitás javára lehet értelmezni; ezek már nem fénytani, hanem elektrodynamikai jelenségekre vonatkoznak. Ha azonban az elektromágnességi fényelmélethez ragaszkodni akarunk, a mire e hatalmas elmélet eddigi bámulatos sikerei úgyszólván kényszerítenek, a fényforrás hatását a fénysebességre ki kell terjesztenünk arra a hatásra is, a melyet az elektromos és mágnességi erőforrások az erő terjedésebbességére gyakorolnak. Kérdés már most, hogy miképpen értelmezhető az említett két kísérletcsoport az új hypothesis alapján. E kísérletcsoportok elseje elektrosztatikus rendszereknek a Földmozgás hatása alatti viselkedésére vonatkozik, a második csoport az elektron elektromágneses tömegének vizsgálatát öleli fel.

Az első csoportba tulajdonképpen csak egy kísérletsorozat tartozik: a TROUTON és NOBLE-féle.¹ A nyugvó æther és állandó tovaterjedésebbességet föltételező LORENTZ-féle elméletből következik, hogy egy mozgó síklemezes sűrítőre, melyben a síkok normálisai a mozgás irányával ϑ szöget zárnak be, oly forgató nyomaték hat, melynek tengelye a mozgás irányára és a sűrítőlemez normálisára merőleges, nagysága pedig:

$$F = \frac{u^2}{c^2} E \cdot \sin 2\vartheta,^2 \quad (21)$$

a hol E a rendszer elektrosztatikus energiája, u pedig, mint a megelőzőkben, a rendszer sebessége az ætherhez viszonyított mozgásában.

TROUTON és NOBLE az elmélet ez eredményének ellenőrzése céljából felfüggesztettek egy síklemezes sűrítőt egy torsiómérleg rúdjának egyik végére, míg a másikra megfelelő ellensúlyt helyeztek. Az eszközt úgy állították be, hogy töltetlen sű-

¹ FR. P. TROUTON és A. R. NOBLE: Proceedings of the Royal Society of London, 72, 132. l. 1903.

² L. pl. LORENTZ: Encyklopädie der math. Wissenschaften, V. 2. k. 14. fejezet 259. l. 1904.

ritő esetében a lemezek normálisa a Föld mozgásával mintegy 45° szöget zárjon be (ebben az esetben legnagyobb a várható forgató nyomaték). Ha már most a sűrítőt megtöltött, az elmélet szerint a torsio-mérlegnek el kellett volna csavarodni. A legnagyobb elcsavarodás, melyet TROUTON és NOBLE észlelt, öt százaléka volt annak az elcsavarodásnak, a mely a (21) képletnek megfelelt volna. Joggal következtettek tehát arra, hogy a Föld mozgásának keresett hatása a valóságban nincs meg.

LORENZ¹ és LARMOR² e kísérletnek negatív eredményét is ama külön föltevés alapján magyarázta, hogy a Föld mozgása folytán a rendszereknek a mozgás irányába eső méretei

$l : l' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ arányban megváltoznak (LORENZ-contractio).

A második kísérletcsoport, melynek értelmezése az új hypothesis bevezetése által változást szenvedhet, az elektron elektromágneses tömegének vizsgálatát célzó kísérleteket foglalja magában. Ezek a kathodsugarak és radioaktív sugárzások eltérítésével végzett kísérletek annyira ismeretesek, hogy részletes irodalmi ismertetésük itt feleslegesnek látszik. Csak annak fölemlítésére szorítkozom, hogy a LORENTZ-contractio és az EINSTEIN-féle relativitás-elmélet az elektromágneses tömeg számára azonos eredményre vezet, e tömeg mindkét elmélet szerint egyformán függ az elektron sebességétől. Míg a kísérletek előbb inkább az ABRAHAM-féle «merev» elektron hypothesisét látszottak igazolni,³ addig a legújabb mérések eredményei közelebb állanak a LORENTZ-EINSTEIN-féle elmélet következményeihez.⁴

Mindkét kísérletcsoport elméletében főszerepet visz az *elektromágneses mozgásmennyiség*, melynek bevezetése a következő megfontolások alapján történik. Ha a mozgásmennyiség megmaradásának mechanikai elvét (actio és reactio egyenlőségének elvét) elektromágneses jelenségekre akarjuk alkalmazni, azt

¹ LORENTZ: Encyclopädie (az idézett helyen) 278. l.

² LARMOR: Scientific writings of G. F. FITZ-GERALD, edited by LARMOR, 566. l. (1902).

³ W. KAUFMANN: Ann. d. Phys. (4) 19, 487. l. (1906).

⁴ A. BUCHERER: Ann. d. Phys. (4) 28, 513. l. (1909). — CL. SCHÄFFER: Physikalische Zeitschrift, 14, 1117. l. (1913).

tapasztaljuk, hogy az elv elveszíti érvényességét, ha kizárólag mechanikai mozgásmennyiségekre szorítkozunk. Ha ellenben — a mint legelőször POINCARÉ tette — az elektromágnességi tér minden pontjában alkalmas módon definiáljuk az elektromágneses mozgásmennyiséget, az elv a mechanikai és az elektromágneses mozgásmennyiségek összegére elektromágneses jelenségek körében is érvényben marad. Egészen hasonló megfontolások alapján jutunk az energia megmaradásának elve alapján is a nem mechanikai energiák definitiójához és minthogy az említett módon bevezetett elektromágneses mozgásmennyiség segítségével több jelenségnek helyes értelmezése lehetséges (pl. sugárnyomás s a belőle levezetett STEFAN-BOLTZMANN-féle sugárzás-törvény), bizalmunk az elektromágneses mozgásmennyiség definitiójában mindinkább megerősödik.

Az elektromágneses mozgásmennyiség következménye maga az elektromágneses tömeg, mely, mint tudjuk, kísérletekkel jól hozzáférhető. Hogy tehát új hypothesisünket a szóban forgó kísérletcsoportokra alkalmazva kipróbálhassuk, újból fel kellene építeni a mozgó testek elektrodinamikáját változó terjedéssel, sebesség mellett, különös gondot fordítva arra, hogyan definiáljuk az elektromágneses mozgásmennyiséget. Ez mindenesetre további részletes vizsgálatok feladata volna; annyit azonban úgyszólván minden számítás nélkül beláthatunk, hogy új hypothesisünk az elektromágneses jelenségek körében — legalább is nem túlságos nagy sebességek esetében — ugyanarra az eredményre vezet, mint a LORENTZ contractio-elmelete.

Mert valóban, mit is jelent az, ha mi az elektromágnességi térnek minden térfogatelemét elektromágneses mozgásmennyiséggel ruházzuk fel és az egész térre alkalmazzuk a mozgásmennyiség megmaradásának elvét? Egyszerűen azt, hogy a rendszer mozgásának vizsgálatakor tekintetbe vesszük a rendszer saját elektromágnességi terének a rendszerre gyakorolt reakcióját; valóban egy elektromágnességi rendszer környezetében elektromágnességi teret kelt és mozgásában már most ezzel az önmaga által létesített térrel is számolnunk kell. Ez a tér okozná a TROUTON és NOBLE-féle kísérletnél hiába keresett forgató nyomatékot és az elektron is saját terében mozogva, a tér fekező hatása alatt

tömegében megnövekedni látszik, akárcsak az ellenálló közegben mozgó test.

A tér reactiója már most a következő módon jön létre: a mozgó minden részecskéjéből erőhatások indulnak ki az egész környező ætherbe — ez az *actio* —; az æther minden pontjából viszont erőhatások indulnak vissza a mozgóhoz — ez a *reactio*. A LORENTZ-féle elméletben ezek a hatások állandó sebességgel történnek, úgy azonban, mintha az *egész* térnek a mozgás irányában mért dimenziói eredeti méreteik

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \text{ -szeresére}$$

rövidülnének.

Mit várhatunk már most a mi hypothesisünk alapján? E szerint a mozgó testből kiinduló hatások c_m sebességgel indulnak ki, a hol c_m a (14) képletből számítandó, ép úgy a «*reactio*», mely az ætherből indul ki, oly sebességgel tér vissza, mintha az ætherben a hatás visszaverődött volna, tehát ugyancsak c_m sebességgel.

Viszont azonban a mi elméletünkben nincs *contractio*; világos, hogy a két elmélet végeredményben azonos eredményre vezet, ha a sebesség növekedése a mi hypothesisünk szerint ugyanabban az arányban történik, mint az utak rövidülése LORENTZ elméletében. Annyiban máris világos a megegyezés, hogy LORENTZ szerint a megrövidülés csakis a mozgás irányában mért dimenziókat érinti, míg nálam csakis a mozgás irányában mért *terjedésssebesség* növekszik meg. Ámde ha $\left(\frac{u}{c_0}\right)^2$ magasabb hatványait elhanyagoljuk, akkor a LORENTZ-féle *contractio* mértéke megegyezik az új hypothesis szerint bekövetkező sebességnövekedés arányszámával: valóban, a LORENTZ-*contractio* kicsiny $\frac{u}{c_0}$ mellett:

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 1 - \frac{u^2}{2c_0^2}, \quad (22)$$

míg a sebesség-növekedés arányszáma az új hypothesis szerint:

$$\frac{1}{1 - \frac{u^2}{2c_0^2}} = 1 + \frac{u^2}{2c_0^2}, \quad (23)$$

a mi előrebocsátott állításunkat igazolja.

6. §. Az új hypothesis és az eddigi elméletek.

A hypothesis második alakja.

Kérdés már most, hogy ha új hypothesisünk nagyjában ugyanazokra az eredményekre vezet, mint a LORENTZ-féle contractiós elmélet, miért tartottuk szükségesnek az új hypothesis bevezetését? Ennek az oka az, hogy — a mint a bevezetésben már említettük — a LORENTZ-féle contractiós elmélet kísérletekkel megcáfoltatott, míg ugyanazok a kísérletek az új hypothesis megcáfolására nem használhatók fel. A LORENTZ-féle contractio ugyanis a mozgó átlátszó isotrop anyagokat optikailag kettős törökké változtatná; ezt a kettős törést érzékeny optikai módszerekkel ki lehetne mutatni. Mint említettük, LORD RAYLEIGH és BRACE kísérletekkel mutatták ki, hogy az elmélet követelte kettős törés nem létezik. A vizsgálandó anyagnak lehetőleg hosszú hasábját úgy helyezték el, hogy tengelye a földmozgás irányára merőleges legyen; ez esetben a LORENTZ-contractio folytán a hasáb tengelye irányában haladó transversalis fényrezgés két egymásra merőleges összetevőre oszlik, melyek közül a földmozgás irányába eső összetevő más sebességgel fog tovaterjedni, mint a reá merőleges összetevő; ha tehát felállítunk egy nicolhasábot úgy, hogy a rajta áthaladó fény rezgései a földmozgással 45° szöget zárjanak be, a fényben a hasáb befutása után ellipszises polárosság fog jelentkezni, a mi igen érzékeny módszerekkel kimutatható. RAYLEIGH és BRACE a kísérletet úgy végezték, hogy az egész kísérleti berendezést függőleges tengely körül 90° -kal körülforgatták és megállapították, hogy e közben a kilépő fény polárosságának állapotában észrevehető változás nem történt. Az utolsó kísérletekben a fénysugarak által befutott út vízben 2856 cm volt, üvegben pedig 420-tól 756 cm-ig változott. Egyik esetben sem volt tapasztalható az elmélet követelte kettős törés,

pedig a várható változás néhány ezredrészét a használt érzékeny kísérleti berendezés mellett még ki lehetett volna mutatni. A mi hypothesisünk szerint azonban az anyagok nem lesznek kettősen törővé, mert hiszen a fényforrás mozgása csak az összes, egy irányba kibocsátott fénysugarak terjedéssébségét változtatja meg, függetlenül a sugárban történő rezgések síkjától.

Ha a mozgó fényforrás környezetében vizsgáljuk a teret, akkor azt látjuk, hogy hypothesisünk szerint a fény benne úgy terjed tova, mint egy egytengelyű kristályban az extraordinárius sugár; ugyanilyen viselkedést mutat valamely mozgó közegnek bármely pontja a COHN-féle elmélet értelmében.

A COHN-féle elmélet alapgondolata még legközelebb áll új hypothesisünkhez, azonban mégsem azonos vele. COHN szerint a tovaterjedés sebessége oly közegben, mely v sebességgel mozog és a melynek dielektromos állandója ϵ , a következő:

$$c' = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon}} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)v + \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \frac{v^2}{c_0}. \quad (24)$$

A légüres térre nézve azt kapnók, hogy ($\epsilon=1$ lévén):

$$c' = c_0 \left(1 + \frac{v^2}{c_0^2}\right). \quad (25)$$

Ámde itt v a közeg áramlási sebességét jelenti; de hiszen a vacuumban nem lehet anyagáramlás és a tovaterjedéssébségnek a c_0 állandóval egyenlőnek kellene maradni. Ez azonban azt jelentené, hogy a MICHELSON-féle kísérlet vacuumban positiv eredményre vezetne, a mi bár kísérlettel nem ellenőrizhető, de minden esetre igen valószínűtlenné teszi az alapföltevést. A COHN-féle elméletnek ezt a fogyatkozását szóvá teszi W. WIEN¹ és LORENTZ² is. De még a következőket is felemlítjük, melyek szerint a COHN-féle egyenletrendszerrel nem tartjuk végleg elintéztetnek a mozgó rendszerek elektrodinamikáját.

Ha a tovaterjedéssébség COHN szerint a Földön, levegőben közelítőleg:

¹ W. WIEN: Ann. d. Phys. 14. 632. l. (1904).

² H. A. LORENTZ: Encyklopädie (az idézett helyen) 276. l.

$$c' = c_0 \left(1 + \frac{u^2}{c_0^2} \right), \quad (26)$$

a mit a (24)-ből úgy kapunk, hogy ε helyére 1-et írunk, akkor ez a tovaterjedésssebesség nem alkalmas a MICHELSON-féle kísérlet negatív eredményének megmagyarázása, mert ahhoz

$$c' = c_0 \left(1 + \frac{u^2}{2c_0^2} \right) \quad (27)$$

sebességre van szükség.

E szerint a (26) alatti törvény egymagában nem elegendő a MICHELSON-féle kísérlet magyarázatára, tehát a COHN-féle egyenletekben még valami van, a mi azután a magyarázatra elegendő, hiszen COHN bebizonyította, hogy egyenletei alapján az interferentia-jelenségek csakis a mozgó rendszer részeinek egymáshoz viszonyított relatív elhelyezésétől függenek és függetlenek a rendszer u sebességétől. Ez azt jelenti, hogy a COHN-féle egyenletek értelmében a fény mozgó rendszerekben nemcsak más sebességgel, hanem más *törvények szerint* is terjed tova, mint nyugvó rendszerben, a mi szintén nem fog minden physikus tetzésével találkozni.

Egyszerű elintézését nyer a MICHELSON-féle paradoxon a fény emanatio-elmélete értelmében. Ehhez az egyszer már végleg eltemetettnek vélt elmélethez néha-néha még visszatérnek a physikusok. Valóban, ha a kibocsátott fényatom tehetetlenségénél fogva a c_0 fénysebességen kívül még a fényforrás u sebességét is megtartja, akkor optikai jelenségek körében is egyszerű mechanikai rendszerekkel volna dolgunk, melyeken belül a jelenségek függetlenek az egész rendszer közös translatio-sebességétől. Ezt a felfogást legutóbb W. RITZ¹ érvényesítette az elektrodinamikában. Természetesen nem szólt arról, hogy az interferentia és fénycélhajlás hogyan magyarázható a feltámasztott emanatio-elméletben.

★

¹ Annales de Chimie et de Physique, (8) 13. 145—275 ; Oeuvres 316. l. (Paris, 1911).

Az összes jelenségek elmélete, melyek az $\frac{u}{c}$ viszony első hatványától függenek (fény aberratioja, fényhullámok tovaragadása áramló anyagban), teljesen független a bevezetett új hypothesisistól, úgy hogy a nyugvó æther hypothesisise, melyet LORENTZ kifejtett, minden jelenségre alkalmazható marad; valóban azt mondhatjuk tehát, hogy új hypothesisünk — mint a LORENTZ-contractio vagy a relativitás elvének helyettesítője — alkalmas az eddigi kísérleti jelenségek leírására. E jelenségek épp úgy és talán nagy sebességek esetében még pontosabban leírhatók a következő föltevés alapján: A mozgó fényforrásból kiáramló fénynek c_m tova-terjedéssebessége

$$c_m = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}} \quad (28)$$

a hol u a fényforrás ætherhez viszonyított sebességének a sugár iránya mentén való vetülete.

Világos, hogy e föltevés, minthogy első közelítésben:

$$c_m = c_0 \left(1 + \frac{u^2}{2c_0^2} \right), \quad (29)$$

az összes ismeretes jelenségeknek, beleértve az elektromágneses mozgásmennyiség és tömeg által okozott tüneteményeket, a tapasztalattal megegyező módon való leírására alkalmas.

★

Hogy milyen a valódi helyzete az új hypothesisiek bármelyikének a LORENTZ és az EINSTEIN-féle elméletekkel szemben, az legjobban a következő meggondolások alapján lesz világossá. Képzeljünk nyugvó fényforrást A -ban, melyből a fény egy tőle l távolságban lévő B tükörig ér, visszaverődik és visszafut A -ba és tegyük fel, hogy megmértük az l távolságot és azt az időt, mely kétszeri befutásához szükséges; világos, hogy

$$t = \frac{2l}{c}. \quad (30)$$

Képzeljük most azt, hogy az egész rendszer fényforrással, B tükrökkel, megfigyelővel együtt az l irányában mozog u sebességgel. Akkor — ha fölteszük, hogy c változatlan maradt — a (30) egyenlet már nem lesz érvényes. Kísérletek azonban azt mutatják, hogy az egyenlet mégis helyes. Ez volt a MICHELSON-féle paradoxon. Az ellenmondás megszüntetésére LORENTZ föl-tette, hogy a rendszernek a nyugvó ætheren át való mozgása következtében megváltozik a tárgyak hosszúsága l oly módon, hogy az egyenlet érvényben marad. E föltevés az anyagokat oly kettős töréssel ruházná fel, melyet a kísérletek nem igazolnak, de megezáfolnak az anyag elektromos vezetőképességére vonatkozó kísérleti vizsgálatok is. EINSTEIN a paradoxon eltüntetésé végett azt állítja, hogy a t idő más a mozgó rendszerben, mint nyugvó rendszer esetében. Közvetlenül kínálkozik, mint harmadik lehetőség, annak föltevése, hogy a mozgás következtében a c terjedéssébség változik meg. E föltevés következményeit akartam jelen dolgozatomban kifejteni. E meggondolások egyúttal mutatják, hogy más út már nem áll rendelkezésünkre a MICHELSON-féle paradoxon eltüntetésére, mint az a három, a melyet most felsoroltam, ha csak nem akarunk a három hypothesis közül kettőt vagy mind a hármat egyszerre alkalmazni, a mi áttekinthetetlen bonyodalmat idézne elő az amúgy sem egyszerű feladat-csoport tárgyalásában.

Teljes tudatában vagyok az elmondottaknak hypothetikus jellegével és el vagyok reá készülve, hogy a bevezetett hypothesis kísérletek alapján megdönthető. De éppen, mert e hypothesis kísérletekkel hozzáférhető, tartottam szükségesnek elmondását. Ha a hypothesis alkalmat fog szolgáltatni oly kísérletekre, a melyek a fizikának ez életbevágó problémájára bármely tekintetben világosságot derítenek, akkor elértem célomat.

A DIMETHYL- α -RESORCYLSAVCHLORID KONDENZÁCZIÓJA PHENOL-ÆTHEREKKEL.¹

MAUTHNER NÁNDOR-tól.

Az isomer dimethyl-resorcylsavak chloridjai közül eddig csak a dimethyl- β -resorcylsavat alkalmazták synthesisekhez, míg a dimethyl- α -resorcylsav chloridjáról csupán KOSTANECKY és LAMPE-től² találunk egy adatot az irodalomban. Különösen mióta HESSE³ a zúzmófélékben előforduló divarint mint az orcintypushoz tartozó vegyületet ismerte fel, az α vegyület is behatóbb tanulmányt érdemel. A dimethyl- α -resorcylsav chloridját a fentebbi kutatók legelőször szénkénegeben oldott dimethyl- α -resorcylsavból és phosphorpentachloridból állították elő és kísérleteikhez az így nyert nyersterméket alkalmazták. Mivelhogy az előzőleg eszközölt phenolcarbonsavak kondenzációjakor⁴ fontos, hogy a savchloridokat tiszta állapotban alkalmazzuk, megkíséréltem ezen savchloridot tiszta állapotban elkülöníteni. Ezt akképen sikerült elérnem, hogy a fentebbi úton előállított nyersterméket a vacuumban frakcionálva destilláltam és így a kristályos savchloridot nyertem. Ezen savchloridból a FRIEDEL és CRAFTS-féle reakció útján a phenolætherekből az alább ismertett benzophenonszármazékokat állítottam elő.

¹ A budapesti kir. m. tud. egyetem II. chemiai intézetében készült dolgozat.

² Ber. 41, 1329 (1908).

³ Journ. p. chem. [2] 83, 42 (1911).

⁴ Mathem. és Természettudományi Értesítő 29. köt. (1911), ugyanott 30. köt. (1912), ugyanott 31. köt. (1913). Journ. p. chem. (2) 84, 140 (1911), ugyanott (2) 85, 308 (1912), ugyanott (2) 87, 409 (1913).

Kísérleti rész.

3, 5-dimethoxybenzoylchlorid.

A fentebbi vegyület előállításához szükséges dimethyl- α -resorecylsavat legelőször TIEMANN és STRENG¹ állította elő α -resorecylsavból jodmethyl segítségével. Később BÜLOW és RIESS² ezen reakciót dimethylsulfáttal eszközölte. Nagyobb mennyiségű æthersav előállítására a következő eljárást dolgoztam ki:

Egy jenai literes lombikban 60 gr nátriumhydroxydból és 300 cm³ vízből készített lúgban hidegen feloldunk 50 gr α -resorecylsavat és szobahőmérsékleten 67 gr dimethylsulfatot adunk hozzá. Parafadugóval jól elzárjuk a lombikot és hideg vízzel való hűtés közben 15 perczig rázzuk, miközben a lombikot az esetleg képződő nyomás kiegyenlítésére időnként kinyitjuk. Ezután újból 67 gr dimethylsulfatot öntünk a lombikba és ismét 7 perczig rázzuk. A lombikot most visszafolyó hűtőcsővel látjuk el és két óra hosszat hevítjük. A kis mennyiségben előálló ester elszap-panosítására a folyadékhoz 15 gr natriumhydroxydnek kevés vízben való oldatát adjuk és két óra hosszat forraljuk. A lehült oldatot ezután hig sósavval megsavanyítjuk, a kiváló dimethoxybenzoésavat leszűrjük és vízzel jól kimossuk. A savæthert két napig agyagtányéron szárítjuk ki és végül 750 cm³ forró alkoholból kristályosítjuk át. Az oldat kihülésekor a dimethyl- α -resorecylsav tűk alakjában válik ki, a melyek 180 C°-on olvadnak. Hozadék 40 gr. Az anyalúg töményítése által még 14 gr savat nyerhetünk. Az alkoholban oldhatatlan rész súlya 1·4 gr volt, a melynek további vizsgálatával nem foglalkoztam.

KOSTANECKI és LAMPE a dimethyl- α -resorecylsavra szénkénes oldatban phosphorpentachloridot hagytak hatni és így nyerték a dimethoxybenzoylchloridot. Ezen eljárást még egyszerűsíteni³ lehet azzal, hogy oldószer alkalmazása nélkül a következőképpen eszközöljük a reakciót: 3·9 gr jól kiszáritott

¹ Ber. 14, 2004 (1881); H. MEYER, Wien. Mon. 3, 429 (1889).

² Ber. 35, 3901 (1902).

³ F. MAUTHNER, Ber. 43, 192 (1909).

dimethoxybenzoésavat frakcionáló lombikban 46 gr phosphor-pentachloriddal összekeverünk és félóra hosszat a vízfürdőn hevítjük. Ezután a savchloridot a vacuumban frakcionálva destillátjuk, miközben a középső frakció 157—158 C°-on 16 mm nyomás alatt destillál át. Hozadék 33 gr. A további tisztítás céljából ligroinból gyorsan átkristályosítjuk és így szintelen, 35—36 C°-on olvadó tükben nyerjük. Ez a meghatározás csak megközelítő pontosságú, mert a chlorid a levegőn megváltozik. A közelebbi jellemzés céljából a vegyületből még az amidot és anilidet is előállítottam.

2·5 gr porított savchloridot fölös tömény ammoniakkal öntünk le és egy félóráig állni hagyjuk, miközben a reakciókeveréket többször jól összekeverjük. A csapadékot ezután leszűrjük, vízzel jól kimossuk és sok benzolból kristályosítjuk át. Hozadék 22 gr. Selyemfényű tükben kristályosodik, a melyek 148—149 C°-on olvadnak.

A 3, 5-dimethoxybenzamid könnyen oldódik alkoholban, ætherben és chloroformban. Benzolban és ligroinban hidegen nehezen oldódik, könnyen ellenben melegen. Petroleumætherben a vegyület majdnem oldhatatlan.

0·1203 gr anyag adott: 0·2631 gr CO_2 -t, 0·649 gr H_2O -t.

0·1412 gr anyag adott: 9·3 cm³ nitrogént (16°, 764 mm).

$C_9H_{11}O_3N$ képlet alapján a számított értékek: $C=59·66\%$, $H=6·07\%$, $N=7·73\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C=59·64\%$, $H=5·94\%$, $N=7·68\%$.

2·7 gr savchloridot 30 cm³ ætherben oldunk és 1·4 gr anilint, kevés ætherben oldva, hozzásepegtetünk. Az æthert ezután elpárooljuk és a visszamaradó anilidet vízzel jól kimossuk. Benzolban kristályosítva, szintelen selyemfényű tüket alkot, a melyek 124—125 C°-on olvadnak.

0·1448 gr anyag adott: 0·3709 gr CO_2 -t, 0·0771 gr H_2O -t.

0·1569 gr anyag adott: 7 cm³ nitrogént (20°, 757 mm).

$C_{15}H_{15}O_3N$ képlet alapján a számított értékek: $C=70·03\%$, $H=5·83\%$, $N=5·44\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C=69·82\%$, $H=5·91\%$, $N=5·05\%$.

E vegyület könnyen oldódik alkoholban, ætherben és chloroformban. Ligroinban és jégezetben csak melegen oldódik. Petroleumætherben a vegyület majdnem oldhatatlan.

3, 5, 4'-Trimethoxybenzophenon.

10 gr 3, 5-dimethoxybenzoylchloridot és 5·4 gr anisolt 40 gr szénkénegben oldunk és visszafolyó hűtőcsöves lombikban a vízfürdön melegítjük. 7 gr aluminiumchloridot kis adagokban időnként a reakciókeverékhez adunk és 2 óra hosszat a vízfürdön hevítjük. Ezután a lombik tartalmát jégre öntjük, sósavval megsavanyítjuk, a szénkéneg és változatlan anisol eltávolítására vízgőzzel destilláljuk. A lombikban visszamaradt anyagot ætherrel kioldjuk és az ætheres oldatot többször hig nátronlúggal kirázzuk. Az oldószer lepárlása után a keton visszamarad, a melyet további tisztítás céljából benzolból kristályosítunk át és csontszénnel szintelenítünk. Hozadék 7·4 gr.

0·1270 gr anyag adott: 0·3283 gr CO_2 -t, 0·0685 gr H_2O -t.

$C_{16}H_{16}O_4$ képlet alapján a számított értékek: $C = 70·58\%$, $H = 5·88\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 70·49\%$, $H = 5·98\%$.

A 3, 5, 4'-trimethoxybenzophenon szintelen tűkben kristályosodik, a melyek 97—98 C°-on olvadnak. E vegyület könnyen oldódik benzolban, alkoholban, ætherben és chloroformban. Jégezetben a vegyület igen nehezen oldódik. Petroleumætherben és ligroinban majdnem oldhatatlan. Tömény kénsav sárga színnel oldja.

3, 5, 3', 4'-tetramethoxybenzophenon.

E vegyület előállításához 10 gr savchloridot, 40 gr szénkéneget, 6·9 gr veratrolt és 7 gr aluminiumchloridot alkalmazunk az előbb már ismertetett kísérleti körülmények között. Hozadék 10·3 gr. Benzolból szintelen tűkben kristályosodik, a melyek 114—115 C°-on olvadnak.

0·1161 gr anyag adott: 0·2871 gr CO_2 -t, 0·0637 gr H_2O -t.

$C_{17}H_{18}O_5$ képlet alapján a számított értékek: $C = 67·54\%$, $H = 5·96\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 67.43\%$, $H = 6.09\%$.

Ezen keton könnyen oldódik alkoholban, ætherben, chloroformban és meleg benzolban. Jégezetben a vegyület igen nehezen oldódik, ligroinban és petroleumætherben pedig majdnem oldhatatlan. Tömény kénsavban sárga színnel oldódik.

3, 5, 2', 4'-tetramethoxybenzophenon.

A reakcióhoz 9 gr savchloridot, 36 gr szénkéneget, 6.1 gr resorcindimethylæthert és 6.5 gr aluminiumchloridot alkalmazunk. A fentebbi módon nyert keton kezdetben olajszerű és többnapos állás után dermed csak meg a vacuumexsiccatorban. Előbb agyagtányéron szárítjuk ki, ezután pedig benzol és petroleumæther keverékéből kristályosítjuk át, miközben csontszénnel színtelenítünk. Hozadék 7.8 gr. Szintelen, 73—74 C°-on olvadó tűk.

0.1683 gr anyag adott: 0.4170 gr CO_2 -t, 0.0930 gr H_2O -t.

$C_{17}H_{19}O_5$ képlet alapján a számított értékek: $C = 67.54\%$, $H = 5.96\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 67.51\%$, $H = 6.13\%$.

E vegyület könnyen oldódik alkoholban, benzolban, chloroformban és ætherben. Ligroinban csak melegen oldódik és petroleumætherben majdnem oldhatatlan. Tömény kénsav a ketont sárga színnel oldja.

3, 5, 3', 4'-tetramethoxy-2-oxybenzophenon.

A kondenzációhoz 8.4 gr pyrogalloltrimethylæthert, 40 gr szénkéneget, 10 gr savchloridot és 7 gr aluminiumchloridot alkalmazunk. A reakcióterméket ætherrel kioldjuk és az ætheres oldatot többször hig nátronlúggal rázzuk át. Az ætherben visszamarad egy lúgban oldhatatlan vegyület, a melyből a változatlan pyrogalloltrimethylæthert eltávolítjuk. Az így nyert terméknek nem volt állandó olvadáspontja és ezért további vizsgálatával nem foglalkoztunk. A lúgos oldatot hig sósavval megsavanyítjuk, miközben a változatlan 3, 5-dimethoxybenzoesavnak és az oxyketonnak keveréke válik ki. E kettő elkülönítésére a terméket

híg natriumcarbonatoldattal többször kifőzzük. Az oldhatatlan részt ezután híg nátronlúgban oldjuk, szűrjük és a szűrletet sósavval megsavanyítjuk. A kiváló oxyketont ætherrel kioldjuk, az oldószert lepárolgatjuk és a visszamaradó terméket alkoholtól kristályosítjuk át. Hozadék 6·4 gr.

0·1113 gr anyag adott: 0·2612 gr CO_2 -t, 0·0601 gr H_2O -t.

$C_{17}H_{18}O_6$ képlet alapján a számított értékek: $C = 64·15\%$, $H = 5·66\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 63·39\%$, $H = 5·99\%$.

Az oxyketon világossárga színű kristályokat alkot, a melyek 123—124 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkoholban, benzolban, ætherben és chloroformban. Ligroinban és jégezetben a vegyület oldhatatlan. Petroleumætherben a termék majdnem oldhatatlan. Tömény kénsav sárga színnel oldja.

3, 5, 2', 4', 6'-pentamethoxybenzophenon.

A fentebbi vegyület előállításához szükséges trimethylphloroglucint a következő módon nyerjük:

15 gr phloroglucint¹ 50 cm³ absolut methylalkoholban oldunk és hűtés közben sósavgázzal telítjük. Másnap a fölös alkoholt vacuumban lepároljuk és a maradékot, a mely legnagyobb részt phloroglucindimethylætherből áll, 96 cm³ 10%-os nátronlúgban oldjuk. A lúgos oldatot erős hűtés közben 25 gr dimethylsulfattal² rázzuk össze, a melyet egy félóra alatt három adagban öntünk a reakciókeverékhez. Ezután visszafolyó hűtőcsöves lombikban egy óra hosszat hevítjük és végül 4 gr nátriumhydroxydot adunk a reakciókeverékhez, miközben újra főzzük egy óra hosszat. A reakcióelegyet ætherrel kioldjuk és az oldatot híg nátronlúggal rázzuk át. Az oldószert lepárlása után visszamaradó trimethylphloroglucint vízgőzzel destilláljuk és a további tisztítás céljából ætherben feloldjuk, szárítjuk és végül destilláljuk.

¹ K. ALBRECHT u. W. WILL. Ber. 17, 2098 (1884); W. WILL. Ber. 21, 602 (1888).

² TUTIN u. F. W. Caton Journ. chem. Soc. 97. 2064 (1910).

A kondenzációhoz 5 gr savchloridot, 4·2 gr trimethylphloroglucint, 20 gr szénkéneget és 4 gr sublimált vasechloridot alkalmazunk. Hozadék 2·1 gr.

0·1186 gr anyag adott: 0·2824 gr CO_2 -t, 0·0646 gr H_2O -t.

$C_{18}H_{20}O_6$ képlet alapján a számított értékek: $C = 65·06\%$, $H = 6·02\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 64·93\%$, $H = 6·05\%$.

Ezen keton kis tűk alakjában kristályosodik, a melyek 132—133 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik benzolban, ætherben és chloroformban. Alkoholban a vegyület melegen könnyen oldódik, ellenben nehezen ligroinban. Petroleum-ætherben a keton oldhatatlan.

E vizsgálat kísérleti részét SIMONEK ISTVÁN úr végezte.

A vizsgálatot különben folytatom.

TABLES ANNUELLES DE CONSTANTES ET DONNÉES NUMÉRIQUES DE CHIMIE, DE PHYSIQUE ET DE TECHNOLOGIE.

Ennek a nagyszabású vállalkozásnak célja a chemia, physika és technologia körébe tartozó állandókat, melyek a világ bármely nyelvű kiadványában napvilágot láttak, évkönyveiben összegyűjtve az érdeklődőknek rendelkezésére bocsátani.

Az *állandók táblázatának* kiadását az 1909. évben Londonban megtartott VII. nemzetközi alkalmazott chemiai congressus határozta el és mindjárt ki is küldötte azt a nemzetközi bizottságot, a mely az évkönyvek kiadását vezeti. Jelenleg a vállalkozás az Akadémiák Nemzetközi Szövetségének védnöksége alatt áll.

Eddig már két évkönyv látott napvilágot, melyek az 1910., illetőleg 1911. évben megjelent állandókat foglalják magukban; a harmadik évkönyv, mely az 1912. évi állandókat fogja tartalmazni, már legközelebb elhagyja a sajtót. C. MARIE, a nemzetközi bizottság főtitkára, most előfizetési felhívást bocsát közre az említett harmadik kötetre vonatkozólag.

Előfizetőknek a füzött kötet ára 30 frank, míg a kötött példányé 34 frank. A kötet megjelenése után az árakat felfele emelik.

Az I. és II. kötetből is kapható még néhány példány: jelenleg az I. kötet (1910) ára füzve 27, kötve 30 frank, a II. köteté (1911) pedig füzve 32 frank és kötve 36 frank. 1914. július elsejétől kezdve az I. kötet ára emelkedik és ugyanannyiba fog kerülni, mint most a II. kötet.

Előfizetéseket elfogadnak: БУХБӨКЪ ГУСЗТАВ (IX. Üllői út 55. sz.) és ZEMPLÉN GYÖZÖ (I. Fehérvári út 54/a sz.) akadémiai levelező tagok, kik a nemzetközi bizottságnak is tagjai.

A MARADÓ, VAGYIS AZ IDEIGTARTÓ ÉS A MARADANDÓ ALAKVÁLTOZÁSOK MECHANIKÁJÁNAK ALAPTÉTELEI ÉS ALKALMAZÁSUK.

REJTŐ SÁNDOR 1. tagtól.

Tekintetes Akadémia!

A midőn ezt a kitüntető helyet — a Magyar Tudományos Akadémia előadói székét — elfoglalom, ismételten hálás köszönetemet fejezem ki megválasztatásomért, a mellyel a tek. Akadémia kettős kitüntetést osztott: egyrészt csekély személyemet bizalmával tüntette ki, másrészt elismerte ezzel, hogy az általam művelt tudományág méltó arra, hogy itt képviselőt nyerve. Három évtizede, hogy ezzel az új tudományággal, a maradó alakváltozások mechanikájával foglalkozom. Erre a technológiában érzett közszükséglet buzditott, a melynek felismerését szeretett tanáromnak és elődömnek, néhai PILCH ÁGOST műegyetemi tanár úrnak köszönöm, miért is hálával és kegyelettel adózom emlékének.

A maradó alakváltozások mechanikájának alapja az anyagok belső szerkezete. Ezzel a tudományággal már több oly feladatot oldottam meg, a melyet a régibb tudományágak segélyével megoldani nem lehetett. Legújában, mintegy 5—6 évig tartó sorozatos kísérletek alapján, két oly kérdés tisztázása sikerült, a mely a gyakorlati életre közvetlen kihatással van s általános érdeklődésre is számíthat. Ezt a két kérdést választottam jelen értekezésem tárgyául.

Az első a hegedés jelenségeit karolja fel, a második pedig az ismétlődő igénybevételek hatására vonatkozik, a mely azért fon-

tos, mert eddigi ismereteink alapján még nem tudtunk adni felvilágosítást arra nézve, hogy ismétlődő igénybevételek alatt miért törnek el szerkezeteink még akkor is, ha a beálló feszültség jóval a rugalmassági határon alul marad.

Mind a két feladat megoldását az anyagok belső szerkezetéből, vagyis molekuláris életmódjukból vezethetjük le. Hogy ez utóbbival megismerkedjünk, előbb a molekulákra ható belső erőkkel, valamint a molekulák alakjával, csoportosulásuk módjával és a külső erő hatásával kell tisztába jönnünk.

I. A maradó alakváltozások mechanikájának alaptételei.

a) Belső erők.

A fizika mai álláspontja szerint az anyag egyik jellemző tulajdonsága a *tömegvonzás* (attractio), melynek nagysága a sűrűséggel nő; másik fontos tulajdonsága a molekulák *mozgási (kinetikai) energiája*, melynek következtében rugalmas ütközés és ebből kifolyólag az ütköző részek között *feszültség* áll elő.

E két belső erő változásának törvényét — de csak qualitative — a VAN DER WAALS-féle képlet adja meg. Ha a felületegységre vonatkoztatott belső feszültséget p_r -el, a tömegvonzás nagyságát p_m -el, az abszolút hőmérsékletet T -vel, a térfogatot v -vel, az anyag állandóit a -val és b -vel jelöljük, akkor a VAN DER WAALS-féle képlet a következő:

$$p_r = \frac{RT}{v-b}$$

és

$$p_m = \frac{a}{v^2}.$$

A belső erők egymáshoz való viszonya szabja meg az anyag tulajdonságát. Mindaddig, míg a feszültség nagyobb a tömegvonzásnál ($p_r > p_m$), az egyensúly fenntartásához összenyomó erő kell (p_1), melynek nagysága:

illetőleg

$$p_1 = p_r - p_m, \quad (2)$$

$$p_1 = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}.$$

Ha azonban az állapotjelző egyenlet értelmében a tömegvon-
zásra (p_m) nagyobb érték adódnék, mint a feszültségre (p_r), a
molekulák önmaguktól jutnak egyensúlyba. Ezt az esetet az
1. ábra érzékíti meg, melyen a két belső erő változása látható
isothermikus állapotváltozás esetén.

Az anyag kezdeti térfogata od ; mivel
azonban ennek a térfogatnak meg-
felelő tömegvonzás ($p_m=dc$) na-
gyobb a feszültségnél ($p_r=db$), az
anyag sűrűbben kénytelen elhelyez-
kedni, térfogata tehát oe -re csökken,
a mikor is ($p'_m=p'_r$) a belső erők
egyensúlyba jutnak.

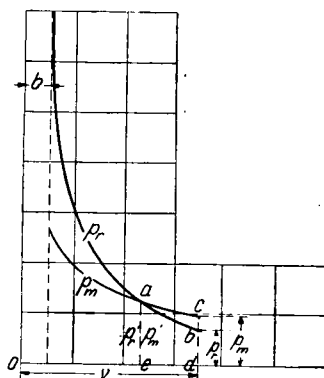
Ebben a helyzetben a molekulák
oly külső erőt ellensúlyozhatnak, a
mely ritkítást okoz, tehát húzó erőt
(π), a mely azonban csak akkora
lehet, hogy az anyag térfogatát od -n
túl ne növelje, mert különben,
 $\pi + p_r > p_m$ esetében, a molekulák
összefüggése megszűnik. Az anyagnak ezt a tulajdonságát, hogy
a molekulák húzó erő hatása alatt is összefüggésben maradnak,
*kohézió*nak nevezzük, melynek legnagyobb értéke az előbbiek
szerint:

$$\pi = p_m - p_r. \quad (3)$$

A maradó alakváltozások mechanikája csak olyan anyagokkal
foglalkozik, a melyeknek kohéziójuk van.

b) A kinetikai energia fajai.

A kinetikai energia fajai tekintetében két nézet van elterjedve.
Az egyik szerint a molekuláknak csak haladó mozgásuk van s
ezt az álláspontot fogadja el VAN DER WAALS, a másik nézet sze-



1. ábra. A belső erők változása
isothermikus állapotváltozás
esetében.

rint a molekuláknak nemcsak haladó, hanem forgó mozgásuk is van s ezt vallja MAXWELL. A maradó alakváltozások mechanikája MAXWELL álláspontját fogadja el, mert csak ezzel tudja a szilárd testek sajátosságainak változását megmagyarázni. Ez a két felfogás egymással nem ellenkezik, mert a VAN DER WAALS által elfogadott haladó (rezgő) mozgás csak különleges esete az általános felfogásnak. A leglényegesebb különbség VAN DER WAALS és MAXWELL nézete között a hőfok függvényének kifejezésében áll. VAN DER WAALS szerint a hőfok a haladó mozgás eleven erejével (E_r) arányos:

$$T = \eta E_r,$$

holott MAXWELL szerint a forgó (E_ω) és a haladó mozgás (E_r) eleven erejének összegével:

$$T = \eta [E_\omega + E_r];$$

ennélfogva

$$T = \eta E_r \left[1 + \frac{E_\omega}{E_r} \right]$$

és ha

$$1 + \frac{E_\omega}{E_r} = C \quad (4)$$

értéket helyettesítjük, kapjuk, hogy

$$\eta E_r = \frac{T}{C}. \quad (5)$$

Ha tehát a VAN DER WAALS-féle állapotjelző egyenletben T helyébe $T \cdot \frac{1}{C}$ értéket tesszük, olyan állapotjelző képletet kapunk, mely MAXWELL feltételének megfelel.

Gázokra vonatkozó képletünk tehát a következő:

$$p_1 = \frac{RT}{v_1 - b} - \frac{a}{v_1^2}. \quad (2a)$$

Minthogy ritkított gázok esetében a különböző irányban forgó részek ütközése folytán a forgó mozgás eleven ereje csak igen csekély lehet, vagyis C végtelen közel áll az egységhez, az állapotjelző egyenlet teljesen visszanyeri eredeti alakját, miért

is az ebben előforduló a és b -vel jelölt állandók ugyanazok, mint a VAN DER WAALS-féle állapotegyenletben.

Ezeknek az állandóknak értékét következőképpen határoztuk meg:

A (2) egyenlet harmadfokú, melynek (p_k nyomásnál és T_k hőfoknál) a kritikus állapotban mindhárom (v) gyöke egyenlő értékű,¹ amiből következik, hogy

$$v_k = 3b, \quad (6)$$

$$p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad (7)$$

$$T_k = \frac{8a}{27Rb} \quad (8)$$

és hogy

$$\frac{RT_k}{p_k v_k} = 2,67 \quad (9)$$

Ennélfogva az a és b állandókat az olyan értékekből kell kiszámítani, a melyek az $\frac{RT_k}{p_k v_k}$ kifejezésre 2,67-et adnak.

A kísérleti értékek azonban sokszor ettől eltérő eredményt mutatnak. Ennek az eltérésnek kétféle oka lehet; ha a nyert számérték kisebb 2,67-nél, az ok csakis a kritikus állapotjelzők hibás megfigyelése, míg ha nagyobb, az eltérést a molekulák forgó mozgása is okozza. Legcélszerűbb tehát a számítás menete, ha a kísérleti kritikus hőfok (T_k) és nyomás (p_k) alapján a (9) képlet segítségével:

$$v_k = \frac{R \cdot T_k}{p_k \cdot 2,67}$$

kiszámítjuk azt a v_k -t, mely adott T_k és p_k esetében akkor érvényesülne, ha a molekuláknak csak haladó mozgásuk volna. Ebből a v_k értékből számítjuk ki a (6) képlet segítségével a b értéket és a (7) vagy a (8)-czal az a értéket.

¹ Dr. HERZ: Über die Molekulargrösse der Körper im festen und flüssigen Aggregatzustande.

Minthogy a b tényező a molekula anyaga által elfoglalt teret jelenti, ennek számértéke abban az esetben, ha a molekuláknak forgó mozgásuk is van, a centrifugális erő következtében a (T) hőfok változásával különböző nagyságú. Ennek jelzésére a $(2a)$ egyenletbe b helyett b_1 , s mert a hőfokkal C is változik, helyébe C_1 teendő. Képletünk tehát:

$$p_1 = \frac{RT_1}{v_1 - b_1} \frac{1}{C_1} - \frac{a}{v_1^2} \quad (2b)$$

Minthogy b_1 és C_1 a hőfok függvénye, így egymásnak is függvényei.

Ez utóbbi felől annyit tudunk, hogy csak az olyan b_1 felelhet meg, a mely nem eredményez C_1 -re az egységnél kisebb értéket; C_1 physikai értelménél fogva az egységnél kisebb ugyanis nem lehet. Hogy ennek a két tényezőnek változását megismerjem, AMAGAT-nak az Annales de Chimie et de Physique 1881. évf.-ában megjelent «Compressibilité des gaz» című értekezésében közlött adatokat használtam föl.

A számítások egyszerűsítése kedvéért a grammolekula térfogatával dolgoztunk, de, mert AMAGAT adatai más kezdeti értékekre vonatkoznak, azért az általa adott térfogatokat átszámítottuk.¹

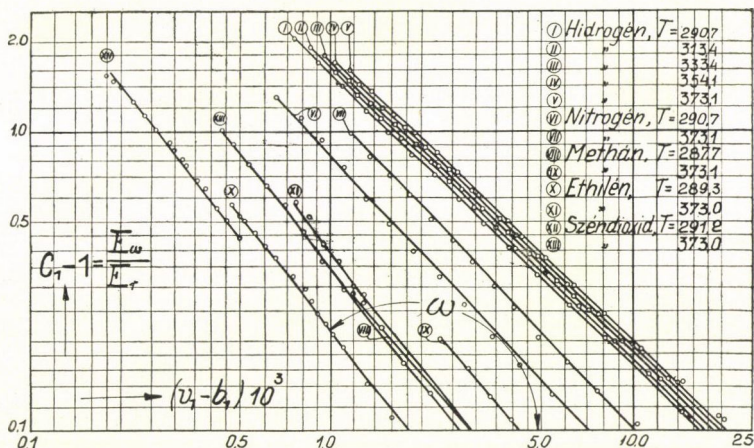
Ezután kerestük, hogy $b_1 = b \cdot f\left(\frac{T_1}{T_k}\right)$ képletben miféle f függvény tesz a fenti feltételeknek eleget s úgy találtam, hogy a keresett függvény:

$$b_1 = b \sqrt{\frac{T_1}{T_k}} \quad (10)$$

¹ A kezdeti térfogatot (v'_0) a legalacsonyabb nyomásra vonatkozó értékekből a BOYLE-MARIOTTE-GAY-LUSSAC törvénye segítségével számítottuk ki. Ezzel a térfogattal osztottuk a magasabb nyomásokra vonatkozó térfogatokat, hogy a grammolekula térfogatát kapjuk. Vagyis:

$$v'_0 = \frac{v'_1 p_1}{T_1} \cdot \frac{T_0}{p_0} \quad \text{és} \quad v_1 = \frac{v'_2 p_2}{p_2} \cdot \frac{1}{v'_0} \text{ stb.}$$

Most már ezzel a függvénnyel számítottam ki valamely izothermikus állapotváltozásra a kísérleti adatokból a C_1 értékeket; az ezekből alkotott C_1-1 számértékeket felmértem a logaritmikus koordináta-rendszer ordináta-tengelyére, a hozzájuk tartozó v_1-b_1 értékeket pedig az abszcissa-tengelyre (2. ábra).



2. ábra. A forgó- és haladó-mozgás energiáinak viszonya a sűrűség függvényében.

Ebből az ábrából kitűnik, hogy a felmért értékek által megadott pontok egyenes vonal törvényét követik, és annak képlete:

$$\lg(C_1-1) = \lg(C_0-1) + \lg \omega \cdot \lg \left(\frac{v_1-b_1}{b_1} \right),$$

illetőleg:

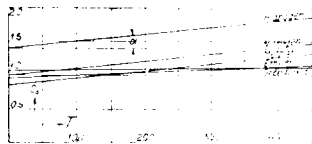
$$(C_1-1) = (C_0-1) \left(\frac{v_1-b_1}{b_1} \right)^{\lg \omega},$$

hol C_0 a $v_1=2b_1$ térfogatnak megfelelő számérték.

Ezzel az eljárással a figyelembe vett anyagra vonatkozólag a C_1-1 értékeket többféle hőfokra számítottuk ki s ezeket az előbb jelzett koordináta-rendszerbe illesztettük be. A 2. ábrából kitűnt, hogy a C_1-1 változásának törvénye valamennyi hőfokon ugyanaz és hogy csak a C_0-1 metszékük különböző.

A temperatura befolyása tehát csak a metszékben nyilvánul

meg, s hogy ennek törvényszerűségét is felismerhessük, C_0 értékeket a hozzájuk való T értékekkel derékszögű koordináta-rend-



3. ábra. Segédábra a forgó- s haladómozgás energiáinak meghatározására.

szerbe illesztettük (3. ábra). A mint a 3. ábrából kitűnik, ez a függvény a következő képlettel fejezhető ki:

$$C_0 = d + T_1 \cdot tga,^1$$

a melyben

$$tga = \frac{C_{02} - C_{01}}{T_2 - T_1},$$

holott d az anyag jellemzője. Ha tehát gázaknál a forgó mozgásokat is figyelembe vesszük, a következő állapotjelző egyenleteket kapjuk:

$$p_1 = \frac{RT_1}{(v_1 - b_1) C_1} - \frac{a}{v_1^2},$$

$$b_1 = b \sqrt{\frac{T_1}{T_k}},$$

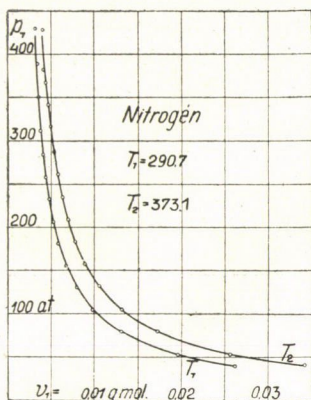
$$(C_1 - 1) = (C_{01} - 1) \left(\frac{v_1 - b_1}{b_1} \right)^{tg\omega}$$

és

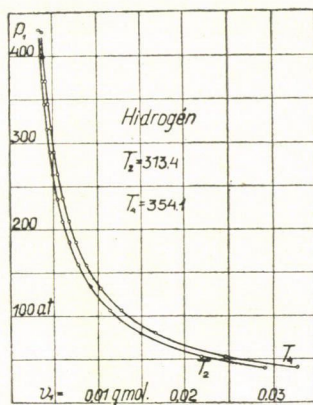
$$C_0 = d + T_1 \cdot tga.$$

Ezekben, ha a kritikus állapot jellemzőit (T_k és p_k) ismerjük, az a és b_1 tényezők is ismeretesek; de, hogy $(C_1 - 1)$ értékeit kiszámíthassuk, előbb C_0 -t és $tg\omega$ -t keli meghatározni, erre a célra pedig egy-ugyanannál a hőfoknál végzett két kísérletnek adataira van szükségünk. Hogy pedig a C_0 változását is kiszámíthassuk, előbb a d és tga értékeket kell meghatározni, erre a célra pedig két különböző hőfoknál végzett kísérlet adataira van szükségünk.

¹ Ez a képlet csak azokon a határokon belül használható, amelyek között C_1 -nek az egységnél kisebb értéke nincs.



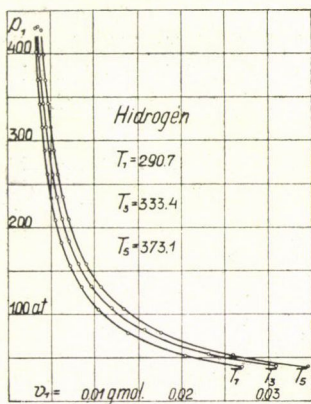
4. ábra.



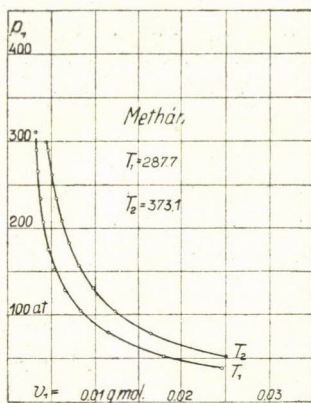
5. ábra.

A nitrogen és hidrogen isothermikus állapotváltozásának kísérleti és számított ($^{\circ}$) értékei.

Ha tehát két különböző hőfokon végzett négy kísérletnek értékeit ismerjük, képleteinkkel az isothermák egész seregét kiszámíthatjuk.



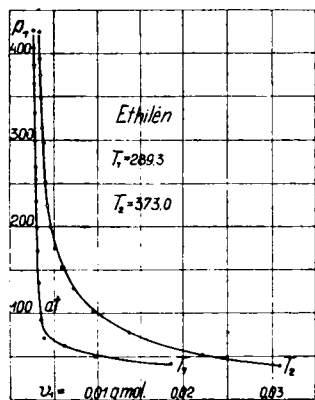
6. ábra. A hidrogen isothermikus állapotváltozásának kísérleti és számított ($^{\circ}$) értékei.



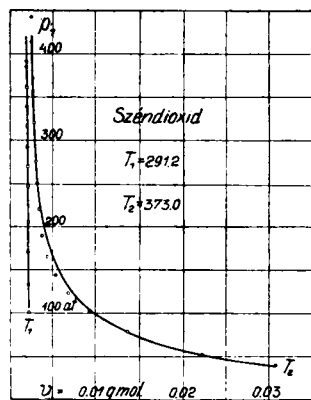
7. ábra. A metán isothermikus állapotváltozásának kísérleti és számított ($^{\circ}$) értékei.

Annak kimutatására, hogy képleteink mennyire egyeznek meg a kísérletekkel, néhány anyagra, nevezetesen hidrogén-, nitrogén-, metán-, ethilén- és szénsavra kiszámítottunk néhány

isothermát. Ezekre az anyagokra vonatkozó kritikus állapotjelzők számértékeit (T_k , p_k), valamint a számításokhoz szükséges egyéb jellemző értékeket az I. táblázatba, számításaink eredményeit pedig a II—XIII. táblázatba foglaltuk és az utóbbiakat a kísérleti isothermákat megérzékítő 4—9. ábrán körökkel jeleztük. Minthogy ezekből az ábrákból kitűnik, hogy képleteink a kísérletekkel megegyező értékeket adnak, ezzel beigazoltnak tekint-



8. ábra. Az ethilén isothermikus állapotváltozásának kísérleti és számított ($^{\circ}$) értékei.



9. ábra. A széndioxid isothermikus állapotváltozásának kísérleti és számított ($^{\circ}$) értékei.

jük, hogy az a feltevés, mely szerint a molekuláknak nemcsak rezgő, de forgó mozgásuk is van, jobban megközelíti a valóságot, mint az, a mely szerint csak rezgő mozgásuk van, miért is a következőkben az előbbit fogadjuk el alapul.

I. táblázat.

A gázak jellemző adatai.

| Anyag | Kémiai jele | T_k | p_k | V_k szám. | a | b | $tg\omega$ | d | $tg\alpha$ |
|------------|-------------|-------|-------|-------------|---------|---------|------------|------|------------|
| Hidrogén | H | 38,5 | 20,0 | 0,00265 | 0,00042 | 0,00088 | —0,96 | 1,40 | 0,000862 |
| Nitrogén | N | 127,0 | 35,0 | 0,00500 | 0,00262 | 0,00166 | —1,05 | 1,00 | 0,001032 |
| Methán | CH_4 | 191,2 | 54,0 | 0,00487 | 0,00384 | 0,00162 | —1,18 | 0,85 | 0,000978 |
| Ethilén | C_2H_4 | 282,0 | 58,0 | 0,00669 | 0,00779 | 0,00223 | —1,26 | 0,95 | 0,000451 |
| Széndioxid | CO_2 | 303,9 | 77,0 | 0,00545 | 0,00686 | 0,00181 | —1,25 | 1,06 | 0,000021 |

II. táblázat.

Hidrogén.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00243; T_1 = 290,7$$

| Kísérleti nyomás p_1 at. | Amagat kísérleti adatai | | | Gramm-molekulában kifejezett térfogat $v_1 = \frac{v_1'}{v_o'}$ | Kísérleti adatok alapján számított értékek | | | Képlet alapján számított értékek | | |
|----------------------------------|----------------------------------|------------|-------------------------------|--|--|--------------|-------|----------------------------------|--------------|-----------|
| | Kísérleti nyomás p_1 at. | $p_1 v_1'$ | $v_1' = \frac{p_1 v_1'}{p_1}$ | | p_m at. | p_r at. | C_1 | C_1 | p_1 at. | %-os hiba |
| | mHg oszlop | | | | | | | | | |
| 39,47 | 30 | 2830 | 94,3333 | 0,02703 | 0,57 | 43,30 | 1,081 | 1,082 | 39,45 | +0,05 |
| 52,63 | 40 | 2850 | 71,2500 | 0,02042 | 1,00 | 59,17 | 1,103 | 1,095 | 52,12 | +0,97 |
| 78,95 | 60 | 2885 | 48,0833 | 0,01378 | 2,22 | 93,81 | 1,155 | 1,149 | 77,49 | +1,85 |
| 105,26 | 80 | 2935 | 36,6875 | 0,01051 | 3,82 | 131,70 | 1,207 | 1,205 | 105,37 | -0,10 |
| 131,58 | 100 | 2985 | 29,8500 | 0,00855 | 5,76 | 173,98 | 1,266 | 1,268 | 131,44 | +0,10 |
| 157,89 | 120 | 3040 | 25,3333 | 0,00726 | 8,09 | 220,45 | 1,328 | 1,336 | 156,91 | +0,62 |
| 184,21 | 140 | 3080 | 22,0000 | 0,00630 | 10,52 | 275,14 | 1,412 | 1,416 | 183,79 | +0,23 |
| 210,53 | 160 | 3135 | 19,5937 | 0,00561 | 13,58 | 334,84 | 1,494 | 1,501 | 209,49 | +0,49 |
| 236,84 | 180 | 3185 | 17,6944 | 0,00507 | 16,84 | 403,33 | 1,589 | 1,601 | 235,08 | +0,74 |
| 263,16 | 200 | 3240 | 16,2000 | 0,00464 | 20,04 | 481,80 | 1,701 | 1,711 | 261,54 | +0,62 |
| 289,47 | 220 | 3290 | 14,9545 | 0,00428 | 22,83 | 575,56 | 1,842 | 1,844 | 289,29 | +0,06 |
| 315,79 | 240 | 3340 | 13,9167 | 0,00399 | 26,31 | 682,56 | 1,995 | 1,994 | 315,99 | -0,06 |
| 342,10 | 260 | 3400 | 13,0769 | 0,00375 | 30,07 | 806,66 | 2,167 | 2,167 | 342,17 | -0,01 |
| 368,42 | 280 | 3450 | 12,3214 | 0,00353 | 35,08 | 968,00 | 2,399 | 2,389 | 370,11 | -0,46 |
| 394,74 | 300 | 3500 | 11,6667 | 0,00334 | 38,27 | 1170,11 | 2,702 | 2,653 | 402,78 | -2,04 |
| 421,05 | 320 | 3550 | 11,0937 | 0,00318 | 42,10 | 1419,73 | 3,065 | 3,009 | 429,72 | -2,07 |

III. táblázat.

Hidrogén.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00252; T_2 = 313,4$$

| | | | | | | | | | | |
|--------|-----|------|----------|---------|-------|---------|-------|-------|--------|-------|
| 39,47 | 30 | 3045 | 101,5000 | 0,02908 | 0,49 | 43,21 | 1,081 | 1,083 | 39,40 | +0,17 |
| 52,63 | 40 | 3065 | 76,6250 | 0,02195 | 0,87 | 59,07 | 1,104 | 1,093 | 53,17 | -1,02 |
| 78,95 | 60 | 3110 | 51,8333 | 0,01485 | 1,91 | 93,09 | 1,151 | 1,143 | 79,53 | -0,73 |
| 105,26 | 80 | 3155 | 39,4375 | 0,01130 | 3,31 | 130,74 | 1,200 | 1,199 | 105,73 | -0,44 |
| 131,58 | 100 | 3200 | 32,0000 | 0,00917 | 5,01 | 175,25 | 1,283 | 1,264 | 133,63 | -1,55 |
| 157,89 | 120 | 3255 | 27,1250 | 0,00772 | 7,13 | 220,75 | 1,337 | 1,329 | 158,97 | -0,68 |
| 184,21 | 140 | 3300 | 23,5714 | 0,00675 | 9,35 | 271,37 | 1,401 | 1,401 | 184,64 | -0,23 |
| 210,53 | 160 | 3360 | 21,0000 | 0,00602 | 11,69 | 327,96 | 1,475 | 1,481 | 209,75 | +0,37 |
| 236,84 | 180 | 3420 | 19,0000 | 0,00544 | 14,51 | 393,11 | 1,564 | 1,572 | 235,55 | +0,54 |
| 263,16 | 200 | 3465 | 17,3000 | 0,00495 | 17,54 | 472,38 | 1,682 | 1,683 | 263,13 | +0,01 |
| 289,47 | 220 | 3520 | 16,0000 | 0,00458 | 20,04 | 557,23 | 1,800 | 1,800 | 289,53 | -0,02 |
| 315,79 | 240 | 3570 | 14,8750 | 0,00426 | 23,38 | 659,71 | 1,945 | 1,942 | 316,32 | -0,17 |
| 342,10 | 260 | 3625 | 13,9423 | 0,00399 | 26,31 | 780,88 | 2,119 | 2,107 | 344,30 | -0,64 |
| 368,42 | 280 | 3675 | 13,1250 | 0,00376 | 30,07 | 925,72 | 2,323 | 2,303 | 371,89 | -0,94 |
| 394,74 | 300 | 3730 | 12,4333 | 0,00356 | 32,38 | 1103,74 | 2,584 | 2,543 | 401,65 | -1,75 |
| 421,05 | 320 | 3780 | 11,8125 | 0,00338 | 38,27 | 1334,76 | 2,900 | 2,852 | 429,74 | -2,06 |

IV. táblázat.

Hidrogén.

$$v_0' = 3490; b_1 = 0,00260; T_3 = 333,4$$

| Kísér- leti nyo- más p_1 at. | Amagat kísérleti adatai | | | Gramm- mole- kulában kifeje- zett térfogat $v_1 = \frac{v_1'}{v_0'}$ | Kísérleti adatok alap- ján számított értékek | | | Képlet alapján számított értékek | | |
|---|---|-------|-------------------------------|--|---|--------------|-------|-------------------------------------|--------------|--------------------|
| | Kísér- leti nyo- más p_1 at. | p_1 | $v_1' = \frac{p_1 v_1'}{p_1}$ | | p_m at. | p_r at. | C_1 | C_1 | p_1 at. | $\%_0$ -os hiba |
| | $m \text{ Hg}$ oszlop | | | | | | | | | |
| 39,47 | 30 | 3235 | 107,8333 | 0,03090 | 0,44 | 43,15 | 1,081 | 1,084 | 39,36 | +0,28 |
| 52,63 | 40 | 3240 | 81,0000 | 0,02321 | 0,78 | 59,29 | 1,110 | 1,092 | 53,51 | -1,67 |
| 78,95 | 60 | 3295 | 54,9166 | 0,01574 | 1,70 | 92,93 | 1,152 | 1,141 | 80,74 | -1,00 |
| 105,26 | 80 | 3340 | 41,7500 | 0,01196 | 2,94 | 130,46 | 1,205 | 1,196 | 107,14 | -1,78 |
| 131,58 | 100 | 3400 | 34,0000 | 0,00974 | 4,43 | 171,03 | 1,257 | 1,254 | 131,95 | -0,28 |
| 157,89 | 120 | 3455 | 28,7917 | 0,00825 | 6,19 | 216,14 | 1,317 | 1,318 | 157,80 | +0,01 |
| 184,21 | 140 | 3500 | 25,0000 | 0,00716 | 8,25 | 267,80 | 1,391 | 1,391 | 184,27 | -0,03 |
| 210,53 | 160 | 3560 | 22,2500 | 0,00638 | 10,26 | 323,06 | 1,463 | 1,468 | 209,80 | +0,34 |
| 236,84 | 180 | 3620 | 20,1111 | 0,00576 | 12,75 | 386,45 | 1,548 | 1,556 | 235,61 | +0,52 |
| 263,16 | 200 | 3685 | 18,4250 | 0,00528 | 15,03 | 455,67 | 1,637 | 1,651 | 260,96 | +0,83 |
| 289,47 | 220 | 3725 | 16,9318 | 0,00485 | 18,30 | 542,75 | 1,763 | 1,771 | 288,16 | +0,45 |
| 315,79 | 240 | 3775 | 15,7292 | 0,00451 | 21,05 | 639,37 | 1,898 | 1,902 | 315,10 | +0,22 |
| 342,10 | 260 | 3830 | 14,7308 | 0,00422 | 23,38 | 753,82 | 2,062 | 2,057 | 343,08 | -0,28 |
| 368,42 | 280 | 3880 | 13,8571 | 0,00397 | 26,31 | 891,38 | 2,258 | 2,241 | 371,45 | -0,82 |
| 394,74 | 300 | 3935 | 13,1167 | 0,00376 | 30,07 | 1052,75 | 2,478 | 2,456 | 398,57 | -0,97 |
| 421,05 | 320 | 3980 | 12,4375 | 0,00356 | 32,38 | 1272,08 | 2,805 | 2,746 | 430,86 | -2,32 |

V. táblázat.

Hidrogén.

$$v_0' = 3490; b_1 = 0,00268; T_4 = 354,1$$

| | | | | | | | | | | |
|--------|-----|------|----------|---------|-------|---------|-------|-------|--------|-------|
| 39,47 | 30 | 3430 | 114,3333 | 0,03276 | 0,39 | 43,11 | 1,081 | 1,065 | 40,08 | -1,55 |
| 52,63 | 40 | 3445 | 86,1250 | 0,02467 | 0,69 | 58,98 | 1,106 | 1,083 | 53,13 | -0,95 |
| 78,95 | 60 | 3500 | 58,3333 | 0,01671 | 1,51 | 92,44 | 1,148 | 1,138 | 79,72 | -0,97 |
| 105,26 | 80 | 3550 | 44,3750 | 0,01271 | 2,61 | 129,31 | 1,198 | 1,191 | 105,96 | -0,67 |
| 131,58 | 100 | 3620 | 36,2000 | 0,01037 | 3,93 | 168,66 | 1,244 | 1,246 | 131,43 | +0,11 |
| 157,89 | 120 | 3665 | 30,5410 | 0,00875 | 5,53 | 213,67 | 1,307 | 1,310 | 157,57 | +0,20 |
| 184,21 | 140 | 3710 | 26,5000 | 0,00759 | 7,38 | 264,15 | 1,378 | 1,380 | 184,03 | +0,09 |
| 210,53 | 160 | 3775 | 23,5937 | 0,00676 | 9,35 | 317,89 | 1,445 | 1,454 | 209,28 | +0,59 |
| 236,84 | 180 | 3830 | 21,2777 | 0,00609 | 11,37 | 380,35 | 1,532 | 1,539 | 235,77 | +0,45 |
| 263,16 | 200 | 3870 | 19,3500 | 0,00554 | 13,58 | 453,49 | 1,638 | 1,639 | 263,10 | +0,02 |
| 289,47 | 220 | 3930 | 17,8636 | 0,00512 | 16,19 | 531,55 | 1,739 | 1,744 | 288,59 | +0,30 |
| 315,79 | 240 | 3980 | 16,5833 | 0,00475 | 19,13 | 626,57 | 1,870 | 1,871 | 315,75 | +0,01 |
| 342,10 | 260 | 4040 | 15,5384 | 0,00445 | 21,05 | 732,76 | 2,017 | 2,013 | 342,96 | -0,25 |
| 368,42 | 280 | 4090 | 14,6071 | 0,00418 | 24,76 | 864,66 | 2,199 | 2,186 | 370,78 | -0,64 |
| 394,74 | 300 | 4140 | 13,8000 | 0,00395 | 28,06 | 1021,26 | 2,415 | 2,393 | 398,70 | -1,00 |
| 421,05 | 320 | 4200 | 13,1250 | 0,00376 | 30,07 | 1200,92 | 2,662 | 2,627 | 427,07 | -1,43 |

VI. táblázat.

Hidrogén.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00275; T_5 = 373,1$$

| Kísérleti nyomás p_1 at. | Anyagat kísérleti adatai | | | Gramm-molekulában kifejezett térfogat $v_1 = \frac{v_1'}{v_o'}$ | Kísérleti adatok alapján számított értékek | | | Képlet alapján számított értékek | | |
|----------------------------------|---|------------|-------------------------------|--|--|--------------|-------|----------------------------------|--------------|-----------|
| | Kísérleti nyomás p_1 $m \text{ Hg}$ oszlop | $p_1 v_1'$ | $v_1' = \frac{p_1 v_1'}{p_1}$ | | p_m at. | p_r at. | C_1 | C_1 | p_1 at. | %-os hiba |
| 39,47 | 30 | 3610 | 120,3333 | 0,03448 | 0,30 | 43,05 | 1,082 | 1,066 | 40,08 | -1,54 |
| 52,63 | 40 | 3625 | 90,6250 | 0,02597 | 0,62 | 58,82 | 1,104 | 1,081 | 53,51 | -1,67 |
| 78,95 | 60 | 3680 | 61,3333 | 0,01755 | 1,36 | 92,29 | 1,149 | 1,137 | 79,81 | -1,09 |
| 105,26 | 80 | 3725 | 46,5625 | 0,01334 | 2,36 | 128,98 | 1,190 | 1,189 | 106,11 | -0,81 |
| 131,58 | 100 | 3780 | 37,8000 | 0,01083 | 3,59 | 169,05 | 1,250 | 1,245 | 132,19 | -0,46 |
| 157,89 | 120 | 3830 | 31,9167 | 0,00915 | 5,07 | 213,43 | 1,309 | 1,306 | 158,35 | -0,29 |
| 184,21 | 140 | 3880 | 27,7143 | 0,00794 | 6,68 | 263,19 | 1,323 | 1,375 | 184,73 | -0,28 |
| 210,53 | 160 | 3945 | 24,6562 | 0,00706 | 8,59 | 316,93 | 1,446 | 1,448 | 210,28 | +0,12 |
| 236,84 | 180 | 4010 | 22,2778 | 0,00638 | 10,34 | 376,30 | 1,522 | 1,527 | 236,09 | +0,31 |
| 263,16 | 200 | 4055 | 20,2750 | 0,00581 | 12,49 | 446,40 | 1,619 | 1,622 | 262,72 | +0,16 |
| 289,47 | 220 | 4110 | 18,6818 | 0,00535 | 14,72 | 525,38 | 1,727 | 1,728 | 289,31 | +0,05 |
| 315,79 | 240 | 4160 | 17,3333 | 0,00497 | 17,04 | 615,31 | 1,848 | 1,847 | 316,10 | -0,09 |
| 342,10 | 260 | 4220 | 16,2308 | 0,00465 | 19,49 | 718,94 | 1,988 | 1,984 | 342,87 | -0,22 |
| 368,42 | 280 | 4275 | 15,2679 | 0,00437 | 22,15 | 843,21 | 2,158 | 2,147 | 370,58 | -0,55 |
| 394,74 | 300 | 4325 | 14,4167 | 0,00413 | 24,76 | 989,85 | 2,359 | 2,337 | 398,79 | -1,02 |
| 421,05 | 320 | 4385 | 13,7031 | 0,00392 | 27,51 | 1167,52 | 2,602 | 2,567 | 427,30 | -1,48 |

VII. táblázat.

Nitrogén.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00251; T_1 = 290,7$$

| | | | | | | | | | | |
|--------|-----|------|---------|---------|--------|---------|-------|-------|--------|-------|
| 39,47 | 30 | 2745 | 91,5000 | 0,02622 | 3,81 | 44,91 | 1,037 | 1,029 | 39,83 | -0,91 |
| 52,63 | 40 | 2740 | 68,5000 | 0,01963 | 6,80 | 62,19 | 1,046 | 1,041 | 52,94 | -0,59 |
| 78,95 | 60 | 2740 | 45,6667 | 0,01309 | 15,32 | 100,64 | 1,067 | 1,068 | 78,91 | -0,01 |
| 105,26 | 80 | 2760 | 34,5000 | 0,00989 | 26,98 | 144,28 | 1,091 | 1,099 | 104,30 | +0,91 |
| 131,58 | 100 | 2790 | 27,9000 | 0,00799 | 40,93 | 194,30 | 1,126 | 1,136 | 130,11 | +1,11 |
| 157,89 | 120 | 2835 | 23,6250 | 0,00677 | 56,95 | 249,95 | 1,163 | 1,178 | 155,23 | +1,68 |
| 184,21 | 140 | 2890 | 20,6429 | 0,00591 | 74,85 | 313,17 | 1,208 | 1,225 | 180,80 | +1,85 |
| 210,53 | 160 | 2950 | 18,4375 | 0,00528 | 93,57 | 384,40 | 1,264 | 1,279 | 206,97 | +1,68 |
| 236,84 | 180 | 3015 | 16,7500 | 0,00480 | 113,91 | 464,97 | 1,325 | 1,341 | 232,82 | +1,69 |
| 263,16 | 200 | 3075 | 15,3750 | 0,00441 | 137,89 | 560,42 | 1,397 | 1,415 | 258,16 | +1,90 |
| 289,47 | 220 | 3140 | 14,2727 | 0,00409 | 163,75 | 673,92 | 1,486 | 1,504 | 284,33 | +1,78 |
| 315,79 | 240 | 3215 | 13,3958 | 0,00384 | 187,13 | 800,60 | 1,951 | 1,604 | 311,99 | +1,20 |
| 342,10 | 260 | 3290 | 12,6538 | 0,00363 | 201,53 | 950,71 | 1,748 | 1,723 | 350,24 | -2,38 |
| 368,42 | 280 | 3370 | 12,0357 | 0,00345 | 218,38 | 1132,76 | 1,930 | 1,869 | 387,74 | -5,25 |
| 394,74 | 300 | 3450 | 11,5000 | 0,00330 | 238,18 | 1347,84 | 2,129 | 2,023 | 428,08 | -8,45 |
| 421,05 | 320 | 3525 | 11,0156 | 0,00316 | 291,11 | 1638,15 | 2,300 | 2,280 | 427,37 | -1,50 |

VIII. táblázat.

Nitrogén.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00284; T_2 = 373,1$$

| Kísér- leti nyo- más p_1 at. | Amagat kísérleti adatok | | | Gramm- mole- kulában kifeje- zett térfogat $v_1' = \frac{v_1}{v_o'}$ | Kísérleti adatok alap- ján számított értékek | | | Képlet alapján számított értékek | | |
|---|---|------------|-------------------------------|--|---|--------------|-------|-------------------------------------|--------------|--------------|
| | Kísér- leti nyo- más p_1 mHg oszlop | $p_1 v_1'$ | $v_1' = \frac{p_1 v_1'}{p_1}$ | | p_m at. | p_r at. | C_1 | C_1 | p_1 at. | %-os hiba |
| 39,47 | 30 | 3575 | 119,1667 | 0,03415 | 2,24 | 43,62 | 1,045 | 1,023 | 40,39 | -2,33 |
| 52,63 | 40 | 3580 | 89,5000 | 0,02564 | 3,98 | 59,91 | 1,057 | 1,043 | 53,46 | -1,58 |
| 78,95 | 60 | 3610 | 60,1667 | 0,01724 | 8,82 | 94,86 | 1,080 | 1,070 | 79,83 | -1,11 |
| 105,26 | 80 | 3650 | 45,6250 | 0,01307 | 15,41 | 133,52 | 1,106 | 1,100 | 105,97 | -0,67 |
| 131,58 | 100 | 3695 | 36,9500 | 0,01059 | 23,39 | 176,25 | 1,137 | 1,134 | 132,03 | -0,34 |
| 157,89 | 120 | 3755 | 31,2917 | 0,00897 | 32,75 | 222,83 | 1,168 | 1,171 | 157,54 | +0,22 |
| 184,21 | 140 | 3820 | 27,2857 | 0,00782 | 42,95 | 274,29 | 1,207 | 1,213 | 183,17 | +0,56 |
| 210,53 | 160 | 3880 | 24,2500 | 0,00695 | 54,58 | 332,35 | 1,253 | 1,261 | 208,98 | +0,74 |
| 236,84 | 180 | 3950 | 21,9444 | 0,00629 | 67,17 | 395,94 | 1,302 | 1,314 | 234,15 | +1,13 |
| 263,16 | 200 | 4020 | 20,1000 | 0,00576 | 79,39 | 467,80 | 1,365 | 1,374 | 261,07 | +0,79 |
| 289,47 | 220 | 4090 | 18,5909 | 0,00533 | 93,57 | 548,59 | 1,432 | 1,442 | 286,86 | +0,91 |
| 315,79 | 240 | 4165 | 17,3542 | 0,00497 | 109,16 | 641,31 | 1,509 | 1,521 | 312,47 | +1,05 |
| 342,10 | 260 | 4240 | 16,3077 | 0,00467 | 119,09 | 746,44 | 1,618 | 1,611 | 341,25 | +0,25 |
| 368,42 | 280 | 4320 | 15,4286 | 0,00442 | 137,89 | 864,55 | 1,707 | 1,712 | 367,10 | +0,36 |
| 394,74 | 300 | 4400 | 14,6667 | 0,00420 | 154,11 | 1000,00 | 1,822 | 1,834 | 391,19 | +0,90 |
| 421,05 | 320 | 4475 | 13,9844 | 0,00401 | 163,75 | 1167,52 | 1,996 | 1,977 | 426,80 | -1,36 |

IX. táblázat.

Methán.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00199; T_1 = 287,1$$

| 39,47 | 30 | 2580 | 86,0000 | 0,02464 | 6,32 | 46,52 | 1,015 | 1,009 | 39,78 | -0,78 |
|--------|-----|------|---------|---------|--------|--------|-------|-------|--------|-------|
| 52,63 | 40 | 2515 | 62,8750 | 0,01801 | 11,85 | 65,78 | 1,020 | 1,013 | 53,08 | -2,76 |
| 78,95 | 60 | 2400 | 40,0000 | 0,01146 | 29,31 | 111,27 | 1,027 | 1,024 | 79,35 | -0,52 |
| 105,26 | 80 | 2315 | 28,9375 | 0,00829 | 56,38 | 167,26 | 1,034 | 1,039 | 104,60 | +0,62 |
| 131,58 | 100 | 2275 | 22,7500 | 0,00652 | 91,42 | 232,62 | 1,043 | 1,058 | 128,44 | +2,39 |
| 157,89 | 120 | 2245 | 18,7083 | 0,00536 | 137,14 | 312,70 | 1,059 | 1,082 | 152,86 | +3,19 |
| 184,21 | 140 | 2260 | 16,1429 | 0,00462 | 182,85 | 396,16 | 1,079 | 1,108 | 174,69 | +5,17 |
| 210,53 | 160 | 2300 | 14,3750 | 0,00412 | 225,88 | 494,74 | 1,133 | 1,141 | 207,72 | +1,33 |
| 236,84 | 180 | 2360 | 13,1111 | 0,00376 | 274,28 | 598,75 | 1,171 | 1,177 | 234,43 | +1,01 |
| 263,16 | 200 | 2425 | 12,1250 | 0,00347 | 320,00 | 712,02 | 1,220 | 1,217 | 265,06 | +3,08 |
| 289,47 | 220 | 2510 | 11,4091 | 0,00327 | 359,00 | 823,28 | 1,270 | 1,257 | 270,95 | +6,40 |
| 302,63 | 230 | 2560 | 11,1304 | 0,00319 | 376,00 | 878,16 | 1,282 | 1,280 | 310,06 | -2,46 |

X. táblázat.

Methán.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00226; T_2 = 373,1$$

| Kísér- leti nyo- más p_1 at. | Amagat kísérleti adatai | | | Gramm- moleku- lában kifeje- zett tér- fogat $v_1 = \frac{v_1'}{v_o'}$ | Kísérleti adatok alap- ján számított értékek | | | Képlet alapján számított értékek | | |
|---|---|------------|------------------------------|--|---|--------------|-------|-------------------------------------|--------------|--------------|
| | Kísér- leti nyo- más p_1 at. | $p_1 v_1'$ | $v_1' = \frac{p_1 v_1}{p_1}$ | | p_m at. | p_r at. | C_1 | C_1 | p_1 at. | %-os hiba |
| | $m Hg$ oszlop | | | | | | | | | |
| 52,63 | 40 | 3505 | 87,6250 | 0,02511 | 6,09 | 59,78 | 1,018 | 1,009 | 53,15 | -0,99 |
| 78,95 | 60 | 3460 | 57,6667 | 0,01652 | 14,06 | 95,79 | 1,030 | 1,024 | 79,48 | -0,68 |
| 105,26 | 80 | 3440 | 43,0000 | 0,01232 | 25,43 | 135,78 | 1,038 | 1,037 | 105,50 | -0,22 |
| 131,58 | 100 | 3435 | 34,3500 | 0,00984 | 39,58 | 180,21 | 1,052 | 1,051 | 131,88 | -0,23 |
| 157,89 | 120 | 3440 | 28,6667 | 0,00821 | 57,31 | 229,57 | 1,066 | 1,068 | 157,64 | +0,16 |
| 184,21 | 140 | 3460 | 24,7143 | 0,00708 | 76,80 | 283,40 | 1,085 | 1,088 | 183,67 | +0,29 |
| 210,53 | 160 | 3490 | 21,8125 | 0,00625 | 98,46 | 342,35 | 1,108 | 1,109 | 210,24 | +0,13 |
| 236,84 | 180 | 3525 | 19,5833 | 0,00561 | 123,87 | 407,76 | 1,130 | 1,135 | 235,39 | +0,61 |
| 263,16 | 200 | 3575 | 17,8750 | 0,00512 | 147,69 | 477,62 | 1,162 | 1,163 | 262,99 | +0,06 |
| 289,47 | 220 | 3625 | 16,4773 | 0,00472 | 174,54 | 555,28 | 1,196 | 1,194 | 290,52 | -0,36 |
| 302,63 | 230 | 3650 | 15,8696 | 0,00455 | 192,00 | 596,50 | 1,205 | 1,211 | 300,56 | +0,68 |

XI. táblázat.

Ethilén.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00226; T_1 = 289,3$$

| | | | | | | | | | | |
|--------|-----|------|---------|---------|---------|---------|-------|-------|--------|--------|
| 39,47 | 30 | 1950 | 65,0000 | 0,01862 | 22,53 | 64,77 | 1,044 | 1,006 | 41,85 | - 6,03 |
| 52,63 | 40 | 1350 | 33,7500 | 0,00967 | 83,82 | 143,00 | 1,048 | 1,068 | 50,07 | + 4,87 |
| 78,95 | 60 | 810 | 13,5000 | 0,00387 | 520,00 | 658,19 | 1,098 | 1,115 | 70,30 | +10,95 |
| 105,26 | 80 | 975 | 12,1875 | 0,00349 | 649,66 | 861,54 | 1,141 | 1,161 | 92,40 | +12,25 |
| 131,58 | 100 | 1150 | 11,5000 | 0,00329 | 721,85 | 1028,83 | 1,205 | 1,202 | 134,08 | - 1,90 |
| 157,89 | 120 | 1325 | 11,2727 | 0,00316 | 787,47 | 1177,44 | 1,245 | 1,239 | 172,84 | - 9,47 |
| 184,21 | 140 | 1505 | 10,7500 | 0,00308 | 820,63 | 1292,31 | 1,286 | 1,269 | 197,73 | - 7,35 |
| 210,53 | 160 | 1680 | 10,5000 | 0,00300 | 866,22 | 1432,02 | 1,329 | 1,306 | 230,27 | - 9,37 |
| 236,84 | 180 | 1855 | 10,3056 | 0,00295 | 896,09 | 1535,79 | 1,355 | 1,334 | 255,17 | - 7,75 |
| 263,16 | 200 | 2030 | 10,1500 | 0,00291 | 928,09 | 1630,30 | 1,368 | 1,361 | 269,78 | - 2,52 |
| 289,47 | 220 | 2195 | 9,9773 | 0,00286 | 962,46 | 1766,16 | 1,410 | 1,399 | 299,98 | - 3,64 |
| 315,79 | 240 | 2360 | 9,8333 | 0,00282 | 986,83 | 1892,32 | 1,452 | 1,435 | 331,86 | - 5,08 |
| 342,10 | 260 | 2530 | 9,7308 | 0,00278 | 1012,46 | 2036,92 | 1,503 | 1,478 | 365,70 | - 6,91 |
| 368,42 | 280 | 2695 | 9,6250 | 0,00276 | 1025,46 | 2119,40 | 1,520 | 1,501 | 386,53 | - 4,95 |
| 394,74 | 300 | 2860 | 9,5333 | 0,00273 | 1045,00 | 2254,67 | 1,566 | 1,542 | 417,17 | - 5,69 |
| 421,05 | 320 | 3085 | 9,4844 | 0,00272 | 1052,00 | 2303,69 | 1,564 | 1,557 | 427,57 | - 1,55 |

XII. táblázat.

Ethilén.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0.00256; T_2 = 373,0$$

| Kisér- leti nyo- más p_1 at. | Amagat kísérleti adatai | | | Gramm- moleku- lában kifeje- zett térfogat $v_1 = \frac{v_1'}{v_o'}$ | Kísérleti adatok alap- ján számított értékek | | | Képlet alapján számított értékek | | |
|---|---|------------|-------------------------------|--|---|--------------|-------|-------------------------------------|--------------|--------------|
| | Kisér- leti nyo- más p_1 mHg oszlop | $p_1 v_1'$ | $v_1' = \frac{p_1 v_1'}{p_1}$ | | p_m at. | p_r at. | C_1 | C_1 | p_1 at. | %-os hiba |
| 39,47 | 39 | 3225 | 107,5000 | 0,03080 | 8,22 | 48,37 | 1,014 | 1,006 | 39,86 | - 0,39 |
| 52,63 | 40 | 3110 | 77,5000 | 0,02222 | 15,81 | 69,48 | 1,015 | 1,009 | 53,05 | - 0,42 |
| 78,95 | 60 | 2860 | 47,6667 | 0,01366 | 41,91 | 123,06 | 1,018 | 1,018 | 78,97 | - 0,02 |
| 105,26 | 80 | 2640 | 33,0000 | 0,00946 | 87,59 | 197,97 | 1,026 | 1,034 | 103,87 | + 1,39 |
| 131,58 | 100 | 2515 | 25,1500 | 0,00720 | 149,92 | 294,39 | 1,045 | 1,055 | 130,12 | + 1,46 |
| 157,89 | 120 | 2470 | 20,5833 | 0,00590 | 222,74 | 408,98 | 1,074 | 1,084 | 154,54 | + 3,35 |
| 184,21 | 140 | 2505 | 17,8929 | 0,00513 | 299,84 | 531,51 | 1,078 | 1,117 | 175,99 | + 8,22 |
| 210,53 | 160 | 2585 | 16,1563 | 0,00463 | 371,23 | 659,90 | 1,134 | 1,154 | 200,60 | + 9,93 |
| 236,84 | 180 | 2700 | 15,0000 | 0,00430 | 433,11 | 785,05 | 1,172 | 1,192 | 225,48 | + 11,36 |
| 263,16 | 200 | 2835 | 14,1750 | 0,00406 | 487,25 | 910,66 | 1,213 | 1,231 | 252,52 | + 10,64 |
| 289,47 | 220 | 2975 | 13,5227 | 0,00387 | 519,73 | 1042,74 | 1,288 | 1,275 | 298,10 | - 8,63 |
| 315,79 | 240 | 3125 | 13,0208 | 0,00376 | 556,85 | 1138,33 | 1,304 | 1,306 | 314,76 | + 1,03 |
| 342,10 | 260 | 3275 | 12,5962 | 0,00362 | 599,69 | 1288,67 | 1,368 | 1,358 | 349,25 | - 7,15 |
| 368,42 | 280 | 3420 | 12,2143 | 0,00350 | 649,66 | 1453,19 | 1,427 | 1,417 | 375,88 | - 7,34 |
| 394,74 | 300 | 3560 | 11,8667 | 0,00340 | 672,00 | 1626,19 | 1,524 | 1,480 | 426,77 | - 32,03 |
| 421,05 | 320 | 3710 | 11,5938 | 0,00332 | 708,72 | 1797,36 | 1,590 | 1,545 | 454,62 | - 33,57 |

XIII. táblázat.

Szénsav.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00173; T_1 = 291,2$$

| | | | | | | | | | | |
|--------|-----|------|--------|---------|---------|---------|-------|-------|--------|---------|
| 105,26 | 80 | 625 | 7,8125 | 0,00223 | 1380,28 | 2132,00 | 1,435 | 1,439 | 101,31 | + 3,75 |
| 131,58 | 100 | 760 | 7,6000 | 0,00218 | 1444,21 | 2368,88 | 1,503 | 1,502 | 132,94 | - 1,03 |
| 157,89 | 120 | 890 | 7,4167 | 0,00213 | 1514,34 | 2565,00 | 1,593 | 1,582 | 170,23 | - 7,82 |
| 184,21 | 140 | 1020 | 7,2857 | 0,00209 | 1573,39 | 2961,11 | 1,684 | 1,665 | 205,05 | - 11,28 |
| 210,53 | 160 | 1145 | 7,1562 | 0,00205 | 1633,33 | 3331,25 | 1,806 | 1,771 | 247,66 | - 17,62 |
| 236,84 | 180 | 1275 | 7,0833 | 0,00203 | 1665,04 | 3553,33 | 1,868 | 1,837 | 269,27 | - 13,75 |
| 263,16 | 200 | 1405 | 7,0250 | 0,00201 | 1698,01 | 3807,14 | 1,941 | 1,913 | 292,13 | - 11,00 |
| 289,47 | 220 | 1530 | 6,9545 | 0,00199 | 1732,32 | 4100,00 | 2,027 | 2,001 | 316,65 | - 9,45 |
| 315,79 | 240 | 1650 | 6,8750 | 0,00197 | 1768,04 | 4441,66 | 2,131 | 2,108 | 339,01 | - 7,36 |
| 342,10 | 260 | 1770 | 6,8077 | 0,00195 | 1805,26 | 4845,45 | 2,256 | 2,237 | 360,78 | - 5,47 |
| 368,42 | 280 | 1890 | 6,7500 | 0,00193 | 1844,08 | 5333,33 | 2,410 | 2,394 | 383,71 | - 4,15 |
| 394,74 | 300 | 2010 | 6,7000 | 0,00192 | 1864,13 | 5610,52 | 2,485 | 2,487 | 391,81 | - 1,79 |
| 421,05 | 320 | 2135 | 6,6719 | 0,00191 | 1900,27 | 5922,22 | 2,551 | 2,592 | 384,53 | + 8,68 |

XIV. táblázat.

Szénsav.

$$v_o' = 3490; b_1 = 0,00205; T_2 = 373,0$$

| Kísér- leti nyo- más p_1 at. | Amagat kísérleti adatai | | | Gramm- mole- kulában kifeje- zett térfogat $v_1 = \frac{v_1'}{v_o'}$ | Kísérleti adatok alap- ján számított értékek | | | Képlet alapján számított értékek | | |
|---|---|------------|-------------------------------|--|---|--------------|-------|-------------------------------------|--------------|-------------|
| | Kísér- leti nyo- más p_1 at. $m \text{ Hg}$ oszlop | $p_1 v_1'$ | $v_1' = \frac{p_1 v_1'}{p_1}$ | | p_m at. | p_r at. | C_1 | C_1 | p_1 at. | %os hiba |
| | | | | | | | | | | |
| 39,47 | 30 | 3225 | 107,5000 | 0,03080 | 7,26 | 47,51 | 1,016 | 1,005 | 40,01 | - 1,37 |
| 52,63 | 40 | 3105 | 77,6250 | 0,02224 | 13,88 | 67,65 | 1,017 | 1,008 | 53,23 | - 1,14 |
| 78,95 | 60 | 2860 | 47,6667 | 0,01366 | 36,88 | 117,65 | 1,015 | 1,016 | 78,91 | + 0,05 |
| 105,26 | 80 | 2635 | 32,9375 | 0,00944 | 77,07 | 184,84 | 1,013 | 1,028 | 102,73 | + 2,40 |
| 131,58 | 100 | 2425 | 24,2500 | 0,00695 | 142,90 | 278,77 | 1,015 | 1,047 | 124,35 | + 5,50 |
| 157,89 | 120 | 2260 | 18,8333 | 0,00540 | 236,55 | 407,76 | 1,033 | 1,076 | 142,41 | + 3,47 |
| 184,21 | 140 | 2160 | 15,4286 | 0,00442 | 361,05 | 576,37 | 1,057 | 1,117 | 154,94 | + 16,00 |
| 210,53 | 160 | 2130 | 13,3125 | 0,00381 | 474,00 | 776,13 | 1,135 | 1,170 | 189,36 | + 10,05 |
| 236,84 | 180 | 2150 | 11,9444 | 0,00342 | 586,00 | 997,08 | 1,158 | 1,234 | 222,01 | + 6,27 |
| 263,16 | 200 | 2215 | 11,0750 | 0,00317 | 686,00 | 1219,64 | 1,284 | 1,302 | 250,74 | + 4,73 |
| 289,47 | 220 | 2290 | 10,4091 | 0,00298 | 785,00 | 1468,81 | 1,365 | 1,409 | 257,45 | + 11,10 |
| 315,79 | 240 | 2390 | 9,9583 | 0,00285 | 847,00 | 1707,50 | 1,465 | 1,461 | 321,72 | - 1,88 |
| 342,10 | 260 | 2490 | 9,5769 | 0,00274 | 914,66 | 1979,70 | 1,575 | 1,556 | 357,65 | - 4,55 |
| 368,42 | 280 | 2600 | 9,2857 | 0,00266 | 980,00 | 2239,34 | 1,660 | 1,649 | 372,10 | - 1,00 |
| 394,74 | 300 | 2715 | 9,0500 | 0,00259 | 1023,88 | 2529,62 | 1,783 | 1,757 | 415,86 | - 5,35 |
| 421,05 | 320 | 2830 | 8,8437 | 0,00253 | 1071,87 | 2845,83 | 1,905 | 1,878 | 443,48 | - 5,33 |

c) A molekulák alakja.

A molekulák alakja az atomok sűrűségétől és azok elrendezésétől függ. Ha az atomok a forgástengelyhez képest szimmetrikus elrendezésűek, tömegük és sűrűségük is azonos, akkor a molekulák alakja a szögsebesség (vagyis E'_w) változása esetében sem változhatik meg; burkoló palástjuk tehát állandóan gömbalakú marad. Ha azonban az atomok sűrűsége avagy tömege nem azonos s elrendezésük nem szimmetrikus, akkor a szögsebesség változásával a tömegek tengelytől távolsága is meg fog változni s ezzel a molekula burkoló palástjának az alakja is. Ha az ilyen molekula burkoló palástja magas hőmérsékletnél kiágazásokkal bír, ezek a kiágazások a hőmérséklet csökkenésével, az egyes tömegeknek a tengelyhez való nagyfokú közeledése folytán annyira kisebbedhetnek, hogy a palást bizonyos hőmérsékletnél (T_k) már

gömbalakot nyerhet. A hőmérséklet további csökkenésekor azonban a molekulák gömbalakjukat ismét elvesztik s a paláston ismét kiágazások avagy behorpadások állanak elő, úgy, hogy ilyenkor az anyag elrendezése szempontjából határozott tengelyek fejlődhetnek ki, a melyeket kristálytengelyeknek szokás nevezni. A molekulák most jelzett alakját *kristályos* alaknak, a gömbalakot pedig *amorf*nak nevezik. Azt a legmagasabb hőfokot, melynél a molekula már kristályos alakot mutat, *kristályosodási hőfok*nak (T_s) fogjuk nevezni.

d) A molekulák csoportosulása.

A molekulák, bármily alakúak legyenek is, csak akkor csoportosulhatnak, ha forgó mozgásukból ütközés nem áll elő s a rezgő mozgásukból eredő ütközés egyenes és centrikus. Forgó mozgásból, kellően sűrű elrendezésnél akkor nem áll elő ütközés, ha az érintkező pontok kerületi sebessége azonos és egyértelmű. Minthogy pedig a molekulák egyenlő nagyságúak és szögsebességük is azonos, így a gömbalakúak ütközés nélkül akkor foroghatnak egymás szomszédságában, ha forgástengelyeik párhuzamosak; a gömbtől eltérő, vagyis a kristályos alakkal bírók pedig csak akkor, ha nemcsak forgástengelyeik párhuzamosak, hanem ha mindig ugyanazok a pontok jönnek érintkezésbe, a melyek kerületi sebessége azonos, vagyis ha a forgó és rezgő mozgásuk periodusainak viszonya egész szám.

Az egymás szomszédságába kerülő molekulák ezzel a kívánt helyzettel rendszerint még nem bírnak, miért is forgó mozgásuk következtében ütköznek s ez készteti őket helyzetük, valamint a forgó s haladó mozgási viszonyuk megváltoztatására, míg végre a kívánt viszonylagos helyzetbe jutnak.

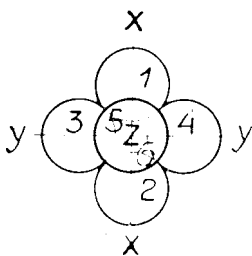
Eddig a forgó mozgást vettük figyelembe, lássuk már most, hogy a rezgő mozgás centrikus ütközése mikor állhat elő. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a hőfok olyan, a melyen a molekulák már gömbalakúak. Ritkított állapotban e molekulák a tér különböző irányában haladnak s ezért ilyenkor ütközésük centrikus nem is lehet, de ha a sűrűségük nő, ezzel együtt növekszik annak a valószínűsége, hogy ugyanaz a két

molekula mind gyakrabban találkozik, a minek következtében mozgásuk iránya állandóbbá válik; végül bizonyos sűrűség mellett az már teljesen állandó s ezzel az ütközés is centrikussá válik. A rezgő mozgás centrikus ütközésének feltétele tehát a kellő sűrűség. Ebben a helyzetben a gömbalakú molekula-párok egyirányú rezgést végeznek, a melyhez kisebb térre van szükségük, mint előbb, a mikor még különböző irányban rezegtek. Ép azért oly molekula-párok, a melyek egymás rezgését nem akadályozzák, a tömegvonzás hatását követve, közös rezgési középpont körül csoportosulhatnak. Ezzel a csoportosulással a molekulák helyzeti (potenciális) energiája megváltozik, a minek megfelelően rendszerint meleg válik szabaddá, szóval az anyag más fázisba jut.

A molekulák csoportosulása sokféle lehet. A legegyszerűbb az, a mikor három molekula-pár olykép egyesül, hogy mindegyik pár a derékszögű koordinátarendszer más tengelye irányában rezeg.

Ezt a csoportosulást mutatja a 10. ábra, a melyen az 1—2 molekula-pár az $x-x$, a 3—4 az $y-y$ és az 5—6 a $z-z$ tengely irányában rezeg. A következőkben a tárgyalás egyszerűsítése kedvéért ilyen hatos csoportosulást fogunk feltételezni.

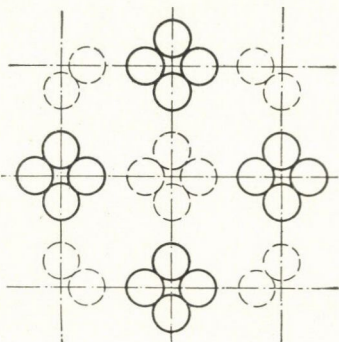
A sűrűség növekedésével fokozatosan több és több hatos csoport keletkezik s ha a sűrűséget még azon túl is növeljük, a mikor az összes molekulák már csoportosultak, beáll az az eset, hogy a térben mozgó hatos csoportok közül ismét hat csoport a vonzóerő hatása következtében egymás szomszédságában marad s nagyobb csoportot alkot; úgy, hogy a megnöve-



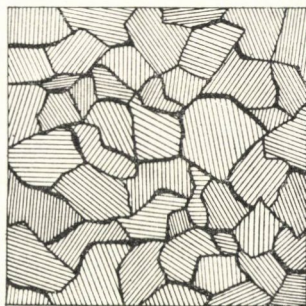
10. ábra. A molekulák hatos csoportja.

kedett csoportban valamennyi molekula egyidejűleg halad az eredeti középpont felé és attól kifelé. Ezt a szabályos rezgő mozgást a következőkben *harmonikus* mozgásnak, az ezt végző hat hatos csoportot pedig *magruk* fogjuk nevezni. A magban a belső fekvésű molekulák az új középpont felé való haladásukkor ismét bensőleg összefüggő hatos csoportot alkotnak, a mint ezt a 11. ábra pontozott része mutatja.

Gömbalakú molekulák hatos csoportjainak súlypontja a térben mozgást végez, mert a forgó és haladó mozgás periodusaiból alkotott viszony nem feltétlenül egész szám. A magvak, valamint a megnövekedett magvak közös súlypontjai azonban annál kevesebb mozgást végeznek, minél több hatos csoportból állanak, azért a csoportok növekedésével a nehézségi erő érvényesülése is arányosan nőni fog. Ha tehát a csoportok már annyira megnöttek, hogy a nehézségi erő következtében az edény fenekére esnek, akkor ott egységes nagy csoporttá egyesülnek, s így valamennyi hatos csoport egyforma viszonylagos elrendezésbe



11. ábra. A hatos csoportokból alkotott mag.



12. ábra. A szomszédos szemcsék tengelyirányai.

jut. Az anyagnak ezt az egyenletes elrendezését amorf elrendezésnek mondjuk; halmazállapota a kohézió nagysága szerint folyékony vagy szilárd.

Ha már most az ilyen amorf elrendezésű anyag hőmérsékletét annyira csökkentjük, hogy molekulái kristályos alakúvá válnak, akkor közöttük, mint előbb már kifejtettük, forgó mozgás okozta ütközés áll elő, a mely a rezgő és forgó mozgás energiáját módosítani fogja mindaddig, a míg végre e két mozgás periodusszámai között a kívánt egész számú viszony helyreáll. E célból rendszerint az egyik mozgási energia csökken, tehát melegmennyiség válik szabaddá, az anyag ismét új fázisba jut.¹

¹ Meg kell még jegyeznünk, hogy a kristályos hatos csoportok nemcsak amorf csoportokból keletkezhetnek, hanem oldatból való kiválás

A kristályos hatos csoportok képződése a hőfok lassú csökkenése esetén csak lassan halad előre. Az egymás szomszédságában levő hatos csoportok egymással excentrikusan ütközve, térbeni mozgásra készítetik egymást s ez mindaddig tart, míg olyan csoportok nem találkoznak, a melyek tengelyei párhuzamosak és azok közül egy-egy egybeeső. Ily viszonyok között hat hatos csoport *kristálymaggjá* egyesül, a melyben a hatos csoportok kristálytengelyei párhuzamosak.

A további csoportosulás egyidejűleg több magból indul ki. A megnövekedett csoport neve: *szemcse*. Minden szemcsében az egyes elemek tengelyei párhuzamosak, a szomszédos szemcsék tengelyeinek irányától azonban teljesen függetlenek (l. a 12. ábrát).

Ha a kristályosodásra szánt idő csekély, egy-egy szemcse aránylag kis méretű lesz s ilyenkor az anyag szerkezetét *finom szemcséjűnek* mondjuk.

Ámde az anyagnak nem minden egyes hatos csoportja sorakozhatik valamely szemcséhez, még pedig azért nem, mert a szomszédos szemcsék tengelyeinek eltérő irányainál fogva az érintkező felületeken levő hatos csoportok között excentrikus ütközés állana elő. Két szemcse közé tehát a hatos csoportok csak úgy illeszkedhetnek, hogy az érintkezőknek legalább egy-egy tengelye egybeesik, a mi által a szemcsék közötti kapcsolat is létrejön. Ha ennek a feltételnek egyetlen hatos csoport nem tehet eleget, a hatos csoportok egész láncolata illeszkedik a szemcsék közé, hogy a kapcsolatot létesítsék. Minthogy a kapcsolatot létesítő csoportok elrendezése a szemcsét alkotóktól lényegesen eltér, ezért elrendezésüket *amorfnak* vagy *üvegszerűnek* mondjuk. Az ilyen amorf elrendezésű hatos csoportok között a kohézi csak akkor azonos a kristályokéval, ha az illeszkedési pontban tengelyeik iránya azonos; a mint irányuk eltérő, a kohézió rohamosan csökken s ha zérus értékűvé válik, a szemcsék a kérdéses helyen szétválnak.

alkalmával is, ha a hőmérséklet T_s alá száll s az oldat túltelítődik; továbbá közvetlenül gázállapotú molekulákból is képződhetnek a kristályos hatos csoportok, ha az a hőmérsékletköz, a melyben a molekulák gömbalakúak, igen csekély.

c) A szemcse növekedése.

Az eddigiekben feltételeztük, hogy kristályosodásra kevés időt engedünk; a következőkben tegyük fel, hogy a kristályosodási hőfokot hosszabb ideig tartjuk fenn. Az előbbiekből következik, hogy a kristályosodás az első időszakban egyidejűleg sok magból indul ki, miért is számos kis méretű, de különböző nagyságú szemcse keletkezik, a hőfok fenntartása esetében azonban e különböző nagyságú szemcsék és a közójük illeszkedő kapcsoló csoportok helyzete meg fog változni azért, mert a kapcsoló csoportokra a nagyobbik szemcse nagyobb tömegével nagyobb vonzást gyakorol s hevesebb ütések mér, minek következtében a vele közvetlenül érintkező amorf elrendezésű hatos csoportot arra készíti, hogy teljesen hozzáilleszkedjék. Most már ez az illeszkedett hatos csoport ütközik erősebben régi társaival és helyzetüknek megváltoztatására készíti őket, ezzel azonban az utolsó kapcsolódó csoport és a kis szemcse szélső kristályos elrendezésű csoportja között válik hatályosabbá az ütközés, úgy hogy ez a szemcsétől elválni s a kapcsolódó láncolatba beilleszkedni kénytelen.

Így pártol el a kis szemcsétől egyik hatos csoport a másik után és csatlakozik a nagy szemcséhez, szóval a nagyobbik szemcse folyton nő a kisebbik rovására, a minek következménye, hogy a finom szemcséjű anyag durva szemcséjűvé válik. De minél nagyobbak a szemcsék, annál tökéletlenebbül függenek össze a szomszédokkal, sőt annál több pontban nem is kapcsolódnak egymással.

Az eddigiekben a molekuláknak a belső erők okozta csoportosulását vettük figyelembe, a következőkben a külső erőknek e csoportokra gyakorolt hatását fogjuk tanulmány tárgyává tenni. A külső erők hatását tekintve, két esetet kell megkülönböztetnünk a szerint, a mint a hatást a szomszédos test tömegének vonzása, avagy ennek feszültsége, esetleg tömegének nehézsége gyakorolja. Ha ugyanis a külső hatást a szomszédos test tömegvonzása fejti ki, akkor azok a jelenségek állanak elő, a melyeket *oldásnak* szokás nevezni; ezzel a hatással ez alkalom-

mal nem foglalkozunk, mert az itt tárgyalandó két kérdés megoldásánál ez figyelembe nem jön. Ha pedig a szomszédos test részecskéinek feszültségével avagy pedig súlyával fejti ki hatását, akkor ezt röviden *külső erőhatásnak* nevezzük s a következőkben ezzel a hatással fogunk foglalkozni.

f) A külső erőnek a hatos csoportokra való hatása.

Tegyük fel, hogy a külső erő nyomó erő, mely a 10. ábrán megérzékitett hatos csoport $x-x$ tengelye irányában működik. Ez a nyomó erő elsősorban az ebbe az irányba eső (1—2) molekulákat fogja tömöríteni (sűrűbb elrendezésbe juttatni), minek következtében a rezgés okozta ütközésük (p_r) nagyobb lesz. Ennek a nagyobb feszültségnek következtében tehát a hat molekula érintkezésekor a másik két tengely irányában rezgő (3—4, 5—6) molekulák az ediginél hatályosabb ütést szenvednek s jobban távolodnak el a középponttól, mint eddig; úgy, hogy végeredményben a nyomó erő irányában *sűrűsödés*, a reá merőleges irányokban *ritkulás* következik be.

Ha pedig a külső erő a felvett ($x-x$) irányban húzást fejt ki, akkor ebben az irányban következik be ritkulás. E ritkulás folytán a vonzó erő a másik két tengely irányában mozgó (3—4 és 5—6) molekula-párokat a középponthoz közelebb — tehát sűrűbb elrendezésbe — hozza, úgy, hogy végeredményben a húzó erő irányában ritkulás, a reá merőleges síkban sűrűsödés áll elő.

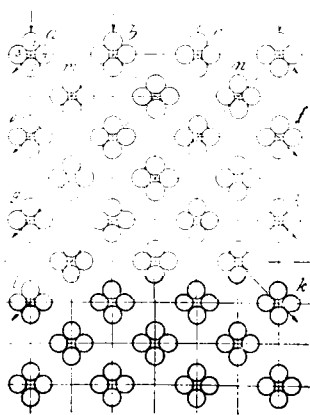
g) Az egyenletesen elosztott külső erőnek egyetlenegy szemcséből álló testre gyakorolt hatása.

Egyelőre oly testet vizsgálunk, a melyben a hatos csoportok tengelyei párhuzamosak s egyikük a külső erő irányába esik s a mely testnek anyaga a külső erő szélső fogópontján túl nem ér. Egyszerűség kedvéért a térbeni hatások megfigyelése helyett a következőkben oly síkmetszetben végbemenő hatást veszünk szemügyre, a mely a külső erő irányán átmegy és a palástfelületet merőlegesen metszi s ezt alkotó síknak fogjuk nevezni. A 13. ábra ezt a síkot érzékíti meg.

Tegyük fel, hogy a külső erő a nyomó felület minden egyes csoportjára egyformán hat.

a) *A mozgás iránya nyomó erő esetén.*

Mint hogy a nyomó erő a felületeken lévő (l. a 13. ábrát) (*a, b, c, d*) csoportokban a saját irányában sűrűsödést okoz, a mely az ütközés hatályát növeli, azért az erő irányára merőleges síkban mozgó molekulák nagyobb gyorsítást nyernek. A növekedett



13. ábra. Az alkotósíkban fekvő hatos csoportok.

gyorsítás miatt a szabad felszínen fekvő molekulák, mert ellenállásra nem találhatnak, nagyobb kilengést végeznek; ezzel azonban az *a*, valamint a *d* csoport súlypontja a szabad oldal felé terelődik; de, mert az erő irányában előállott sűrűsödés következtében a súlypont egyidejűleg az erő irányában is eltolódott, így az eredő mozgás az erő irányához bizonyos szög alatt hajló síkban megy véghez, a melyet *csúszó síknak* szokás nevezni.

Ámbár a szélső csoportok már elmozdultak, a belső (*b, c*) csoportok elesészását az alsóbb szintben fekvő *m, n* szélső csoportok gátolják, ezek pedig mindaddig el nem mozdulhatnak, a míg az *e* és *f* csoportok nem mozdultak el; de, a mint ez megtörtént, a *be* és *cf* csúszás síkjaiban fekvő összes csoportok egyidejűleg csúszhatnak el. Szóval az erő fogópontján át fektetendő csúszó síkokban levő összes csoportok egyidejűleg kénytelenek elmozdulni s ez az elmozdulás az *actio* és a *reactio* oldalán egyaránt előáll.

β) *A mozgás fajtái.*

A csoportok elmozgása — a mint láttuk — a külső erő okozta feszültségből ered. Minél nagyobb ez, annál nagyobb

lesz a ritkulás irányában a kilengés is, vagyis a súlypontnak elmozdulása ebben az irányban (l. a 13. ábrát).

Ha a súlypont kevesebbet mozdult el, mint a molekula felsugara, az eddig érintkezésben volt csoportok továbbra is érintkezésben maradnak, miért is az erő megszűntével csakhamar eredeti helyzetüket foglalják el. Ezt a mozgást *rugalmasnak* mondjuk.

Ha a súlypont elmozdulása nagyobb a molekula felsugaránál, de az egész sugárnál kisebb, az elcsúszott csoport az eddig érintkezésben volt csoportokon kívül új csoportokkal is érintkezik, csakhogy mindezekkel *excentrikusan* ütközik, miért is tovacsúszása ellen nagy ellentállásra talál. Az excentrikus ütközésből eredő ellentállást *be'ső surlódásnak* nevezzük; ezt az ellentállást a külső erő munkája kénytelen legyőzni, a melylyel a belső kinetikai energiát növeli, vagyis felmelegedést okoz. A felsugárnál nagyobb darabbal elcsúszott csoportok a külső erő megszűntével eredeti helyzetüket azonnal el nem foglalhatják, miért is alakváltozásukat *maradónak* mondjuk. Ebben a helyzetben azok a csoportok, a melyek súlypontja kisebb darabbal mozdult el a molekula sugaránál, a külső erő megszűntével nem maradhatnak meg, hanem a szomszédok excentrikus ütközése következtében lassan bár, de folyton oly helyzet felé kénytelenek haladni, a hol szomszédaikkal ismét harmonikus rezgésbe jönnek. Az ily fokig kitért csoportok helyzetét ez okból *bizonytalan-nak (labilisnak)*, a maradó alakváltozásnak ezt a fajtát *ideig-tartónak* nevezzük; az erő megszűnte után előállott mozgást pedig *rugalmas utóhatásnak*. Ha azonban a csoport súlypontja a molekula egész sugarával egyenértékű darabbal csúszott el, egy szomszédos szintben lévő csoportokkal kerül harmonikus mozgásba, minek következtében helyzetét az erő megszűntével is megtartja: ezt a helyzetet biztosnak (*stabilisnak*), a maradó alakváltozásnak ezt a fajtát pedig *maradandónak* mondjuk. További alakításakor az előbbi jelenségek ismétlődnek.

γ) *A szemese sűrűségének maradandó megváltozása.*

Az eddigiekben csak oly sűrűségváltozásról szóltunk, a mely a külső erő hatásával megszűnt; lássuk most, nem

változhatik-e meg a sűrűség maradandóan is. Minthogy az anyagokat jóval a kristályosodási hőfokon alul használják, kérdés: válthatik-e az anyag a lehűlés folyamata alatt állapotának megfelelő sűrűségűvé, vagy sem.

Szemcsés szerkezetű anyagban a tengelyek irányai mindaddig állandóak, míg az anyag más *fázisba* nem jut, ennél fogva a lehűlés folyamata alatt — hacsak új fázis nem áll elő — a tengelyirányok változatlanok, dacára, hogy a hőmérséklet csökkenésével, a szögsebesség változása következtében, a molekula alakja némileg megváltozik. Már most lehetséges, hogy az alacsonyabb hőmérsékletnek megfelelő alak sűrűbb elrendezést kívánna; ámde ez az elrendezés csak a tengelyek más fekvése mellett jöhetne létre és, mivel a tengelyek iránya nem változott meg, az anyag sűrűsége kisebb, mint a mi az alacsonyabb hőmérsékletnek megfelel. Ha az ilyen csoportra ferde irányú külső erő hat, ennek tangentialis componense elforgatja azt a molekulát, a melyre ez a componens hat. Ezzel az elforgatással megszűnik a molekulának a csoport többi tagjaival való centrikus ütközése, a minek következtében a csoport többi molekulája is s ezután a szemcsét alkotó többi csoport is fokozatosan elfordulni kénytelen, úgy, hogy tengelyeik orientált helyzetükben ismét egyirányúak lesznek, de ekkor a szemcse potenciálja, sűrűsége, már maradandóan megváltozott.

2) *A keménység növekedése.*

Bármily kis mértékű elforgatás álljon is elő, egyrészt a szemcse sűrűsége nő, a minek következtében (l. az 1. ábrát) nő a kohézió is, másrészt a molekulák hosszabb tengelye helyezkedik a méretnövelés irányába, miért is maradandó alakváltozás létesítéséhez a molekulák nagyobb kilengést tartoznak végezni, a mit csak nagyobb feszültséggel érhetünk el. Az ilyen hatos csoportok súlypontjának elmozgatásához tehát a felületegységre nagyobb külső erő kell, mint azelőtt, miért is az anyagot keményebbnek mondjuk.

e) *A szívósság.*

A kristályos csoportoknak (szemcséknek) azt a tulajdonságát, hogy külső erő okozta maradandó alakváltozások esetén keménységük nő, szívósságnak nevezzük. Minthogy a szívósság a helyzeti energia megváltoztatásán alapszik s mert ez csak addig változhatik meg, a míg a csoportok a szóban lévő hőfoknak megfelelő sűrűségüvé váltak, következik, hogy a szívósság korlátolt s mindennemű maradandó alakváltozás következtében csökkenő tulajdonsága az anyagnak.

A szívósság lényegéből már most az is következik, hogy, abban az esetben, ha a szívósságától megfosztott anyagot felhevítjük, mivel ekkor a csoportok sűrűsége s tengelyeik iránya a hevítési hő fokának megfelelőleg megváltozik, az anyag újból szívóssá válik.

ζ) *A képlékenység.*

Ha a ferde irányú külső erő olyan szemcsére hat, a melynek csoportjai már legsűrűbb helyzetben vannak, akkor ezek tovább orientálódni — elfordulni — nem tudnak, miért is csúsztatásuk állandó feszültség mellett mehet végbe. Egyes csoportok ekkor olyan erős elcsúsztatást szenvedhetnek, hogy a szemcse több részre oszlik. Ha az így különvált részek szélső amorf elrendezésű csoportjai csúsztatás közben kapcsolódnak, a különvált részek közti összefüggés biztosítva van. *A szemcsés anyagnak azt a tulajdonságát, hogy egyes részei nagy mértékben elcsúsztathatók, úgy, hogy az amorf csoportok közvetítése folytán még kapcsolatban maradnak, képlékenységnak nevezzük.*

η) *A ridegség vagy törékenység.*

Ha valamely test külső erő behatása alatt nem alakul, hanem elszakad vagy eltörik: ridegnek mondjuk. *A ridegség tehát a szívós és képlékeny alakíthatóság hiányát jelzi.* Ez két-féle okból állhat elő, még pedig vagy azért, mert a szemcsék annyira fejlettek, hogy a szomszédokkal csak kevés pontban fűggnek össze, a mikor is a szemcsék között lévő csekély számú

kapcsoló csoport nem tudja azt a feszültséget közölni, a mely alatt a keresztmetszetben fekvő szemcsék maradandó alakváltozása megindulhatna; avagy azért, mert a maradandó alakváltozás beálltához szükséges molekuláris kilengés már akkora nagy ritkítást okoz, hogy ezt a kohézió már nem ellensúlyozhatja. Ez az utóbbi eset az amorf elrendezésű csoportokban fordul elő.

h) Szemcsés szerkezetű testre ható húzó erő.

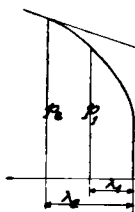
A következőkben tegyük fel, hogy a test sok szemcséből áll. Tudjuk, hogy minden szemcsében a tengelyek párhuzamosak, de ezek iránya szemcséről-szemcsére változó, s hogy minden szemcse felületén amorf elrendezésű csoportok vannak. Lássuk már most, hogy a külső húzó erő miféle hatást fejt ki ily testre.

Ha szemcsés anyagból szabályos hengert készítünk és a húzó erőt a henger tengelyével párhuzamosan irányítjuk, akkor a külső erő normális és tangenciális componenseinek nagysága szemcséről-szemcsére, a tengelyek változó fekvése következtében, változó lesz (l. a 12. ábrát). A testet alkotó szemcsék ezért nem is egyformán változtatják alakjukat. Az alakváltozás a legkedvezőbb fekvésű szemcsékben indul meg; de, mielőtt ezek alakultak, nő a keménységük, miért is további alakításukhoz nagyobb erőt igényelnek. E nagyobb erő hatása következtében azonban már nemcsak ezek, de oly szemcsék is fognak maradónan alakulni, a melyek az előbbi kisebb erőnél csak rugalmasan deformálódtak és így tovább. Szívós anyagból készült hengeres rúd tehát, dacára annak, hogy megnyúlása következtében keresztmetszete csökken, csak *fokozatosan növekedő erővel alakítható* s ez a *szívósság* előnye.

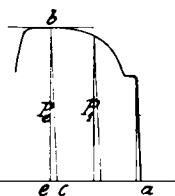
A szívósság korlátoltságából azonban következik, hogy azok a szemcsék, a melyek legelőbb alakultak, hamarabb is érik el legnagyobb sűrűségüket. Ezek az erő további hatása alatt oszlani kénytelenek (képlékeny alakváltozást szenvednek), minek következtében a keresztmetszetnek ez a része rohamosabban kisebbedik, mint a többi része, a melyekben a szívós alakváltozás még folyik.

Mindaddig, míg a keresztmetszetben fekvő összes szemcsék

szívós alakváltozást szenvednek, a keresztmetszet hordképessége nő s azért a külső erő is nő és munkája a rúd egész anyagának alakítására fordítatik. A mint azonban szemcse-oszlás áll be, a külső erő nem nöhet tovább és munkája már csak a rúd egyes részeinek alakítására fordítódik. Minthogy az egész rúd anyaga csak a szemcse-oszlás beálltaig hasznosítható s mert eddig a határig a feszültség átlaga minden keresztmetszetben azonos, sőt a keresztmetszet viszonylagos méretváltozása is, ezért ez a határ a húzás szempontjából rendkívül fontos. Ennek jelzése az akkor beállott átlagos feszültséget, t. i. a *megváltzott*



15. ábra. A húzó feszültség munkaterülete.



14. ábra. A húzó erő munkaterülete.

keresztmetszet egységére vonatkoztatott külső erőt szokás használni s ezt p_e -vel fogjuk jelölni; számértékét úgy kapjuk meg, ha a legnagyobb húzó erőt (P_e) az akkori keresztmetszettel elosztjuk.

Ha húzáskor a külső erőt a megnyúlás függvényében rajzoljuk fel, munkaterületet kapunk (l. a 14. ábrát), a mely a rugalmas és maradó alakváltozás létesítéséhez felhasznált külső munkát ábrázolja. Ezen az ábrán az abscissa a teljes megnyúlást jelzi. Ha ebből a rugalmast levonjuk (a 14. ábrán $ac = ae - ec$), a maradót kapjuk, a melynek viszonya az eredeti hosszúsághoz adja a viszonylagos megnyúlást, a melyet százalékban szokás kifejezni (λ). Hasonló módon kiszámíthatjuk — a köbtartalom állandóságát feltételezve¹ — a meg-

¹ A szívósság okozta sűrűsödés nagyobb alakváltozások esetén elhanyagolható hibát okoz; ezért $\frac{d^2\pi}{4} \cdot h = \frac{d_1^2\pi}{4} \cdot h_1$ és mert $\frac{h_1}{h} = 1 + \lambda_1$, így $\frac{d_1^2\pi}{4} = \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{1}{1 + \lambda_1}$; ezt felhasználva a feszültség: $p_1 = \frac{P_1}{\frac{d_1^2\pi}{4}}$.

változott keresztmetszetet, a melylyel a külső erőt elosztva, a valódi feszültséget kapjuk. Ha ebből a két fajlagos értékből diagrammot készítünk (l. a 15. ábrát), a szívósság legyőzéséhez felhasznált húzó erő munkájának fajlagos értékét kapjuk, miért is ezt a szívósság jellemzésére használhatjuk. E célból az ábra területét mkg dm^3 -ben szokás kifejezni s m -mel jelölni. Ezt az értéket a *szívósság* fokának fogjuk elnevezni.

Meg kell még jegyeznünk, hogy húzáskor a külső erő növekedését a szemcsék közötti kohézió (p_0) korlátozhatja. Tudjuk, hogy minél nagyobbak a szemcsék, annál tökéletlenebb a szemcsék illeszkedése és így annál kisebb az a feszültség, a melyet a szemcsék közötti kohézió (p_0) még ellensúlyozni tud. Ha

$$p_0 < p_e,$$

akkor az anyag csak szívós; ha pedig

$$p_0 > p_e,$$

akkor szívósságának elvesztése után is alakítható, mindaddig, míg az anyag egyenlőtlen eloszlása a csúszó síkban való elmozgás ellenében akkora gátlást nem okoz, a mely a belső surlódást p_0 -ra növeli. A gátlás nagysága legfeljebb a $p_0 - p_e$ értéket érheti el; ennek p_e -hez való viszonya

$$\frac{p_0 - p_e}{p_e} = x - 1$$

adja a képlékenység fokát.

i) Szemcsés szerkezetű testre ható nyomó erő.

Nyomó hatás következtében a szemcsék — minthogy a külső erő tengelyük irányához képest ferdén hat — épügy kénytelenek elfordulni és a méretnövelés irányában megnyúlni, vagyis szívós alakváltozást szenvedni, mint az előbbieket szerint húzáskor; de, míg húzáskor a legnagyobb sűrűséget csak a legkedvezőbb fekvésű szemcsék érték el, addig nyomáskor, mert úgy a keresztmetszet, mint az erő mindig nő, valamennyi szemcse elérheti ezt, miért is az átlagos legnagyobb feszültség (p_{max}) lényegesen nagyobb a húzást jellemző p_e értéknél.

k) Összetett igénybevételek.

A húzást és nyomást egyszerű igénybevételnek nevezzük, mert a test összes szemcséi azonos módon (t. i. vagy húzásra, vagy nyomásra) vannak igénybevéve. Minden más igénybevételben azonban a test egyes részei húzást, mások pedig nyomást szenvednek, miért is az ilyeneket összetett igénybevételeknek nevezzük. Ily igénybevételeknél a külső erő csak addig nőhet, a míg a húzott részben a feszültség a szívósság határát jellemző (p_e) értéket eléri, ez okból összetett igénybevételeknél is csak ez az érték (t. i. p_e) s nem p_{max} veendő figyelembe.

A maradó alakváltozások mechanikájának alapfeltételeit ismerve, feladataink megoldásához foghatunk.

II. A hegesztés mibenléte.

A hegesztés mibenlétét az amorf elrendezésű csoportok könnyű kapcsolódásából s azoknak a szemcsékhez való illeszkedéséből állapíthatjuk meg.

Képlékeny anyagok alakítását tárgyalva, arra az eredményre jutottunk, hogy az amorf elrendezésű csoportok elcsúsztatáskor könnyen kapcsolódnak, mert ekkor a különböző irányban fekvő amorf csoportok egész sorozata találkozik s a kedvező fekvésűek azonnal kapcsolódhatnak. Mentől jobban alakítjuk az anyagot, annál nagyobb az amorf csoportok száma, annál valószínűbb tehát, hogy egyre több csoport kapcsolódik.

Az amorf csoportok könnyű kapcsolódását BEILBY¹ csiszoláskor is észrevette. Csiszolás közben ugyanis a tárgy felületén lévő egyenlőtlenségek amorf csoportokkal tömődnek be és az egész felszín folytonos réteggel vonódik be, a melynek csoportjai között a szemcsét jellemző párhuzamos tengelyirány egyáltalában nem található meg; jele annak, hogy az egész fedő réteg amorf elrendezésű csoportokból áll. Mind a csiszoláskor, mind a testek nagymértékű alakításakor az egymáson tovacsúszó csoportok között a belső erők hatása következtében kisebb a

¹ G. T. BEILBY: F. R. S. The Hard and Soft States in Metals. London, 1911.

távolság a kohézió szabta vonzókör sugaránál (az 1. ábrán látható *el* értékénél) s ezért kapcsolódhattak oly könnyen az amorf elrendezésű csoportok.

Ez a kapcsolódás azonban nem áll elő, ha két különálló test részecskéit csúsztatjuk el egymáson, még pedig azért, mert az érintkező felületek közötti távolság, a leggondosabb összecsiszolás esetén is, a vonzó kör sugarának a kétszeresével (az 1. ábrát alapul véve *2.cd*-vel) egyenlő; hogy ezeket kapcsolódásra bírjuk, szükséges, hogy annyira közelítsük őket, hogy a távolságuk felére csökkenjen, a mi oly nyomó erővel érhető el, a mely a kohézióval egyenlő nagyságú és értelmű feszültséget okoz; de szükséges továbbá, hogy a csoportokat ebben az összeszorított állapotban egymáson el is csúsztassuk, mert csak így találkozhatnak a megegyező tengelyirányú csoportok egymással.

Rendes nyomással ezt a nagy feszültséget nem érhetjük el, mert az anyagnak a csúszó síkok mentén való elcsúszása jóval alacsonyabb feszültség mellett áll be; de növelhetjük a feszültséget, ha a testet oldalt is nyomjuk, például az által, hogy keményebb anyagból készült csőbe illeszítjük, avagy ha a deformálandó test méretét olyképp választjuk, hogy magasságát átmérőjének felénél kisebbre vesszük.¹

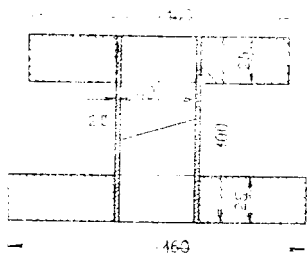
Annak igazolására, hogy a kohézióval megegyező feszültség alatt álló részek elcsúsztatása esetén a hegesztés hideg állapotban csakugyan beáll, a következő kísérleti sorozatot végeztük:

A hengeres próbatesteket (l. a 16. ábrát) ferde illesztési lapokkal láttuk el, gondos lekaparással oxydmentessé tettük őket s oly csőbe helyeztük, a melynek hossza belső átmérőjének legfeljebb háromszorosa, és hogy a deformálást az illesztett részre korlátozzuk, a csőre alul és felül a cső hosszának $\frac{1}{2}$ -ét elfoglaló tárcsákat helyeztünk el; ezután nyomással annyira alakítottuk, hogy a megnövekedett átmérő az eredetinek közel kétszeresére nőtt (l. a 17. ábrát), miközben az érintkező felületeken számos amorf elrendezésű csoport keletkezett, a melyek, ha a feszültség elegendő volt, valóban kapcsolódtak és a két

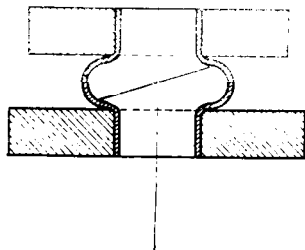
¹ REJTŐ: Elm. mech. techn. néhány alaptétele. Budapest 1896.

test között az összefüggést létrehozták, miért is ezt az eljárást *hideg hegesztésnek* nevezhetnők.

Kísérleteinket a leglágyabb fémekkel, az ónnal s ólommal kezdtük meg. Ezeket 3,5 mm falvastagságú hegesztett vascsőbe ágyasztuk, s minthogy a szemcse közötti kohézió az *ónnál 12 kg*, az *ólomnál 22 kg*, ezért a megnövekedett keresztmetszet egységére legalább ekkora nyomást igyekeztünk kifejteni, a mit, mint a XV. táblázatban foglalt adatokból kitűnik, el is értünk



16. ábra. A hidegen való hegesztéshez használt próbatest lapos illesztéssel.



17. ábra. Hidegen hegesztett próbatest alakja sajtolás után.

az által, hogy az *ónt 51 tonnával*, az *ólmot 110 tonnával* nyomtuk össze. Az összenyomott darabokat kettévágtuk. A vágott felületen látható volt, hogy az egész keresztmetszet összehegedt; a többiből szakító próbatesteket készítettünk, a melyek az eredeti szilárdságnak 0,80–0,88-át érték el, nyúlásuk pedig az eredetivel azonos volt, de a hegedt keresztmetszet nem kontrahált, vagyis képlékenységgel nem bírt, a mi természetes is, mert hisz az amorf csoportok nem képlékenyek.

Az ólommal s ónnal végzett sikeres hegesztés után rézzel kísérleteztünk. A réz szemcseközi kohéziója *40 kg*; ezt a nagy feszültséget hegesztett vascsőbe való ágyazással elérni nem tudtuk, mert a cső megrepedt, miért is további kísérleteinkhez 2,5 mm falvastagságú Mannesmann-csövet alkalmaztunk s ekkor *302 tonnát* fejthettünk ki, a nélkül, hogy a cső megrepedt volna. Ez a nyomás a deformált felületegységen *46 kg* feszültséget oko-

XV. táblázat.

| Hegesztő kísérletek, lapos állásúval. | | | | | Szakító kísérletek. | | | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------|--------------|------------------|-----------------|------------------|--------------------------------|------------|--------------|-------------------------------|
| Anyag | A próbatest szélessége mm | A hegesztés szélessége mm | A dugó szélessége mm | A l. sz. nyomó erője kg | A sz. sz. nyomó erője kg | Az el. anyag | | | A be. sz. anyag | | Az el. sz. szélessége mm | Megjegyzés | | |
| | | | | | | szélessége mm | hossza mm | szélessége mm | hossza mm | szélessége mm | | | hossza mm | |
| Ólom | 40 | 100 | 51 | 73 | 138 | Hegesztés erője 250 | 2.17 | 19 | 5.3 | 12 | 1.71 1.84 | 16 19 | 80 83 | A hegesztés erője 250 |
| Ólom | 40 | 100 | 116 | 78 | 27 | Hegesztés erője 250 | 2.18 | 27 | 8.0 | 22 | 1.61 1.92 | 27 19 | 71 88 | A hegesztés erője 250 |
| Ólom | 40 | 100 | 202 | 97 | 46 | Hegesztés erője 250 | 2.3 | 30 | 1.7 | 19 | 2.30 | 30 | 100 | Más hegesztés erője 250 |
| Hegesztő kísérletek, lapos állásúval. | | | | | Szakító kísérletek, merleg állásúval. | | | | | | | | | |
| 340 sz. l. sz. | | | | | | | 24 | 21 | 3.35 | 97 | 24 | 27 | 3.35 | 100 |
| 340 sz. m. sz. | | | | | | | 30 | 13 | 1.59 | 94 | 30 | 13 | 1.59 | 100 |

zott; ez ugyan kisebb a szemcsék közötti kohéziónál, de az erő további növelése a rendelkezésünkre álló gépen lehetetlen volt. Minthogy az átlagos feszültség kisebb volt a kohéziónál, nem hegedhetett össze az egész keresztmetszet, de, mert lapos próbatestek nyomásakor a feszültség egyenlőtlenül oszlik el, a hegedés a középen végbemehetett, a szélen azonban nem, mint azt a próbadarab igazolta. A hegedt darabbal végzett húzó kísérletek adatai szerint a hegedési hely elérte az ép anyag szilárdságát s ennek nyúlását is és nem is szakadt el a hegesztett keresztmetszetben, hanem az ép részben, a mely természetesen kellően kontrahált is.

Az ólommal, ónnal s rézzel végzett sikeres hideg hegesztések elméleti következtetéseink helyességét igazolják.

Meg kell azonban említenünk, hogy ennek az eljárásnak hátránya, hogy az egyesített testrészeket amorf csoportok tartják össze, a melyek merevek, miért is a hegedt keresztmetszet nem kontrahál (nem képlékeny).

Hogy képlékenységgel is felruházhassuk a hegedt keresztmetszetet, a csoportok illeszkedését kell megváltoztatnunk, a mit melegkezeléssel érhetünk el.

Tudjuk, hogy a deformált anyag belső szerkezete a kristályosodási hőfokon lényeges változást szenved, a mennyiben az amorf csoportok a kristályosokhoz sorakoznak s a kis szemcsék közül egynéhány nagyobb szemcsévé egyesül.

Ha tehát a hidegen hegesztett darabot a kristályosodási hőfokon kellő ideig tartjuk, az egész darab egynemű szerkezetűvé válik s így a hegedési keresztmetszet is azonos tulajdonságot kell hogy nyerjen, mint a többi.

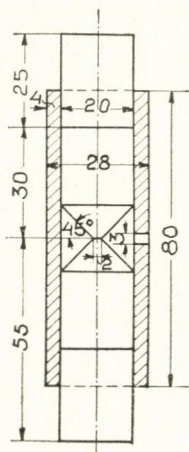
De, mert kristályosodáskor az amorf elrendezésű csoportok már akkor is a kristályos szemcséhez sorakozhatnak, ha a közöttük levő kohézió aránylag még igen kicsi, azért abban az esetben, ha a melegkezeléssel járó kristályosodás előnyeit akarjuk felhasználni, nincs szükségünk arra, hogy a csoportokat mechanikai úton teljes kapcsolódásra bírjuk, hanem elegendő, ha azokat csak némi közelségbe hozzuk, anélkül, hogy nagy mértékű elcsúsztatással kapcsolódásra indítanók őket.

Meleg kezeléssel kapcsolatos hideg hegesztés.

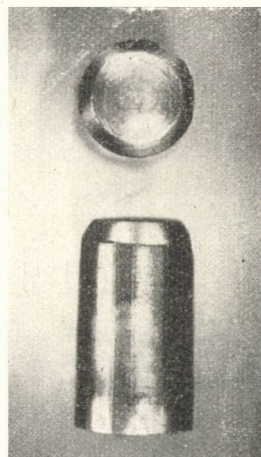
Az imént levont elméleti következtetéseink helyességét igazolandó, a következő kísérleteket végeztük:

Lágy folyasztott kovácsvasból 20 mm átmérőjű hengeres próbatesteket készítettünk, egy-egy végüket csonka kúppá esztergáltuk meg, s hogy centrikusan összenyomhatók legyenek, 3,5 mm falvastagságú vascsőbe illesztettük.

A vascövet hosszabbra vettük a próbatestnél (18. ábra), hogy végeire edzett acélból való pótlékokat alkalmazhassunk,



18. ábra. Hideg hegesztéshez használt kúpos illesztésű próbatest méretei.



19. ábra. Kúpos illesztésű próbatest, a nyomás befejeztével.

a melyek alakváltozás nélkül hatolhattak be a csőbe. A próbatesteket azután annyira összenyomtuk, hogy a csonka kúpok érintkező felületének átmérője, a mely kezdetben 2 mm volt, 14—16 mm-re növekedett. Az összes nyomás 23 t volt; az e nyomás által létrehozott feszültséget a cső okozta surlódás miatt pontosan meghatározni nem lehet ugyan, de, mert a legkedvezőbb esetben, t. i. ha az egész nyomó erő hatott volna a legnagyobb keresztmetszetre, csakis 38 kg nyomó feszültség állott volna elő, holott a szemcse közötti kohézió 96 kg, így termé-

mészetes, hogy e csekély feszültség alatt a kapcsolódás még nem állhatott elő.

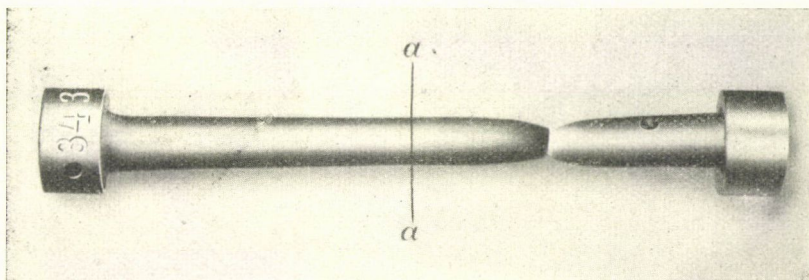
Annak igazolására, hogy ennél az eljárásnál a hideg hegedés csakugyan még nem következett be, az összenyomott próbatestet



20. ábra. Kúpos illesztésű próbatest hegesztett keresztmetszete meleg kezelés után.

testek egyikét burkoló csövetől megszabadítottuk s ekkor, a mint ezt a 19. ábra igazolja, a két test különvált.

A többi próbatestet 2 órán át az austenit-mező alsó határát jelző hőmérsékleten ($A_{r,3}$) tartottuk (a használt anyagnál ez kb. $900\text{ }^{\circ}\text{C}$ volt) s lassan hűtöttük le. Ezek egyikét kettévágtuk s mikroszkopi vizsgálatra alkalmas csiszolatot készítettünk belőle.



21. ábra. Hidegen hegesztett elszakított vaspróbatess. A hegesztett keresztmetszet $a-a$ vonal irányában van.

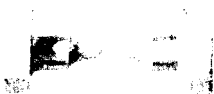
Ennek mikroszkopi képe (l. a 20. ábrát) mutatja a hegedt keresztmetszet szerkezetét 70-szeres nagyításban, a melyből kitűnik, hogy a két test érintkező síkjában a szemcsék elrendezése és nagysága teljesen azonos, mint a test egyéb részeiben, vagyis, hogy a hegedés tökéletes. Ugyanezt igazolja a szakító kísérlet is, a mennyiben az anyag szilárdsága, nyúlása és képlékenysége

(helyi kontrakciója) a XV. táblázaton közölt adatok szerint ugyanakkora volt, mint az eredeti állapotú anyagé (l. a 21. ábrát).

Kísérleteinket többször megismételtük s mindig ugyanazt az eredményt értük el.

Azután nikkellel kísérleteztünk. Eljárásunk ugyanaz volt, mint előbb.

Az összenyomott próbatestet 900°C -on 2 órán át izzítottuk, ezután szakító próbapálczát készítettünk belőle (l. a 22. ábrát), a mely, mint a XV. táblázaton foglalt adatokból kitűnik, az eredeti anyag szilárdságát érte el, sőt erősen kontrahált is; jele



22. ábra. Hidegen hegesztett nikkellel, melyet meleg kezelés után elszakítottunk.

annak, hogy a hegedt keresztmetszet szabályos szemcsékből állott.

A kapott eredmények alapján a kovácstűzben végzett hegesztést tökéletesíthetjük. A lágy vas kohéziója $1000\text{--}1200^{\circ}\text{C}$ körül lényegesen kisebb a hideg vasénál s csak valamivel nagyobb az ugyancsak e hőfokon való csúsztatáshoz szükségelt feszültségnél, miért is gyors ütések esetében a gyorsulás és a csúsztató ellentállás összege eléri már a kohézió értékét. Ez a magyarázata annak, hogy miért heged össze az izzó vas kovácsolás közben. Kovácstűzben végzett hegesztéskor igen gyakoriak az oxidos helyek is, melyek a hegedést gátolják. Szakszerű kezeléssel azonban az oxidok igen csekélyre leszoríthatók és ebben az esetben a hegedt hely az eredeti anyag szilárdságának $70\text{--}80$, sőt

100%-át is eléri. Ilyenkor a próbadarab ép része nyúlik és kontrahál, de a hegesztett hely nem, mert ott a molekulasoportok amorf állapotúak. Ha az ilyen próbatestet ide-oda hajtogatjuk, az a hegedt helyen szétnyílik; ha azonban a különben jól hegedt darabot melegkezelésnek vetjük alá, vagyis ha azt az Ar_3 hőfokig felhevítve 1 órán át tartjuk, akkor ez már ide-oda hajtogatás esetén sem válik szét s úgy viselkedik mint a sértetlen rúd.

Ezek a példák eléggé bizonyítják, hogy az anyagok belső szerkezetének s a molekulák csoportosulási törvényének segítségével a hegesztés mibenlétét és az anyagi részek kapcsolódásának módját helyesen állapítottuk meg, miért is most már a második feladat megoldásához foghatunk.

Ismétlődő igénybevételek hatása.

Az ismétlődő igénybevételek befolyásának felismerése a gyakorlati életre jóformán még fontosabb az előbbinél. Jároműveken hányszor fordulnak elő tengelytörések, daczára, hogy a gépeket elindulásuk előtt gondosan megvizsgálják s csak akkor engedik meg használatukat, ha semmi hibát sem vesznek észre rajtuk. A szerencsétlenül járt gép tengelyének anyaga szilárdsági szempontból rendszerint kifogástalan, mert hisz a balesetek oka nem is az anyag silány minősége, hanem kifáradása (azaz szívósságának megsemmisülése). Hogy az anyag kifáradásának törvényszerűségét megállapíthassuk, az ismétlődő igénybevételek hatását kell ismernünk. El czélból vegyük figyelembe első sorban az ismétlődő húzó igénybevételeket.

Ismétlődő húzó igénybevételek.

Szakításig terjedő huzáskor az átlagos feszültség a húzó erő legnagyobb értékének beálltaig fokozatosan nő, a mikor is a feszültség azt az értéket (p_e) éri el, a melynél az összes szemcsék kisebb-nagyobb fokú szívós alakváltozást szenvednek. Ha azonban a húzó erő a szakító erő értékénél kisebb, a feszültség is jóval kisebb lesz (p_e)-nél és ekkor a szemcsék

nagy része csak rugalmas, avagy ideigtartó maradó alakváltozást fog szenvedni. Ilyen esetben az erő megszűntével a bizonytalan helyzetbe került csoportok legnagyobb része hosszabb-rövidebb idő alatt eredeti helyzetükbe visszatér; ha pedig erre a rugalmas utóhatásra időt nem engedünk, hanem a tárgyat tehermentesítés után azonnal ismét megterheljük s ezt sokszorosan ismételjük, a bizonytalan állapotú csoportok tovább és tovább kénytelenek csúszni s végre biztos helyzetbe jutnak. alakváltozásuk ezzel maradandóvá válik, a mivel természetszerűleg az jár, hogy ugyanakkor más csoportok kerülnek bizonytalan helyzetbe. Ebből kitűnik, hogy huzásra igénybevett testben a szívós alakváltozás alacsonyabb feszültség hatása alatt is bekövetkezhetik, más szóval, *az anyag alacsony feszültségek hatása alatt is kifárad, ha az igénybevételt pihenetetés nélkül elég sokszor ismételjük.*

Mint hogy az anyag kifáradása abban az esetben, ha a feszültséget az egyenletesen eloszló legnagyobb feszültség határáig (p_e) fokozzuk, már az első igénybevételkor beáll s mert alacsonyabb feszültség esetén a nagyobb fokú maradandó alakváltozás csak ismétlések következtében jöhet létre, még pedig annál gyorsabban, minél nagyobb az egy igénybevétel okozta alakváltozás, azért kimondhatjuk, hogy a kifáradást létrehozó ismétlések száma függvénye annak a viszonynak, a mely a tényleges feszültség és az egyenletesen eloszló legnagyobb húzó feszültség (p_e) között fennáll; de, mert a szemese szívós alakíthatóságát a szívósság foka (m) jelzi, ezért ez ennek is függvénye.

Ezek alapján a kifáradást okozó ismétlések számát a következő képlet fejezi ki:

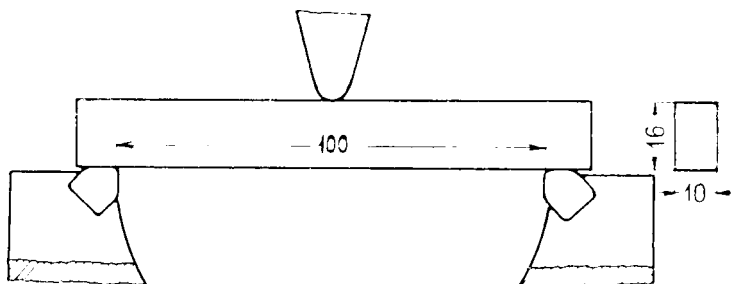
$$I = f(m, \frac{p_e}{l_1})$$

A függvény megállapításához oly anyagot használtam, a mely csakis szívóssággal bír, nevezetesen papirost, és e függvényt a következőnek találtam:¹

$$I = m^q \left(\frac{p_e}{l_1} - 1 \right)$$

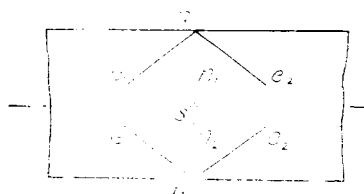
¹ REJTŐ SÁNDOR: A papiros tartósságának megállapítása. 1907.

vagyis, hogy ez hatványkitevős függvény, amelynek alapszámát a szivósság alkotja, hatványkitevője pedig a feszültségek viszonyának valamely függvénye. Ez utóbbi a test alakja és az igénybevétel módja szerint változik s esetről-esetre az adott viszonyoknak megfelelően meghatározandó.



23. ábra. A hajlító próbatest mérete és a terhelés módja.

Szerkezeti anyagaink azonban nemcsak szivósak, de képlékenyek is s így ennek a tulajdonságnak befolyását is meg kellett határozni. Ezt a feladatot hajlítással oldottuk meg. E célból a próbatestet az első hajlításkor a hajlító erő legnagyobb értékének beálltáig vettük igénybe, hogy a veszélyes keresztmetszet



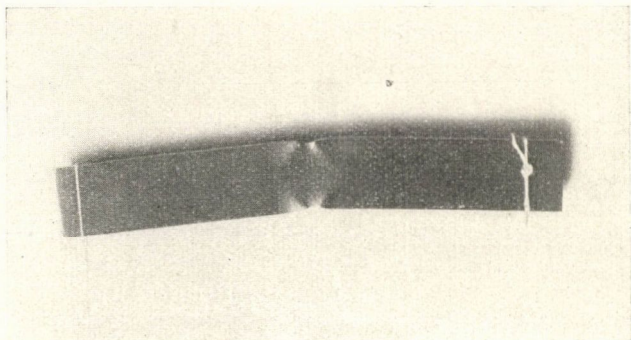
24. ábra. A neutrális tengely vándorlása, váltakozó irányú hajlításkor.

szélső szálában a szivósságot megsemmisítsük, miért is a külső szál anyaga a további igénybevételekkel csak képlékeny volt.

A kísérleteinkhez használt próbatestek keresztmetszete négy-szögletes volt, ezeket két támaszra fektetve a középben terheljük (l. a 23. ábrát) s ide-oda hajtogattuk őket mindaddig, míg eltörték, figyelve arra, hogy a hajlító erő legnagyobb értékét min-

dig elérje. Kísérleti tényként fel kell említenünk, hogy minden egyes próbatest eltörött, dacára, hogy egynémelyiknek anyaga igen képlékeny volt, a. minek okát a következő jelenségek teszik.

Maradandó alakváltozásokat okozó hajlításkor ugyanis a neutrális tengely nem esik bele a súlyponti tengelybe, hanem a nyomott oldal felé terelődik¹ (l. a 24. ábrát). Az ide-oda való hajlításkor tehát a neutrális tengely majd a súlyponti tengely fölé, majd ez alá kerül. Az az anyag, mely a neutrális tengely két szélső helyzete között fekszik, állandóan huzást szenved, miért is a veszélyes keresztmetszet szélessége irányában erősen be-



25. ábra. A váltakozó irányú hajtogatások hatása.

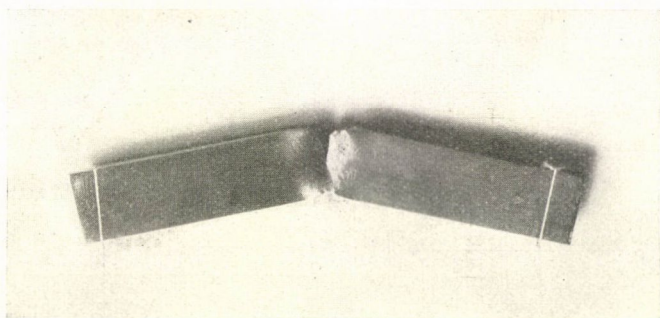
horpadni kénytelen, de, mert ugyanekkor a nyomás okozta duzzadás is érvényesül, még pedig a veszélyes keresztmetszet szélső (a, b) pontjaiból kiinduló csúszósíkok mentén (ae_1, be'_1, ae_2, be'_2), a huzás okozta szélesség irányú behorpadás csak e csúszósíkok által körülzárt területre terjedhet ki (l. a 25. ábrát, a mely a hajtogatott darab oldalnézete). Ez a duzzadás és a kontrahálás az anyagnak egyenlőtlen eloszlását okozza, a mely a külső réteg húzott szálának elesusztatását gátolja. Ha ez a gátlás akkora, hogy ennek a feszültséggel alkotott összege a szemcsék közötti kohézió értékét eléri, a szemcsék kapcsolata megszűnik s a

¹ REJTŐ: A hajlító erőnek viszonya a feszültséghez. M. M. É. E. K. — 1912. 2.

repedés beáll (l. a 26. ábrát); de, mert a kohéziónak (p_0) az egyenletesen eloszló legnagyobb feszültséghez (p_e) való viszonya a képlékenységet jellemzi, következik, hogy képlékeny anyagoknál a hajtogatások száma egyedül a képlékenységnak ($\alpha - 1$) a függvénye, azaz:

$$I_2 = f_1(\alpha - 1).$$

Ezt a függvényt a kísérleti értékekből egyelőre még nem tudjuk meghatározni, mert a kísérlet adta hajtogatások számai a szí-



•26. ábra. A váltakozó irányú hajtogatások okozta törés.

vósság s képlékenység engedte hajtogatások eredő értékét képviselik és mert még nem tudjuk azt, vajjon az eredő az alkotók algebrai összegéből, avagy azok szorzatából alakult-e. Ez utóbbira azonban útbaigazítást nyújt az a meggondolás, hogy az alkotó részek között csak olyan összefüggés állhat fenn, amely szerint a szivósságtól mentes képlékeny anyag hajtogatásszámait a másik alkotó rész nem befolyásolja, és viszont; minthogy pedig a csupán szivós alakváltozást létesítő hajtogatásszám képlete:

$$I_1 = m^q \left(\frac{p_e}{p_1} - 1 \right)$$

és a csupán képlékeny alakváltozást létesítőké:

$$I_2 = \phi(\alpha - 1)$$

s mert szivósság nélküli anyagra alkalmazható legnagyobb feszültség

$$p_1 = p_e$$

s így

$$\frac{p_e}{p_1} - 1 = 0,$$

tehát

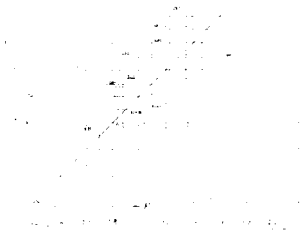
$$I_1 = 1,$$

és mert ez az érték az I_2 számértékét csak akkor nem befolyásolja, ha az eredő az alkotók szorzata, vagyis, ha

$$I = I_1 \cdot I_2,$$

ezért ezt vesszük alapul.

A mi esetünkben tehát $I = I_2$. Ismerve I_2 értékét, nemkülönben az anyag képlékenységi fokát (l. a XVI. tábl.), a függvényt meghatározhatjuk, ha a hajtogatások számának (BRIGG-féle)



27. ábra. A képlékenység befolyása az ismétlődésekre.

logaritmusait ($\log I$) és a $x-1$ értékeket koordinátarendszerbe foglaljuk (l. a 27. ábrát), mert ekkor kitűnik, hogy az ezek által megadott pontok a koordináta-tengelyekkel 45° -nyi szöget bezáró egyenes vonal irányába esnek.

A keresett függvény alakja tehát:

$$\log I_2 = x - 1,$$

avagy:

$$I_2 = 10^{x-1}.$$

Ez a képlet csak az adott esetre vonatkozik, más viszonyok között a hatványkitevő épügy módosulhat, mint a szivós alakváltást létesítő igénybevételek képletében, miért is általánosságban írhatjuk, hogy

$$I_2 = 10^{\psi(x-1)}.$$

Az összes hajtogatások képlete ennél fogva:

$$I = m^{\psi\left(\frac{p_e}{p_1} - 1\right)} \cdot 10^{\psi(x-1)}.$$

Képletünk szembetűnővé teszi azt a különbséget, a mely a szivós és képlékeny alakváltozás között fennáll s indokoltá teszi e két tulajdonságnak egymástól való elkülönített figyelembe vételét.

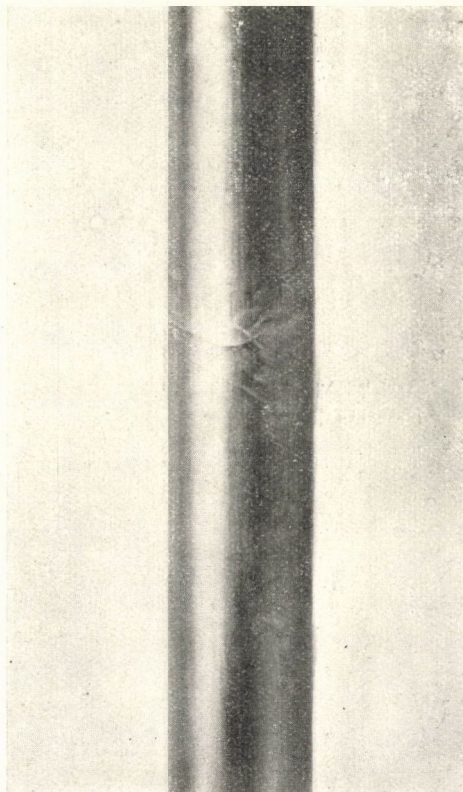
XVI. táblázat.

| Anyag száma | Megjelölése | I | log I | $\alpha-1$ |
|-------------|---|----|-------|------------|
| 257 | Vörös réz Előzőleg elszakított anyag | 16 | 1.20 | 0.41 |
| | | | | 1.35 |
| 258 | Ágyuréz | 20 | 1.30 | 0.82 |
| | | | | 1.37 |
| 264 | Folyt vas Előzőleg elszakított anyag | 12 | 1.08 | 0.74 |
| | | | | 1.14 |
| 265 | Folyt vas | 20 | 1.30 | 0.95 |
| | | | | 1.85 |
| 279 | Kazánlemezanyag | 10 | 1.0 | 0.82 |
| | | 12 | 1.08 | 1.12 |
| 281 | Folyt vas | 32 | 1.50 | 1.08 |
| | | 33 | 1.52 | 1.58 |
| 284 | Folyt vas | 14 | 1.15 | 1.00 |
| | | 26 | 1.41 | 1.47 |
| 315 A | Folyt vas | 9 | 0.95 | 1.23 |
| | | 45 | 1.65 | 1.35 |
| 322 | 3%-os nikkelaél | 6 | 0.78 | 0.88 |
| | | 14 | 1.15 | 1.36 |
| 324 B | Folyt vas | 6 | 0.78 | 0.84 |
| | | 8 | 0.90 | 1.04 |
| 325 B | Folyt acél | 3 | 0.48 | 0.52 |
| | | 6 | 0.78 | 0.70 |
| 326 A | Folyt vas | 9 | 0.95 | 1.00 |
| | | | | 1.24 |

Forgásban levő sima tengelyek kifáradása.

Forgásban levő tengelyek, ha terhelve vannak, minden körforgás alatt egyszeri ide-oda hajlítást szenvednek, miért is a hajlítások számát a forgásszám kétszerese adja meg.

Kísérleti tény, hogy az eféle tengelyek csekély teher alatt is eltörnek idővel; jele annak, hogy anyaguk kifárad (elveszti szívósságát) s hogy annyira egyenlőtlen elosztást is nyerhet, amelyet a képlékenység nem egyensúlyozhat. Az anyag kifára-



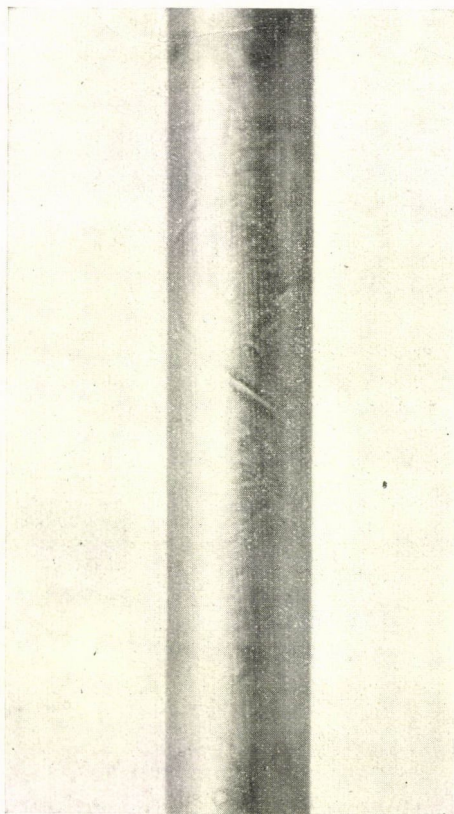
28. ábra.

A kifáradt tengely felszínén keletkezett rajzok.

dását az a körülmény okozza, hogy a veszélyes keresztmetszet külső szálának szemcséi közül azok, a melyek fekvése a húzóerő irányához képest a legkedvezőbb, az ismétlődő húzások következtében bizonytalan helyzetükből folytatólagosan biztos helyzetbe jutnak és így maradandóan alakíttatnak épügy, mint

a rendes húzáskor, miért is a kimerülést okozó ismétlések száma itt is az ismert hatványkitevős függvénynyel fejezhető ki, vagyis:

$$I_1 = m^q \left(\frac{p_c - p_1}{p_1} \right).$$

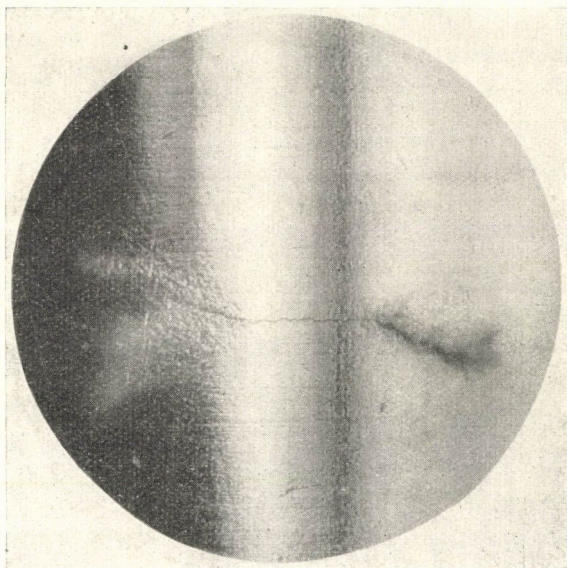


29. ábra.

A kifáradt tengely felszínén keletkezett repedések.

Lássuk már most az anyag egyenlőtlen eloszlását. Négyyszögű keresztmetszettel bíró rudakon a szabad oldalfelületen a neutrális tengely vándorlása következtében (l. a 24. ábrát) húzás okozta behorpadás és nyomás okozta duzzadás áll elő. Ezek a jelenségek azonban körkeresztmetszetű tengelyeken nem érvé-

nyesülhetnek, mert itt állandóan húzott réteg nincs, minthogy a középponttól legtávolabb fekvő sávban a neutrális tengely egybeesik a súlyponti tengellyel. De, mert a veszélyes keresztmetszet külső szálát alkotó szemcsék alakja akadálytalanul változhatik, azért ezeket kell szemügyre vennünk. Tudjuk, hogy a húzott szemese, ha azt szívós alakváltozása után még tovább alakítjuk, kontrahál és több részre oszlik, a nyomott pedig

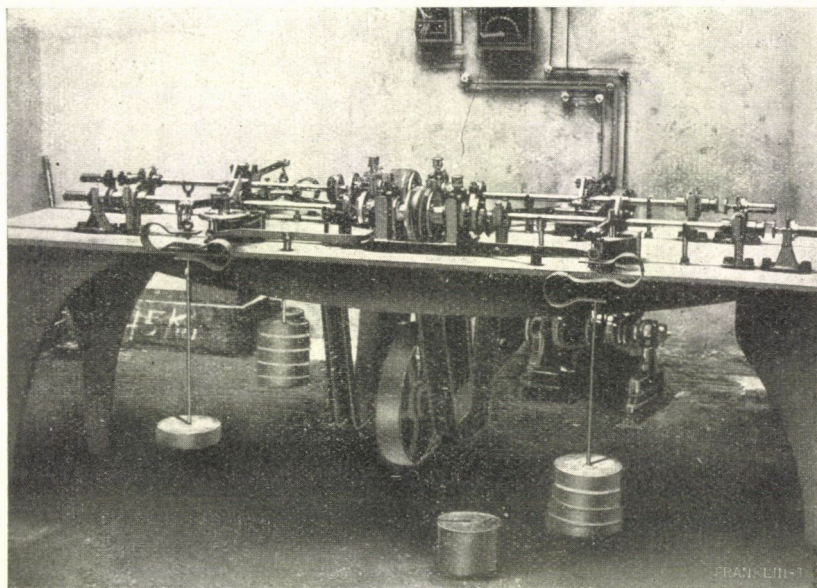


30. ábra. A kifáradt tengely felszínén keletkezett repedés.

azontúl is duzzad. Az egymás szomszédságában előálló szemceszálás és duzzadás következtében a két szemese határában akkora egyenlőtlenség állhat elő, hogy kapcsolódásuk megszűnik és hajszálrepedés keletkezik, amely a felszínen tovahaladó és onnan mélyebbre ható repedés kiindulópontja. Ezek a behorpadások, duzzadások és hajszálrepedések szabad szemmel simára esztergált felületen nem vehetők észre; de, ha a próbatestet (legalább a veszélyes keresztmetszet helyén) fényesre csiszoljuk és a kísérlet befejezte után kékre befuttatjuk s a legfinomabb csiszoló vászon-

nal gyöngéden megegyeszer lecsiszoljuk, akkor azok szembetűnővé válnak, a mint ezt a 28., 29. és 30. ábrák fényképmásolatban mutatják.

Minthogy a berepedés itt is az anyag egyenlőtlen eloszlása



31. ábra. A Howard-féle tengelyhajtogató gép képe.

következtében áll be, a képlékenységgel engedte ismétlések számát az általános képlettel fejezhetjük ki, vagyis:

$$J_2 = 10^{\psi(z-1)}.$$

Az összes hajtogatások képlete ennél fogva:

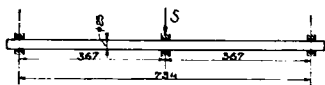
$$J = m^{\varphi} \left(\frac{p_2 - p_1}{p_1} \right) \cdot 10^{\psi(z-1)}.$$

A φ és ψ függvény a próbatest alakjától és az igénybevétel módjától függ, miért is meghatározásukhoz terhelés alatt forgó tengelyekkel végzett kísérletekre volt szükségünk. Műegyetemünkön erre alkalmas gép nem volt, ezért megkerestem a Rimamurány-Salgótarjáni Vasmű igazgatóságát, hogy

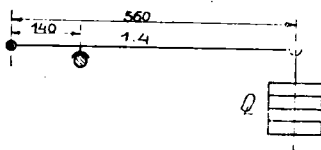
I. E. HOWARD (Watertown, Mass.) rendszerű gépét¹ bizonyos időre engedje át. Az igazgatóság kérelmemnek készséggel tett eleget s azért ez előzékenységéért itt is hálás köszönetemet fejezem ki.

A gép távlati képét a 31. ábra, vázlatos elrendezését a 32. és 33. ábra mutatja.

Hogy az e géppel nyert kísérleti adatokat felhasználhassuk,



32. ábra. A Howard-féle tengely-hajtogatógép támaszköze.



33. ábra. A Howard-féle tengely-hajtogatógép terhelésének módja.

a feszültségek kiszámításának módját is meg kellett állapítanunk. Ebből a célból vizsgálat tárgyává tettük azt, hogy vajjon forgás közben a behajlások ugyanakkorák-e, mint nyugalmi helyzetben, mert tudvalevő, hogy ez utóbbi helyzetben nagyobb terhelés maradó behajlást okoz, holott ugyanolyan teher alatt a forgó tengely — ha tehermentesítjük — maradó alakváltozást nem mutat.

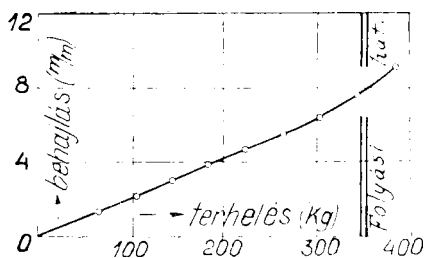
XVII. táblázat.

A 325 A. sz. tengely behajlása forgás közben és nyugalmi állapotban a középtől 35^m/_m távolságban mérve.

| Terhelő súlyok száma <i>i</i> | Behajlás ^m / _m -ben | | Behajlások különbsége ^m / _m -ben | Megjegyzés |
|-------------------------------------|---|----------|--|--|
| | forgó | nyugalmi | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | Terhelés a tengely közepén $G = 23,7 + 40$ t kg <i>i</i> jelzi a súlyok számát. Tengelyátnérő 25 ^m / _m Támaszköz 734 ^m / _m |
| 1 | 1,340 | 1,353 | 0,013 | |
| 2 | 2,155 | 2,176 | 0,021 | |
| 3 | 3,017 | 3,033 | 0,016 | |
| 4 | 3,849 | 3,879 | 0,030 | |
| 5 | 4,700 | 4,720 | 0,020 | |
| 6 | 5,527 | 5,563 | 0,036 | |

¹ Az anyagvizsgálók nemzetközi szövetsége Kopenhágában (1909) tartott kongresszusának iratai. IV. 1; 3. oldal.

Méréseink eredményeit a XVII. táblázatba foglaltuk. Az ott felsorolt adatokból a 34. ábrát szerkesztettük s ezzel a terhelések és behajlások közötti viszonyt szemléltetőké tettük. A táblázatból kitűnik, hogy a mozgó s nyugvó állapotban való terhelés okozta behajlás egyenlőnek vehető, mert az eltérések egyrészt szabálytalanok, másrészt oly csekélyek, hogy ezeket a golyós csapágyak egyenlőtlensége és a mérési hibák is okozhatták. A 34. ábrából pedig kitűnik, hogy a terhelés és behajlás közötti összefüggés körülbelül a folyási határig elsőfokú, ezentúl másodfokú, miért is a folyási határon aluli igénybevételek kiszámításához a rugalmas képletet, ezentúl pedig, a meny-



34. ábra. Forgásban levő tengelyek behajtása.

nyiben ezt a határt jóval túllépjük, a maradó alakváltozásokra érvényeset kell alkalmaznunk.

A folyási határ közelében azonban sem a rugalmas, sem a maradó alakváltozásokra érvényes képletek megbízható eredményt nem adnak. Kísérleteink alkalmával ilyen esetekben a rugalmassági képleteket használtuk, ezek azonban a feszültségre a valódinál valamivel nagyobb értéket szolgáltatnak, miért is ezt a kísérleti adatok mérlegelésekor figyelembe kell vennünk.

Tájékoztatás céljából még felemlítjük, hogy gépünkön a teher a 33. ábrán látható kar közvetítésével hatott. A terhelő súlyok egyenként 10 kg-osak voltak, a karnak és a rugónak a terhelő súlyok hatásvonalába átszámított súlya 5,93 kg volt, a karáttétel pedig 1 : 4. A támaszköz 734 mm volt, a próbadarabok átmérője 25 mm. A felsorolt viszonyok között a feszültség a súlyokkal a XIX. táblázat szerint változott.

XVIII. táblázat.

| Súlyok száma | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Legnagyobb feszültség p_1 kg $\frac{mm}{m^2}$ — | 7,5 | 12,2 | 16,9 | 21,6 | 26,3 | 31,0 | 35,7 | 40,4 | 45,1 | 49,8 |

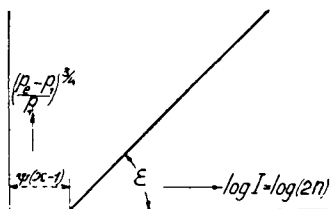
XIX. táblázat.

| Anyag száma | Eredete | p_a | p_f | p_e | λ_e | m | \times |
|-------------|---|-------|-------|-------|-------------|-------|----------|
| 322 | Diósgyőri 3%-os nikkелacél | 26,3 | 29,2 | 54,7 | 13,3 | 5780 | 2,31 |
| | | 47,0 | 49,8 | 59,8 | 10,0 | 5100 | 2,36 |
| | | 33,7 | 38,3 | 61,0 | 12,0 | 6750 | 2,11 |
| 324 A | Rimamurány-Salgótarjáni $G \times A$ jelű acél | 29,5 | 31,4 | 62,2 | 20,0 | 10260 | 1,99 |
| | | 29,0 | 32,3 | 62,2 | 20,5 | 10230 | 1,91 |
| 324 B | Rimamurány-Salgótarjáni $G \times B$ jelű acél | 28,0 | 31,8 | 62,6 | 22,0 | 11230 | 1,99 |
| | | 26,0 | 31,9 | 59,3 | 17,0 | 8190 | 2,04 |
| 325 A | Rimamurány-Salgótarjáni SA jelű acél | 26,0 | 41,5 | 91,3 | 14,5 | 10050 | 1,50 |
| | | 37,0 | 41,0 | 89,2 | 12,0 | 8610 | 1,44 |
| 325 B | Rimamurány-Salgótarjáni SB jelű acél | 38,0 | 43,0 | 81,4 | 11,0 | 7360 | 1,57 |
| | | 29,5 | 42,2 | 79,9 | 11,0 | 6940 | 1,52 |
| 326 A | Rimamurány-Salgótarjáni GWA jelű acél | 13,3 | 25,0 | 46,6 | 28,0 | 9930 | 2,24 |
| | | 17,0 | 25,0 | 45,9 | 28,0 | 10160 | 2,00 |
| 326 B | Rimamurány-Salgótarjáni GWB jelű acél | 16,1 | 25,4 | 44,6 | 25,0 | 8775 | 2,31 |
| | | 15,0 | 24,6 | 44,4 | 25,0 | 8650 | 2,32 |

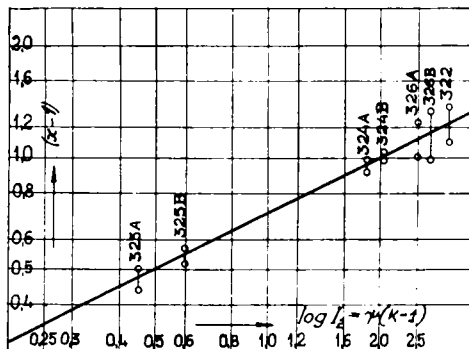
A legnagyobb terheléseket úgy választottuk, hogy a feszültség csak kevéssel lépje túl a folyási határt, mert nagyobb terhelésnél a próbadarabok erősen felhevültek, ebben az állapotban pedig jellemző tulajdonságaik megváltoznak. A kisebb ter-

heléseket pedig 3—4 fokozatban olyképp csökkentettük, hogy a $\left(\frac{p_e}{p_1}\right)$ viszony, vagyis a biztonsági fok, 3-nál nagyobb ne legyen, mert különben egy-egy kísérlet időtartama sok évre terjed ki. A kísérletekhez felhasznált anyagok jellemző értékeit, az egyes kísérletekben elért feszültséget, valamint a törést létrehozó fordulatszámokat (n) arra az esetre vonatkozólag, a mikor a percenkénti fordulatszám 420 volt, a XX. táblázat öleli fel.

Ezek után a keresett φ és ψ függvény megállapításához foghatunk. Ebből a célból azonos anyagból készült próbatenge-



35. ábra. A szívósság és képlékenység befolyásának ábrája.



36. ábra. A képlékenység befolyása az ismétlődő igénybevételekre.

lyeket különböző fokig terheltünk s a kísérleti értékekből a hatványkitevőt határoztuk meg; úgy találtuk, hogy

$$\varphi \left(\frac{p_e - p_1}{p_1} \right) = \left(\frac{p_e - p_1}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Hogy már most a ψ függvényt meghatározhassuk, a

XX. táblázat.

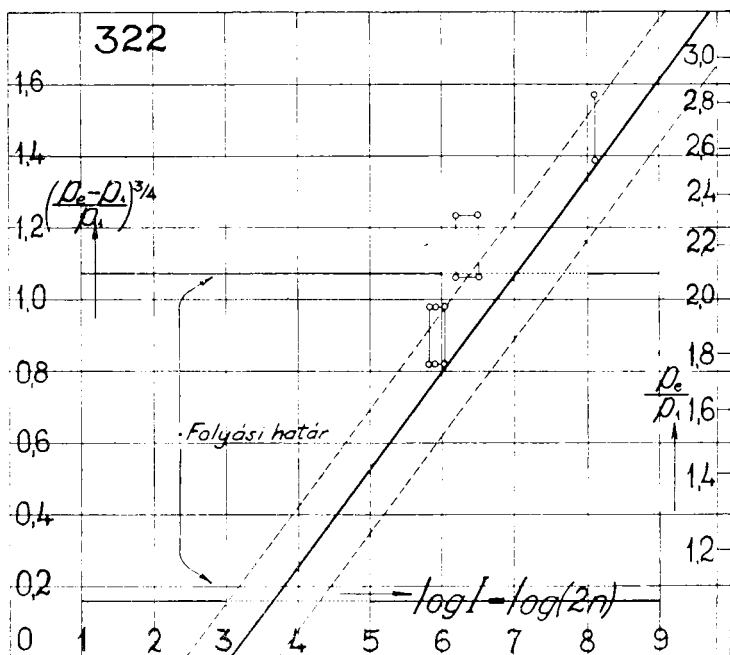
| Anyag száma | Próba- darab sor- száma | Ter- helő súlyok száma | $\frac{p_e}{p_1}$ | $\left(\frac{p_e}{p_1} - 1\right)^{3/4}$ | $2n = I$ | $\log I$ | Megjegyzések |
|----------------|----------------------------------|---------------------------------|-------------------|--|-----------|----------|---------------------------------|
| 322 | 47 | 6 | 1,76 1,97 | 0,80 0,98 | 747816 | 5,87 | A terhelés helyén berágódott |
| | 52 | | | | 1015252 | 6,01 | |
| | 55 | | | | 973832 | 5,99 | |
| | 46 | | | | 880292 | 5,94 | |
| | 48 | 5 | 2,08 2,32 | 1,07 1,23 | 1481550 | 6,17 | A terhelés helyén berágódott |
| | 53 | | | | 3020548 | 6,48 | |
| | 54 | | | | 50237688 | 7,70 | |
| | 49 | 4 | 2,53 2,82 | 1,38 1,57 | 124903360 | 8,10 | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 324 A | 1 | 7 | 1,74 | 0,80 | 67220 | 4,83 | Igen erősen melegedtek |
| | 2 | | | | 79710 | 4,90 | |
| | 3 | | | | 68610 | 4,84 | |
| | 4 | 6 | 2,01 | 1,01 | 311330 | 5,49 | Melegedtek |
| | 5 | | | | 458756 | 5,66 | |
| | 6 | | | | 402388 | 5,60 | |
| | 9 | 5 | 2,37 | 1,26 | 57122800 | 7,76 | |
| | | | | | | | |
| 324 B | 1 | 7 | 1,66 1,75 | 0,73 0,81 | 48740 | 4,69 | Igen erősen melegedtek |
| | 2 | | | | 61800 | 4,79 | |
| | 3 | | | | 46378 | 4,67 | |
| | 4 | 6 | 1,91 2,02 | 0,94 1,02 | 697860 | 5,84 | Melegedtek |
| | 5 | | | | 361426 | 5,56 | |
| | 6 | | | | 319886 | 5,50 | |
| | 7 | 5 | 2,25 2,38 | 1,19 1,27 | 9122276 | 6,96 | |
| | 8 | | | | 2468000 | 6,39 | |
| | 9 | | | | 2721642 | 6,43 | |
| | | | | | | | |
| 325 A | 1 | 9 | 1,98 2,02 | 0,99 1,02 | 33046 | 4,52 | Igen erősen melegedtek |
| | 2 | | | | 41332 | 4,62 | |
| | 3 | | | | 33104 | 4,52 | |
| | 4 | 8 | 2,21 2,26 | 1,16 1,19 | 118416 | 5,07 | Melegedtek |
| | 5 | | | | 143354 | 5,16 | |
| | 6 | | | | 105180 | 5,02 | |
| | 7 | 7 | 2,50 2,55 | 1,35 1,39 | 635700 | 5,80 | Melegedtek |
| | 8 | | | | 317762 | 5,50 | |
| | 9 | | | | 503288 | 5,70 | |
| | 10 | | | | 254482 | 5,41 | |

XX. táblázat. (Folytatás.)

| Anyag száma | Próba- darab sor- száma | Ter- helő súlyok száma | $\frac{p_e}{p_1}$ | $\left(\frac{p_e}{p_1} - 1\right)^3$ | $2n - I$ | $\log I$ | Megjegyzések |
|-------------|-------------------------|------------------------|-------------------|--------------------------------------|-----------|----------|--|
| 325 B | 1 | 9 | 1,77 | 0,82 | 9404 | 3,97 | Igen erősen melegedett (futtatási szint kapott) |
| | 2 | | 1,81 | 0,85 | | | |
| | 3 | 8 | 1,98 | 0,99 | 25930 | 4,41 | * |
| | 4 | | 2,01 | 1,01 | 23524 | 4,37 | |
| | 5 | 7 | 2,24 | 1,18 | 68600 | 4,84 | Melegedtek |
| | 6 | | | | 51000 | 4,71 | |
| | 7 | | | | 82068 | 4,91 | |
| | 8 | | | | 70972 | 4,85 | |
| | 9 | 6 | 2,58 | 1,41 | 253520 | 5,40 | |
| | 10 | | 2,63 | 1,44 | 224670 | 5,35 | |
| | 11 | 5 | 3,04 | 1,71 | 800286 | 5,90 | |
| | 12 | | 3,10 | 1,75 | 115968960 | 8,06 | |
| 326 A | 1 | 6 | 1,48 | 0,58 | 87722 | 4,94 | Igen erősen melegedtek |
| | 2 | | | | 80614 | 4,91 | |
| | 11 | | | | 83644 | 4,92 | |
| | 3 | 5 | 1,75 | 0,81 | 337868 | 5,53 | |
| | 4 | | 1,77 | 0,82 | 315692 | 5,50 | |
| | 5 | 4 | 2,13 | 1,10 | 1906700 | 6,28 | |
| | 6 | | | | 3380526 | 6,53 | |
| | 7 | | | | 1961446 | 6,29 | |
| | 8 | | | | 34878820 | 7,54 | |
| | 9 | | | | 4365832 | 6,34 | |
| | 10 | | | | 5049040 | 6,70 | |
| 326 B | 1 | 6 | 1,43 | 0,53 | 64786 | 4,81 | Igen erősen melegedtek |
| | 2 | | | | 86150 | 4,94 | |
| | 3 | | 1,44 | 0,54 | 92226 | 4,06 | |
| | 4 | 5 | 1,69 | 0,76 | 388744 | 5,59 | Melegedtek |
| | 5 | | 1,70 | 0,77 | 436340 | 5,64 | |
| | 6 | 4 | 2,06 | 1,04 | 3362180 | 6,53 | |
| | 7 | | | | 123703250 | 8,09 | |
| | 8 | | | | 2755344 | 6,44 | |
| | 9 | | | | 9188338 | 6,96 | |
| | 10 | | | | 1318670 | 6,12 | |
| | 11 | | | | 1585076 | 6,20 | |

$$\log I = \left(\frac{p_e - p_1}{p_1} \right)^{3/4} \log m + \psi(x-1)$$

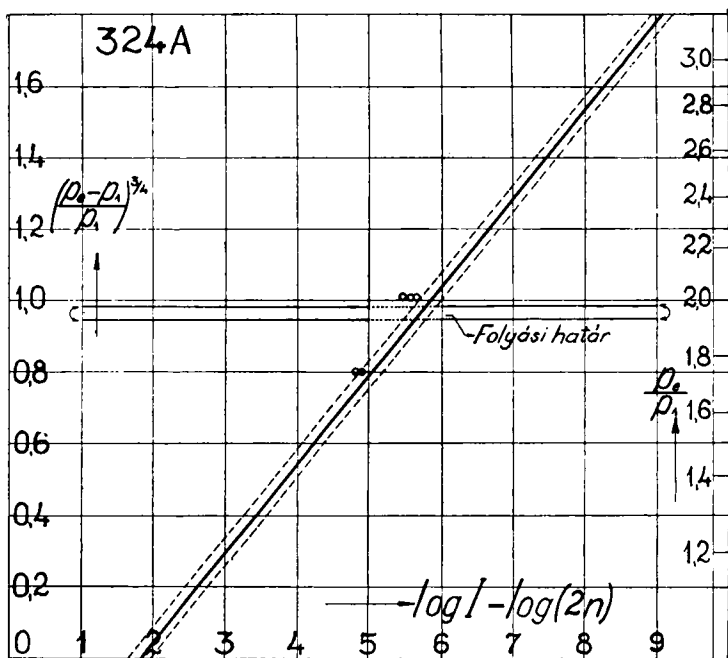
képlet értelmében derékszögű koordináta-rendszer abszcissa-tengelyére vittük fel a fordulatszám (n) kétszeresének ($I = 2n$) logaritmusát, az ordináta-tengelyre pedig a $\left(\frac{p_e - p_1}{p_1} \right)^{3/4}$ értékét. Az



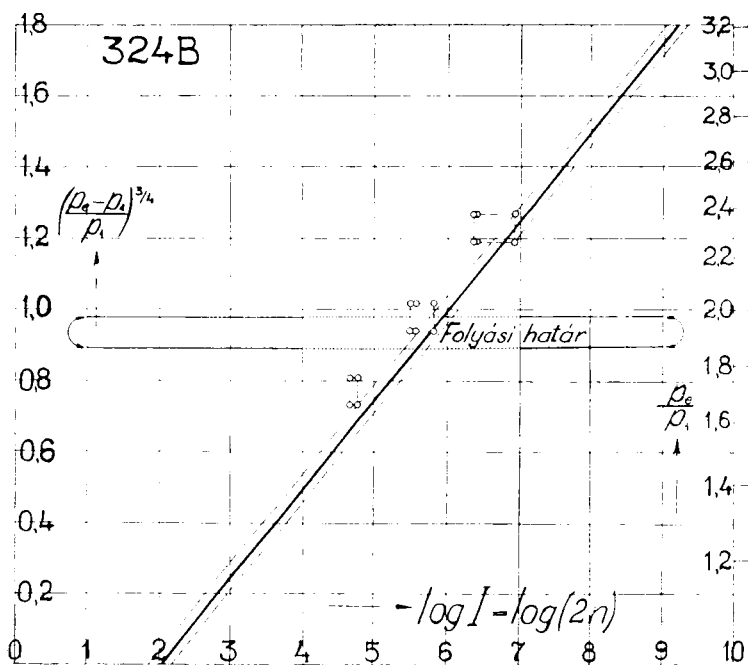
37. ábra. A hajtogatások száma, mely a feszültség, szívósság és képlékenység függvénye.

ezek által meghatározott pontokon át fektetett egyenes hajlásszögének cotangense a $\log m$ értékkel volt egyenlő; ennek az egyenesnek a metszéke pedig a fenti egyenlet szerint a $\psi(x-1)$ értékével egyenlő. (l. 35. ábra.)

Az egyes anyagokra nyert metszékeket logaritmusos koordináta-rendszer abszcissa-tengelyére, az anyagot jellemző $(x-1)$ értékeket pedig az ordinátára vittük fel (l. a 36. ábrát) s ekkor



38. ábra. A hajtogatások száma, mely a feszültség, szívósság és képlékenység függvénye.



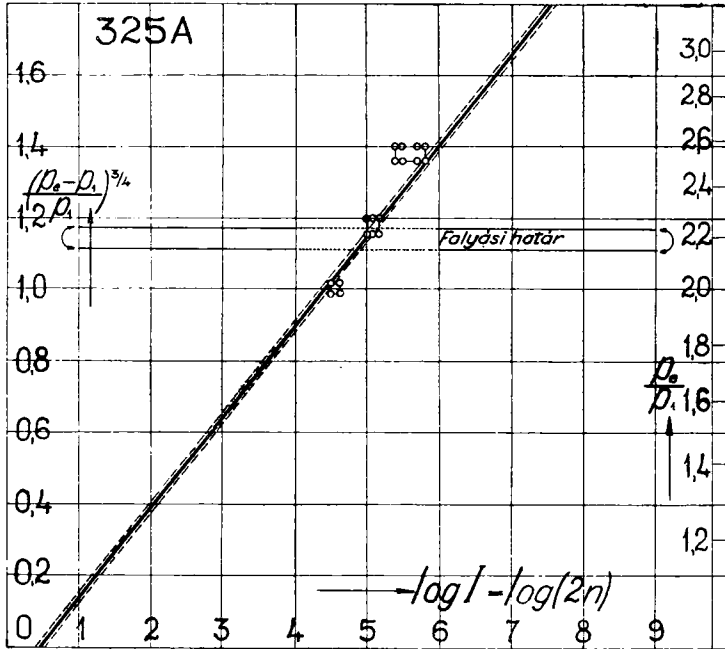
39. ábra. A hajtogatások száma, mely a feszültség, szívósság s képlékenység függvénye.

kitűnt, hogy az ezek által megadott pontok oly egyenesben fekszenek, a melynek egyenlete:

$$\log \psi(x-1) = \log 2 + 2 \log(x-1),$$

ebből:

$$\psi(x-1) = 2(x-1)^2.$$



40. ábra. A hajtogatások száma, mely a feszültség, szívósság s képlékenység függvénye.

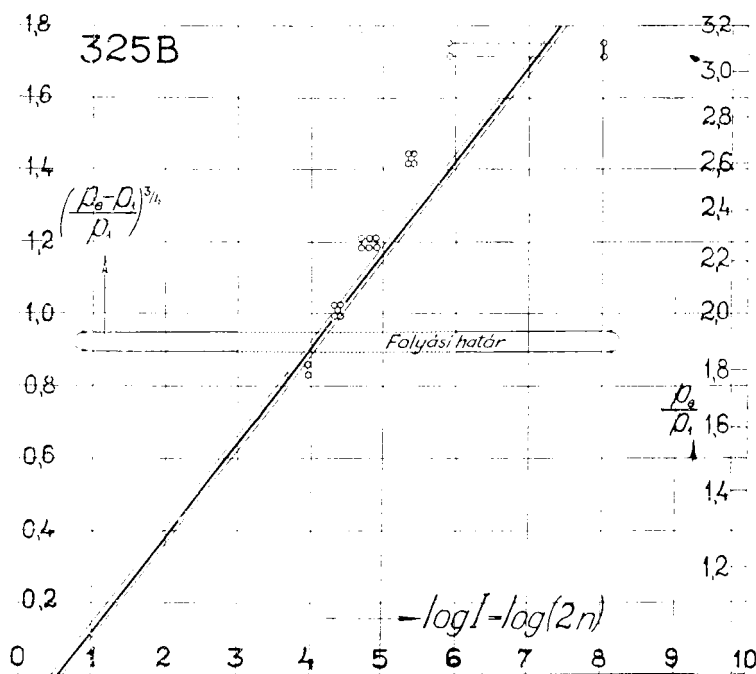
Minthogy a keresett függvényeket már ismerjük, végleges képletünk a következő:

$$J = m \left(\frac{p_e - p_1}{p_1} \right)^{3/4} \cdot 10^{2(x-1)^2}.$$

Hogy meggyőződjem arról, vajjon képletem összhangzatban áll-e a kísérletekkel, hétféle vasanyaggal kísérleteztünk.

A kísérleti adatokból és az anyagok jellemző sajátságai-ból (XIX. táblázat) kiszámítottuk a $\left(\frac{p_e - p_1}{p_1} \right)^{3/4}$ értékeket, ezekre

p_c határértékei miatt minden terhelésnél két értéket kaptunk. Az ezek által meghatározott pontokat a 37–43. ábrán körökkel jeleztük meg. Ezeken az ábrákon meghúztuk azokat az egyeneseket is, amelyek hajlásszöge ε (cotang. $\varepsilon = \log m$), még pedig az abszcissa ama pontjaiból, amelyek a képlékenységi határ-

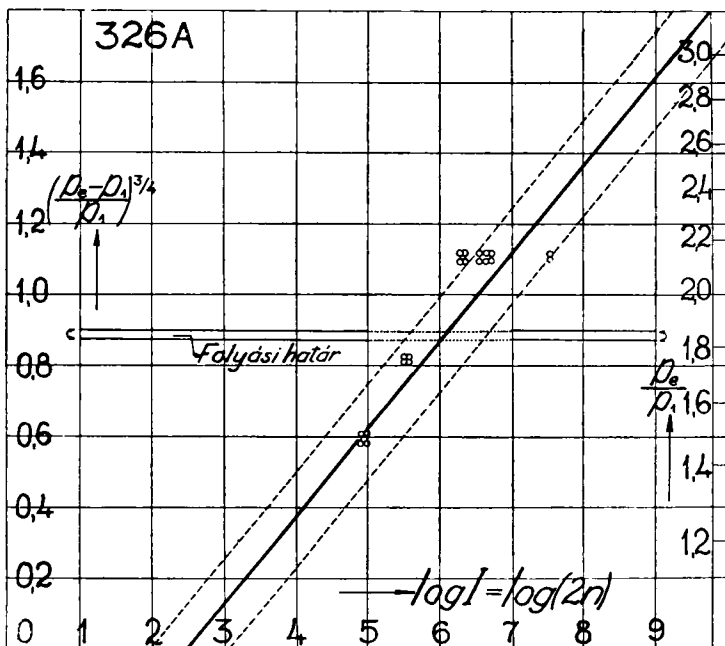


41. ábra. A hajtogatások száma, mely a feszültség-, szívósság- és képlékenységi függvénye.

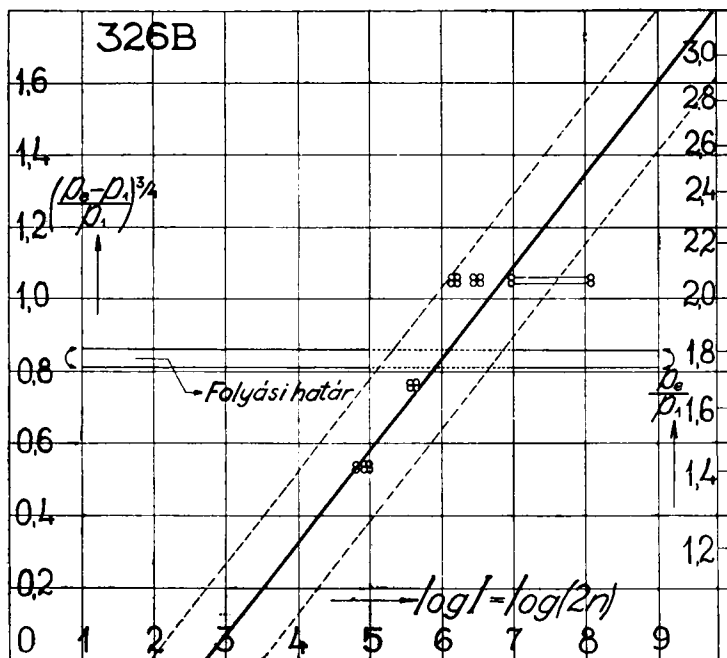
értékei által adódtak. Ezzel a hajtogatások számának várható legkisebb értékét is szemléltetővé tettük.

Mint ahogy a 37–43. ábrán a kísérleti pontok a számítással megadott határértékek törvényszerűségét követik, mondhatjuk, hogy az ismétlődő hajtogatásoknak alávetett tengelyek élettartama azoknak a jellemző tulajdonságoknak a függvénye, a melyeket mi szívósságnak s képlékenységnak nevezünk.

Az ismétlődő igénybevételek fontosságára WÖHLER (1863) hívta fel a technikusok figyelmét. Ámbár ő utána már igen



42. ábra. A hajtogatások száma, mely a feszültség, szívósság és képlékenység függvénye.



43. ábra. A hajtogatások száma, mely a feszültség, szívósság és képlékenység függvénye.

sokan foglalkoztak e kérdéssel s e célra igen különböző gépeket is szerkesztettek, ezt a feladatot megoldani mégsem tudták. A legtöbb kísérletező negatív eredményről számol be, t. i. arról, hogy a törést létesítő ismétlések száma a rugalmassági határral, avagy a szakító szilárdsággal nincsen összhangban; az 1912. évi new-yorki kongresszus nyújt ugyan némi pozitív eredményt, a mennyiben Roos af HJELMSÄTER (Stockholm) kimutatta, hogy az ismétlések a tényleges feszültségekkel, KOMMERS pedig, hogy azok a kihajlásokkal valamelyes hyperbolaszerű összefüggésben állanak, de az anyagok sajátságaival való összefüggésüket ők sem tudták kimutatni.

Mennyivel egyszerűbb a helyzetünk, ha az anyag belső szerkezetének alakját s belső életének törvényeit ismerjük! Ezeknek ismeretével kimutathattuk, hogy a tengelyek élettartama a feszültségek viszonyán kívül a szívósságtól és képlékenységtől függ s így módunkban áll adott célra a legkedvezőbb anyagot kiválasztani, megakadályozhatjuk az anyagpazarlást s fokozhatjuk az élet- s vagyónbiztonságot.

A DIÓSGYŐRI KÁLCZITRÓL.

FRANZENAU ÁGOST I. tagtól.

(Egy táblával.

Diósgyőrön a vártól nem mesze, valamint az oda szintén közelfekvő «Fényeskő» nevű erdőkincstári kőbányában igen tömör, szürkés vagy fehéres, csakis stratigrafiai viszonyok alapján juraidőszakinak meghatározott mészkövet fejtenek, melyet építőkönek vagy törecsnek felaprózva, utak burkolására alkalmaznak.

A mészkő tömege nem mindenütt egynemű, helyenként repedések vonulnak keresztül rajta, melyeknek falait kristályodott mész borítja.

A kristályok többnyire sűrűn és majdnem párhuzamos helyzetben egymás mellett váltak ki, úgy hogy csak végeik szabadok. Ritkább azon eset, a mikor egyik felük teljesen ki van fejlődve.

Az egyik darabon a kristályokra még egy fiatalabb, határozott alak nélküli szénsavas mészgeneráció rakódott le.

A megvizsgált kristályokat azon körülbelül nyolczvan kisebb-nagyobb darabról fejtettem le és néhány szabad kristály közül választottam ki, melyeket BUDAI JÓZSEF úr, a miskolci ev. ref. gymnasium tanára bocsátott rendelkezésemre, ki egyszersmind a lelőhelyeket és a mészkőnek mikénti felhasználását is tudatta velem.

Szivességeért, mely lehetővé tette ezen *hazánkra új kalczit-előfordulást* ismertetnem, fogadja hálás köszönetemet.

A kristályok közül a kisebbek víztiszták, a nagyobbak erősebben vagy gyengébben sárgásak és szürkések. A legnagyobb egy kristálynak felét kitevő rész 13 mm hosszú.

A kristályokon a következő 12, a kalcziton már ismert alakot határoztam meg:

| | | |
|----------------------|----------------|-----------------|
| $\{71\bar{8}9\}$ | ∞R^4_3 | $\{52\bar{3}\}$ |
| $\{40\bar{4}1\}$ | $+ 4R$ | $\{11\bar{3}\}$ |
| $\{10\bar{1}1\}$ | $+ R$ | $\{100\}$ |
| $\{02\bar{2}1\}$ | $2R$ | $\{11\bar{1}\}$ |
| $\{05\bar{5}1\}$ | $5R$ | $\{22\bar{3}\}$ |
| $\{08\bar{8}1\}$ | $8R$ | $\{33\bar{5}\}$ |
| $\{21\bar{3}1\}$ | $+ R_3$ | $\{20\bar{1}\}$ |
| $\{53\bar{8}2\}$ | $+ R_4$ | $\{50\bar{3}\}$ |
| $\{16\bar{7}4\}$ | $-^5_4 R^7_5$ | $\{43\bar{3}\}$ |
| $\{18\bar{9}5\}$ | $-^7_5 R^9_7$ | $\{54\bar{4}\}$ |
| $\{13\bar{4}1\}$ | $2R_2$ | $\{21\bar{2}\}$ |
| $\{4.7.\bar{1}1.3\}$ | R^{11}_3 | $\{62\bar{5}\}$ |

Egy eset kivételével, a midőn a kristály habitusát a $\{08\bar{8}1\}$ meghatározza, melylyel a $\{02\bar{2}1\}$ és alárendelt nagyságú lapokkal a $\{40\bar{4}1\}$ van kombinálva, a többi kristályon a kombinációt a $\{02\bar{2}1\}$ alak szabja meg.

Az utóbbiak mindegyikén előfordulnak változó nagyságú lapokkal a $\{08\bar{8}1\}$, $\{53\bar{8}2\}$ és az $\{13\bar{4}1\}$; legtöbbször a $\{21\bar{3}1\}$ és az $\{10\bar{1}1\}$, két kristályon kicsi lapokkal a $\{40\bar{4}1\}$, míg a többi forma csak egy-egy egyéni keskeny csikformájú lapokkal van kifejlődve.

Az egyes alakok lapjainak minőségéről a következőket jegyezhetem meg.

Kitünően tündökölnék és simák a $\{08\bar{8}1\}$ és $\{40\bar{4}1\}$ -nek lapjai.

Simák és többnyire fényesek, olykor azonban fátyolozott fényűek a $\{02\bar{2}1\}$ alaknak lapjai. De akár fényesek, akár bágyadtfényűek, reflektáló képességük kitünő. Csak kétizben tapasztaltam, hogy a lap fényét hullámos, nagyjából vízszintes irányú rostok befolyásolják.

Erősen fényesek az $\{13\bar{4}1\}$ alakhoz tartozó lapok, de ritkán simák. A felületükön ugyanis szabálytalan görbe vonalakkal határolt részek a síkból kiemelkednek.

Többnyire együtt és azonos kifejlődésű lapokkal találhatók a $\{21\bar{3}1\}$ és $\{5382\}$ skalenoéderek. Lapjaik, ha fényesek, a mi ugyan ritkaságszámba megy, az $[10\bar{1}1 : 21\bar{3}1]$ övnek tengelyével párhuzamos irányban rostosak. Ezen sajátság mutatkozik még a bágyadt felületű lapokon is, a milyenek gyakrabban találhatók. Legtöbb idetartozó lapnak a felülete azonban meg van marva. Ez esetben a lapok felületén kicsi, legömbölyödött csúcsú kúpok láthatók, melyeknek szabad végei a skalenoéder tompább sarkéle felé hajlottak.

Az egy ízben talált $\{05\bar{5}1\}$ -nek kicsi lapja vízszintesen rostos.

Az $\{10\bar{1}1\}$ -hez tartozó keskeny lapok többé-kevésbbé érdesek.

A többi négy formának lapjai keskeny csikalakúak, de míg a $\{71\bar{8}0\}$ és $\{4.7.\bar{1}\bar{1}.3\}$ erősen csillogók, addig a $[02\bar{2}1 : 10\bar{1}1]$ övben fekvők, az $\{16\bar{7}4\}$ és $\{18\bar{9}5\}$ csak gyengén reflektálnak.

Az alakok megállapítására szolgáló mért szögértékek mellett közlött számítottak az általában elfogadott, MALUSTól meghatározott $(0001) : (10\bar{1}1) = 44^\circ 36' 34''$ alapértékre vonatkoznak.

A vizsgált kristályok ismertetése.

1. kristály.

(XIV. tábla, 1. ábra.)

Világos sárgás színű, a főtengely irányában 8 mm hosszú töredék.

A meghatározott formák fogyó nagyságban, rajtuk a

| | |
|------------------|------------------|
| $\{02\bar{2}1\}$ | — $2R$ |
| $\{1341\}$ | — $2R2$ |
| $\{0881\}$ | — $8R$ |
| $\{21\bar{3}1\}$ | + $R3$ |
| $\{5382\}$ | + $R4$ |
| $\{10\bar{1}1\}$ | + R |
| $\{18\bar{9}5\}$ | — ${}^7_5 R^9_7$ |
| $\{16\bar{7}4\}$ | — ${}^5_4 R^7_5$ |

Ezen kristályon vízszintesen rostos a $\{02\bar{2}1\}$ alakhoz tartozó egyik lap.

A formák megállapítására szolgáló szöghajlások ezek:

| Szögjelzések | Mérés | Számítás |
|-------------------------------------|----------|----------|
| (02 $\bar{2}$ 1) : (2 $\bar{2}$ 01) | 101° 14' | 101° 9' |
| : (10 $\bar{1}$ 1) | 50° 37' | 50° 35' |
| : (08 $\bar{8}$ 1) | 19° 36' | 19° 39' |
| : (16 $\bar{7}$ 4) | 7° 56' | 8° 12' |
| : (18 $\bar{9}$ 5) | 6° 4' | 6° 21' |
| : (13 $\bar{4}$ 1) | 16° 51' | 17° 5' |
| (21 $\bar{3}$ 1) : (3 $\bar{1}$ 21) | 35° 48' | 35° 36' |
| : (13 $\bar{4}$ 1) | 26° 1' | 26° 7' |
| (53 $\bar{8}$ 2) : (8 $\bar{3}$ 52) | 42° 19' | 41° 46' |
| : (13 $\bar{4}$ 1) | 23° 13' | 23° 2' |
| (13 $\bar{4}$ 1) : (1 $\bar{4}$ 31) | 26° 46' | 26° 44' |

2. kristály.

(XIV. tábla, 2. ábra.)

Világossárga kristálynak a főtengely irányában 6 mm hosszú csúcsrésze, melyen az alakok fogyó nagyságban a

| | |
|------------------|------|
| {02 $\bar{2}$ 1} | —2R |
| {13 $\bar{4}$ 1} | —2R2 |
| {08 $\bar{8}$ 1} | —8R |
| {53 $\bar{8}$ 2} | + R4 |
| {10 $\bar{1}$ 1} | + R |
| {05 $\bar{5}$ 1} | —5R |

A {02 $\bar{2}$ 1}, {13 $\bar{4}$ 1} és {08 $\bar{8}$ 1} formákhoz tartozó lapok kivételével, melyek igen fényesek, a többi mind fátyolozott fényű.

Az alakok meghatározása a következő szöghajlások alapján történt:

| Szögjelzések | Mérés | Számítás |
|-------------------------------------|---------|----------|
| (10 $\bar{1}$ 1) : (02 $\bar{2}$ 1) | 50° 32' | 50° 35' |
| (02 $\bar{2}$ 1) : (2 $\bar{2}$ 01) | 101° 5' | 101° 9' |
| : (08 $\bar{8}$ 1) | 19° 49' | 19° 39' |
| : (13 $\bar{4}$ 1) | 17° 10' | 17° 5' |
| (05 $\bar{5}$ 1) : (08 $\bar{8}$ 1) | 4° 5' | 4° 14' |
| (53 $\bar{8}$ 2) : (8 $\bar{3}$ 52) | 41° 29' | 41° 46' |
| (13 $\bar{4}$ 1) : (1 $\bar{4}$ 31) | 27° 6' | 26° 44' |

3. kristály.

A főtengety irányában 9 mm hosszú, világossárga kristályvég. Fogó nagyságban az előforduló alakok:

| | |
|------------------|--------|
| $\{02\bar{2}1\}$ | $-2R$ |
| $\{08\bar{8}1\}$ | $-8R$ |
| $\{13\bar{4}1\}$ | $-2R2$ |
| $\{53\bar{8}2\}$ | $+ R4$ |
| $\{21\bar{3}1\}$ | $+ R3$ |
| $\{10\bar{1}1\}$ | $+ R$ |

A $\{21\bar{3}1\}$ alakhoz tartozó lapok alig tükröznek. Ezen tulajdonságuknak tudható be, hogy a róluk nyert mérések adatai a számított értékektől lényeges eltérést mutatnak. A többi alak lapjai elég jól reflektálnak. A $\{02\bar{2}1\}$ -nek csúcsélei fűrészformájában erősen meg vannak marva.

A formák meghatározásakor az alábbi értékek voltak irányadók:

| Szögjelzések | Mérés | Számítás |
|-------------------------------------|------------------|------------------|
| $(10\bar{1}1) : (02\bar{2}1)$ | $50^{\circ}35'$ | $50^{\circ}35'$ |
| $(02\bar{2}1) : (2\bar{2}01)$ | $101^{\circ} 5'$ | $101^{\circ} 9'$ |
| $: (08\bar{8}1)$ | $19^{\circ}35'$ | $19^{\circ}39'$ |
| $: (13\bar{4}1)$ | $17^{\circ} 1'$ | $17^{\circ} 5'$ |
| $(08\bar{8}1) : (13\bar{4}1)$ | $16^{\circ}18'$ | $16^{\circ} 2'$ |
| $(21\bar{3}1) : (3\bar{1}\bar{2}1)$ | $36^{\circ}57'$ | $35^{\circ}36'$ |
| $: (13\bar{4}1)$ | $25^{\circ}27'$ | $26^{\circ} 7'$ |
| $: (53\bar{8}2)$ | $5^{\circ}36'$ | $5^{\circ}26'$ |
| $(53\bar{8}2) : (13\bar{4}1)$ | $23^{\circ}22'$ | $23^{\circ} 2'$ |
| $(13\bar{4}1) : (14\bar{3}1)$ | $26^{\circ}49'$ | $26^{\circ}44'$ |

4. kristály.

Majdnem víztiszta, csak igen kevésbé sárgás színbe hajló. A főtengety irányában közel 10 mm hosszú kristályvég. Fogó nagyságban a kombinációt alkotó formák:

| | |
|------------------|--------|
| $\{02\bar{2}1\}$ | $-2R$ |
| $\{08\bar{8}1\}$ | $-8R$ |
| $\{13\bar{4}1\}$ | $-2R2$ |
| $\{53\bar{8}2\}$ | $+ R4$ |
| $\{21\bar{3}1\}$ | $+ R3$ |
| $\{10\bar{1}1\}$ | $+ R$ |

A $\{02\bar{2}1\}$ és $\{08\bar{8}1\}$ alakok lapjai erős, a többiek mind kissé bágyadt fényűek.

Az alábbi szögadatok alapján történt az alakok meghatározása:

| Szögjelzések | Mérés | Számítás |
|-------------------------------|-----------------|-----------------|
| $(10\bar{1}1) : (02\bar{2}1)$ | $50^\circ 33'$ | $50^\circ 35'$ |
| $(02\bar{2}1) : (8\bar{8}01)$ | $112^\circ 40'$ | $112^\circ 41'$ |
| $: (53\bar{8}2)$ | $76^\circ 23'$ | $75^\circ 38'$ |
| $(21\bar{3}1) : (13\bar{4}1)$ | $25^\circ 44'$ | $26^\circ 7'$ |
| $(13\bar{4}1) : (3\bar{1}41)$ | $135^\circ 29'$ | $135^\circ 18'$ |

5. kristály.

Szürkés színű. A vizsgált kristályok között a legnagyobb, mert a nélkül, hogy valami látszanék az alsó végéből, a főtengely irányában 12 mm hosszú.

Fogyó nagyságban az alábbi formák szerepelnek rajta:

| | |
|------------------|--------|
| $\{02\bar{2}1\}$ | $-2R$ |
| $\{13\bar{4}1\}$ | $-2R2$ |
| $\{08\bar{8}1\}$ | $-8R$ |
| $\{10\bar{1}1\}$ | $+ R$ |

és nagyobb lapokkal a $\{21\bar{3}1\}$ skalenoéder. Utóbbinak valamennyi lapja a bevezetésben, az ezen alak lapjainak ismertetésekor említett kis gömbölyödött csúcsú kúpokat hordja a felületen, a mi szög-meghatározásokra teljesen alkalmatlanná teszi őket.

A $\{02\bar{2}1\}$ rhomboéder lapjai igen fényesek, kevésbé az $\{13\bar{4}1\}$ skalenoéderei és a $\{08\bar{8}1\}$ rhomboéderei. A keskeny csik-formájú lapokkal kialakult $\{10\bar{1}1\}$ alaprhomboéder lapjai bágyadt fényűek.

Következő szöghajlásokból állapítottak meg a kombinációt összetevő formák:

| Szögjelzések | Mérés | Számítás |
|-------------------------------------|------------------|------------------|
| $(02\bar{2}1) : (2\bar{2}01)$ | $101^{\circ}10'$ | $101^{\circ}9'$ |
| $: (13\bar{4}1)$ | $16^{\circ}54'$ | $17^{\circ}5'$ |
| $: (0\bar{1}11)$ | $107^{\circ}45'$ | $107^{\circ}44'$ |
| $: (08\bar{8}1)$ | $19^{\circ}37'$ | $19^{\circ}39'$ |
| $(13\bar{4}1) : (\bar{1}4\bar{3}1)$ | $26^{\circ}51'$ | $26^{\circ}44'$ |
| $(08\bar{8}1) : (13\bar{4}1)$ | $16^{\circ}10'$ | $16^{\circ}2'$ |

6. kristály.

(XIV. tábla, 3. ábra.)

Ez azon egyén, mely, mint a bevezetésben felsoroltam, természetére egészen egyedül álló a többi között. Víziszta, átlátszó. A főtengely irányában csak 2 mm hosszú. A vizsgált kristályok között a legegyszerűbb, mert csak három alakot hord, ezek fogó nagyságban a

$$\begin{array}{ll} \{08\bar{8}1\} & -8R \\ \{02\bar{2}1\} & -2R \\ \{40\bar{4}1\} & +4R \end{array}$$

A $\{08\bar{8}1\}$ alaknak lapjai jól tündöklenek, igen jól a $\{02\bar{2}1\}$ -hez tartozók; a $\{40\bar{4}1\}$ -nek síkjai kicsinységüknél fogva nem érvényesültek kellőképen.

Megállapításukra szolgáló szögértékekként említhetem az alábbiakat:

| Szögjelzések | Mérés | Számítás |
|-------------------------------------|------------------|------------------|
| $(02\bar{2}1) : (2\bar{2}01)$ | $101^{\circ}6'$ | $101^{\circ}9'$ |
| $: (08\bar{8}1)$ | $19^{\circ}40'$ | $19^{\circ}39'$ |
| $: (0\bar{4}41)$ | $139^{\circ}10'$ | $138^{\circ}54'$ |
| $(08\bar{8}1) : (04\bar{4}\bar{1})$ | $21^{\circ}7'$ | $21^{\circ}27'$ |
| $: (\bar{8}80\bar{1})$ | $61^{\circ}33'$ | $61^{\circ}33'$ |

7. *Kristály.*

(XIV. tábla, 4. ábra.)

Halványszürkés színű. Legnagyobb dimenziója irányában 5 mm hosszú töredék, egy kristálynak középső részéből.

A rajta megállapított formák fogyó nagyság szerint ezek:

| | |
|----------------------------|------------------|
| $\{02\bar{2}1\}$ | $-2R$ |
| $\{21\bar{3}1\}$ | $+R3$ |
| $\{08\bar{8}1\}$ | $-8R$ |
| $\{13\bar{4}1\}$ | $-2R2$ |
| $\{53\bar{8}2\}$ | $+R4$ |
| $\{71\bar{8}0\}$ | $\infty R^{4/3}$ |
| $\{40\bar{4}1\}$ | $+4R$ |
| $\{4.7.\bar{1}\bar{1}.3\}$ | $-R^{11/3}$ |

Legfényesebb lapú forma a $\{08\bar{8}1\}$, igen fényesek az $\{13\bar{4}1\}$ lapjai. A $\{02\bar{2}1\}$ -nek lapjai jóságát befolyásolják az azokon előforvizzintes irányú rostok. Bágyadt fényük daczára elég tiszta reflexet adnak a $\{21\bar{3}1\}$ és $\{53\bar{8}2\}$ -nek lapjai. A többi alak lapjainak kicsinysége a reflektáló képességükre gátlólag hat.

A kombinációt alkotó formák a következő mért adatokból határozottak meg.

| Szögjelzések | Mérés | Számítás |
|---|------------------|------------------|
| $(02\bar{2}1) : (2\bar{2}01)$ | $101^{\circ} 1'$ | $101^{\circ} 9'$ |
| $: (13\bar{4}1)$ | $16^{\circ} 52'$ | $17^{\circ} 5'$ |
| $: (880\bar{1})$ | $67^{\circ} 14'$ | $67^{\circ} 19'$ |
| $: (08\bar{8}1)$ | $19^{\circ} 39'$ | $19^{\circ} 39'$ |
| $: (4.7.\bar{1}\bar{1}.3)$ | $21^{\circ} 35'$ | $21^{\circ} 35'$ |
| $(13\bar{4}1) : (\bar{1}4\bar{3}1)$ | $26^{\circ} 37'$ | $26^{\circ} 44'$ |
| $: (4\bar{3}\bar{1}1)$ | $87^{\circ} 51'$ | $87^{\circ} 51'$ |
| $: (31\bar{4}\bar{1})$ | $44^{\circ} 45'$ | $44^{\circ} 41'$ |
| $: (4.7.\bar{1}\bar{1}.3)$ | $7^{\circ} 9'$ | $7^{\circ} 5'$ |
| $(08\bar{8}1) : (0\bar{1}\bar{4}\bar{1})$ | $21^{\circ} 22'$ | $21^{\circ} 27'$ |
| $(80\bar{8}\bar{1}) : (4.7.\bar{1}\bar{1}.3)$ | $45^{\circ} 39'$ | $45^{\circ} 46'$ |
| $(21\bar{3}1) : (3\bar{1}\bar{2}1)$ | $35^{\circ} 37'$ | $35^{\circ} 36'$ |
| $: (13\bar{4}1)$ | $26^{\circ} 2'$ | $26^{\circ} 7'$ |
| $: (4.7.\bar{1}\bar{1}.3)$ | $18^{\circ} 51'$ | $19^{\circ} 2'$ |

8 kristály.

(XIV. tábla, 5. ábra.)

Viztiszta, a főtengely irányában kevés híján 4 mm hosszú kristálytöredék.

A rajta tapasztalt formák fogyó nagyság szerint ezek:

| | |
|------------------|--------|
| $\{02\bar{2}1\}$ | $-2R$ |
| $\{08\bar{8}1\}$ | $-8R$ |
| $\{53\bar{8}2\}$ | $+ R4$ |
| $\{21\bar{3}1\}$ | $+ R3$ |
| $\{10\bar{1}1\}$ | $+ R$ |
| $\{13\bar{4}1\}$ | $-2R2$ |

A $\{02\bar{2}1\}$ alaknak lapjai legjobban tündöklének, a $\{08\bar{8}1\}$ -hez tartozókéi már kevésbé fényesek. A további négy alak reflexei igen gyengék.

A kombinációt alkotó formák az alábbi mért szöghajlásokból határozottak meg:

| Szögjelzések | Mérés | Számítás |
|-------------------------------------|-----------------|-----------------|
| $(02\bar{2}1) : (10\bar{1}1)$ | $50^{\circ}33'$ | $50^{\circ}35'$ |
| $: (2\bar{2}01)$ | $101^{\circ}8'$ | $101^{\circ}9'$ |
| $: (13\bar{4}1)$ | $17^{\circ}6'$ | $17^{\circ}5'$ |
| $(10\bar{1}1) : (\bar{1}101)$ | $75^{\circ}14'$ | $74^{\circ}55'$ |
| $: (21\bar{3}1)$ | $29^{\circ}17'$ | $29^{\circ}2'$ |
| $(53\bar{8}2) : (10\bar{1}1)$ | $34^{\circ}39'$ | $34^{\circ}28'$ |
| $(21\bar{3}1) : (3\bar{1}\bar{2}1)$ | $35^{\circ}38'$ | $35^{\circ}36'$ |
| $(53\bar{8}2) : (8\bar{3}\bar{5}2)$ | $41^{\circ}58'$ | $41^{\circ}46'$ |
| $(13\bar{4}1) : (4\bar{3}\bar{1}1)$ | $87^{\circ}46'$ | $87^{\circ}51'$ |
| $(02\bar{2}1) : (08\bar{8}1)$ | $19^{\circ}44'$ | $19^{\circ}39'$ |
| $: (53\bar{8}2)$ | $37^{\circ}2'$ | $36^{\circ}58'$ |

★

Szögméréseimet a budapesti tudomány-egyetem ásvány-kőzettani intézetében dr. KRENNER JÓZSEF egyetemi tanár úr engedélyével végeztem, kinek szívességeért hálás köszönetet mondok.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 febr. 16.-án tartott üléséből.)

ADAT AZ IZOMTONUS ISMERETÉHEZ.

TANGL FERENCZ r. tagtól.

(Kivonatos közlemény.)

PFLÜGER¹ egyik híres dolgozatában, mely 1878-ban jelent meg, házinyulakon végzett kísérletek alapján, kimondotta, hogy a nyugvó állat oxygenfogyasztása 35·2%-kal a CO_2 kiválasztása pedig 37·4%-kal csökken akkor, ha kurarával megmérgezzük. Ezzel megerősítést nyert a ZUNTZ és RÖHRIG² által már 1871-ben kifejezett azon nézet, hogy a nyugvó izomban reflex úton az idegrendszer befolyása alatt az oxydatiós folyamatok valószínűleg a mozgató idegek tartós ingerülete által fokoztatnak. Ezen tartós ingerület az izmokban rángás vagy tetanus kiváltása nélkül a tartós megfeszülés bizonyos fokát váltaná ki, tehát *tonust*, mely fokozott anyagcsere árán tartatik fenn. Chemiai reflex-tonusnak is nevezték. A kurarával bénítatnak a mozgató idegek végkészülékei, a mi által a tonus megszűnik; a jelentékeny hiány, mely a kurarázás után a nyulak gázcseréjében mutatkozik, azt bizonyítaná, hogy házinyulakban elég nagy fokú tonus van, mely az állat egész oxygenszükségletének s így mondhatjuk energiaszükségletének ¹/₃ részét teszi ki.

Ezzel szemben FRANK O. és VOIT F.³ 1901-ben kutyákon végzett kísérleteikben azt találták, hogy a kurarázott és a nyugodtan fekvő állat CO_2 kiválasztása között semmi különbség sincs, vagyis a mozgató idegek bénítása egyáltalában nem vál-

¹ Arch. f. d. gesamte Physiologie. 18. k. 247. old.

² Ibid. 4. köt. 57. old.

³ Zeitschr. f. Biologie. 42. köt. 309. old.

toztatja meg a nyugvó állat gázcseréjét. Ebből tovább az következik, hogy a nyugvó kutya izmai nincsenek olyan tonusban, mint a házinyuléi.

Az ember az izmait akaratosan egészen elpetyhítheti s alvás közben maguktól petyhülnek el az izmok, a mikor az öntudat megszűntével az akaratos beidegzés megszűnik. Az alvó s nyugvó ember gázcseréje között alig van különbség, mint azt LOEWY A. kísérletei mutatják, a ki be is bizonyította, hogy az emberen sem mutatható ki chemiai reflextonus.

Ezen eltérő kísérleti adatok birtak arra, hogy kutyákon és házinyulakon ugyanazon methodikával s egyenlő kísérleti feltételek mellett megvizsgáljam, vajjon valóban megvan-e köztük az izomtonust illetőleg azon nagy különbség, a melyre PFLÜGER kísérletei, meg FRANK és VOIT kísérletei látszólag utalnak.

A kutyákkal a kísérletek aránylag könnyebben voltak keresztülvihetők. Minden kutyát először megtanítottunk órákon át nyugodtan feküdni s a tracheájába erősített kanülön és a gázcserekísérletekhez használt szelepeken át a gázórába lehelni. Erre a célra a tracheába TRENDLENBURG-féle kanült kötöttünk, melyet ezen előkészítő kísérletek után mindig kivettünk a tracheából. Miután a kutya többször ezen előkészítő kísérletekben nyugodtan feküdt, takaróval letakarva, megkezdtük a gázcserekísérleteket, melyek csak annyiban különböztek az előkészítőktől, hogy a gázórán keresztül ment levegőt mértük s ennek két pontosan lemért próbáját megelemeztük, úgy mint azt a ZUNTZ-GEPPERT-féle eljárás megköveteli. Egy-egy kísérlet 10—15 perczig tartott; egymásután 2—4 kísérletet végeztünk. Ezután kurarát feeskendeztünk a vena jugularisba, 1%-os oldatból annyit, míg a teljes bénulás bekövetkezett. Minthogy ilyenkor a lélegző mozgások is megszűnnek, mesterséges lélegzést indítottunk meg a MEYER H. H.-féle szivattyúval, mely gázcserekísérletekre kitűnően alkalmas. A kurarázott állatot azonnal thermostatba fektettük a lehülés elleni megvédés céljából; a gázcserekísérletek alatt is ebben voltak. A kurarázás után is több gázcserekísérletet végeztünk egymásután.

Később meggyőződünk arról, hogy a legtöbb kutya a tracheájába kötött közönséges kanüllel mindjárt az első alkalom-

mal is teljesen nyugodtan fekszik, úgy hogy 1—2 órával a kanül bekötése után megkezdhattuk a gázcsere-kísérleteket.

A házinyulakkal sokkal nehezebb volt a kísérletezés. Több-féle próbálgatás után arra jutottunk, hogy a nyulak, melyeknek légsövébe üvegkanült helyeztünk s ezt úgy, mint a kutyákon, szelepeken át gummicsovok segítségével a gázórával kötöttük össze, úgy tarthatók legtovább s legcsendesebben a természetes ülő helyzetben, ha kis ládába tettük. Ennek egyik oldalához támaszkodva hosszú időn át mozdulatlanul ülnek, különösen ha ruhával letakarjuk. Voltak azonban olyan nyulak is, melyek egyáltalában nem akartak csendesen maradni, úgy hogy e miatt a kísérletek nem is adtak oly egyöntetű eredményeket, mint a kutyákon végeztek.

Gondosan ügyeltünk valamennyi kísérletben arra, hogy az állatok testhőmérséklete lehetőleg állandó maradjon, a mit a végbélbe helyezett hőmérővel ellenőriztünk.

A gázcserekísérletekben, melyeknek methodikája különben teljesen megegyezik a vesemunka meghatározásakor használttal,¹ megtudtuk ilyen módon az O_2 -fogyasztás és a CO_2 -termelés nagyságát a kurarázás előtt és a kurarázás után. Azzal, hogy a kurarázás előtt is több kísérletet végeztünk, meggyőződhattunk arról, hogy egyenletes volt-e a gázcsere s azonkívül egyik kísérlet ellenőrizte a másikat. A kuraramérgezés előtti kísérletekből azután középértékeket számítottam ki, a melyekhez a mérgezés utáni kísérletek eredményeit viszonyítottam úgy, hogy ezekből is középértéket számítottam.

A következő táblázatban ezen középértékek vannak összeállítva, míg az egyes kísérletek részletes adatainak közlését e helyen mellőzöm. Megjegyzem különben, hogy egy-egy állaton az egyes kísérletek adatai egymástól csak a rendes kísérleti hibák határain belül tértek el, és hogy a táblázatokban szereplő értékek jól megegyező kísérletek középértékei.

¹ L. Math. és Természettud. Ért. 1911. évfolyam.

| A kísérleti állat száma | A kuraramérgezés előtt | | | | A kuraramérgezés után | | | A kuraramérgezés okozta változás | | |
|-----------------------------|------------------------|----------------------------------|------------------------------------|--------------------|----------------------------------|------------------------------------|--------------------|----------------------------------|--------------------|--|
| | Test-súly | O_2 fogyasztás 1 perc alatt | CO_2 kiválasztás 1 perc alatt | $\frac{CO_2}{O_2}$ | O_2 fogyasztás 1 perc alatt | CO_2 kiválasztás 1 perc alatt | $\frac{CO_2}{O_2}$ | O_2 fogyasztás | CO_2 kiválasztás | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| gr. | cm ³ | | | cm ³ | | | % | | | |
| A) Kísérletek kutyákon | | | | | | | | | | |
| 1. | 5600 | 57.3 | 42.2 | 0.737 | 59.5 | 43.9 | 0.737 | + 3.9 | + 4.0 | |
| 2. | 6100 | 54.4 | 43.0 | 0.790 | 53.3 | 43.4 | 0.819 | — 2.7 | + 0.9 | |
| 3. | 5600 | 61.5 | 49.7 | 0.809 | 61.9 | 51.8 | 0.836 | + 0.7 | + 4.2 | |
| B) Kísérletek házi nyulakon | | | | | | | | | | |
| 1. | 3100 | 30.5 | 22.6 | 0.739 | 29.7 | 21.1 | 0.712 | — 2.5 | — 6.6 | |
| 2. | 2000 | 20.0 | 13.3 | 0.661 | 20.5 | 14.2 | 0.694 | + 2.5 | + 6.8 | |
| 3. | 2900 | 28.7 | 17.6 | 0.613 | 26.3 | 18.0 | 0.684 | — 8.4 | + 2.3 | |
| 4. | 1700 | 15.8 | 12.3 | 0.778 | 12.3 | 11.7 | 0.951 | —22.1 | — 4.9 | |
| 5. | 2700 | 32.2 | 21.3 | 0.661 | 22.3 | 17.1 | 0.767 | —30.7 | —19.7 | |
| 6. | 1400 | 13.9 | 9.6 | 0.688 | 9.5 | 7.2 | 0.758 | —31.6 | —25.0 | |

A kutyakísérletek mindenekelőtt megerősítik FRANK és VOIT adatait, a mennyiben kétségtelenné teszik, hogy a kurarával megmérgezett állatnak gázcsereje nem kisebb, mint a nyugodtan fekvő állaté. A mozgató idegek végkészülékének bénítása tehát sem az O_2 fogyasztást, sem a CO_2 kiválasztást nem csökkenti. Kísérleteim is ennél fogva azt bizonyítják, hogy a kutyában nincs chemiai reflextonus. Azok a változások, melyek a kurarázás után mutatkoznak, még a kísérleti hibák határain belül esnek.

A házi nyulakon az eredmények nem oly egyszerűek. Mint már említettem, rendkívül bajos az állatokat a kurarázás előtt olyan teljes nyugalomban tartani, mint a kutyákat. Még a nyugodtan ülők is hol a fejüket, hol a fülüket mozgatják. Minthogy az izommozgások igen nagy mértékben növelik a gázcserét, ezen kisebb-szerű mozgások is már észrevehető hatást gyakorolnak a gázcserejére. Minél gyakrabban s minél intenzívebben végezte ezeket az állat a kísérlet közben, annál nagyobbak a gázcsereértékei s így a kuraramérgezés, mely a mozgató idegek végkészülékét bé-

nítja, annál nagyobb csökkenést okoz a gázcserében. Az első 3 házinyúl gázcseréje a kísérleti hibák határain belül eső változásokat mutat a kuraramérgezés után, míg a másik 3 nyulnál már jelentékeny a kiesés. Ezek a nyugtalan állatok. E kísérletek azonban kétségtelenül bizonyítják, hogy minél inkább megközeleltik az állatok a teljes izomnyugalom állapotát, annál kisebb változást okoz, úgy hogy — mint azt 2 nyúl-kísérlet mutatja — ezen állatokon is ugyanazon eredmény érhető el, mint a kutyákon. A két állat viselkedése tehát lényegében egyforma s így azt kell következtetnünk, hogy a teljesen nyugodtan ülő házinyúl izomzatában ép oly kevésbé van *chemiai reflexonus*, mint a nyugodtan fekvő kutya izomzatában. Kísérleteim egyúttal megadják a magyarázatát annak is, hogy PFLÜGER miért kapott kísérleteiben oly nagy kiesést a kuraramérgezés után. Ő a nyulakat deszkára feszítette ki, a mely állapotban az izmok bizonyára összehúzódásokra ingereltetnek s így természetes, hogy ilyenkor a kuraramérgezésnek nagyobb kiesést is kell okoznia.

Kísérleteimmel a nyugvó izom chemiai tonusának a tana teljesen elvesztette az alapját; most már nincs egyetlenegy kísérlet sem, melyből ilyen tonus létezésére következtethetnénk. Ennek megvan a jelentősége a testhőmérséklet ú. n. chemiai szabályozásában. A mikor a környezet hőmérséklete bizonyos minimális érték alá csökken (kritikus hőmérséklet), a melegvérű állatok hőtermelése fokozódik. E fokozódást némelyek (pl. RUBNER) a chemiai tonus fokozódásával magyarázzák. Mások (LOEWY, JOHANSSON) a hőtermelés fokozódását izommozgásokra vezetik vissza. Kísérleteim ezen utóbbi felfogást támogatják.

DIFFUSIO A FELSZÍNBE.¹

BERCZELLER LÁSZLÓ-tól.

A GIBBS-tétel alapján az olyan anyagok, melyek az oldószer felszín-feszültségét csökkentik, a felszínben (illetve határfelszínben) koncentrálnak. Ezen tétel — a mint azt különösen TRAUBE vizsgálatai mutatták meg — különösen nagy jelentőséggel bír az élettanban, mert az következik belőle, hogy ezen anyagok a sejtek és más alakelemek felszínén más (nagyobb) sűrűségben lesznek jelen, mint a sejtek és az őket körülvevő folyadék belsejében. Általában azt mondhatjuk, hogy ezen koncentráció a felszínben igen hamar, majdnem pillanatnyilag követi a felszín képződését. De néhány esetben már észlelték azt, hogy ez a diffusio a felszínbe csak lassan következett be. FREUNDLICH azt észlelte, hogy a szappanoldatok felszíni feszültsége, különböző módszerekkel mérve, igen különböző. Statikus módszerekkel mérve sokkal alacsonyabb értékeket kapott, mint dinamikusokkal.

A statikus módszerekkel nyugalomban levő felszíneken mérjük a felszín-feszültséget, míg a dinamikus módszerekkel mozgásban levőkön.

FREUNDLICH a jelenséget azzal magyarázta, hogy a dinamikus módszereknél bizonyos anyagok számára nem áll elég idő rendelkezésre, hogy a felszínre olyan mennyiségben jussanak, mint az a végleges sűrűségüknek megfelel.

Ezen jelenség azért igen nagy élettani érdekességű, mert a sejtek és a sejtek közötti anyagsere *felszínbe* való diffúziók hosszú sorozatából tevődik össze.

¹ A budapesti kir. magy. tud. egyetem általános kórtani intézetében készült dolgozat.

Másrészt ezen jelenségnek az adsorptióra vonatkozó ismereteinkkel kapcsolatban kolloidkéimiai érdekessége is van. Igen sok esetben az adsorptio pillanatnyilag folyik le (lásd különösen FREUNDLICH vizsgálatait kristályos anyagok adsorptiójára vonatkozólag). Másrészt sok esetben az egyensúly csak lassan áll be. Valószínűleg itt is diffúzióról a felszínbe van szó, bár más körülmények is okozhatják ezen jelenséget.

Néhány physiologiai érdekességű anyag diffúzióját a felszínbe vizsgáltam meg.

FREUNDLICH tapasztalataira való tekintettel kísérleteimet úgy végeztem, hogy a felszín-feszültséget a felszínképződés különböző sebessége mellett mértem, még pedig úgy, hogy *csakis* ezen sebesség változott meg (tehát nem különböző módszerekkel, mint FREUNDLICH, melyek semmi körülmények között sem adnak teljesen azonos értéket). A felszín-feszültséget a TRAUBE-féle stalagmometerrel szobahőmérsékleten mértem. A cseppképződés sebességét egyszerűen úgy változtattam meg, hogy a levegőt felül a stalagmometerbe igen szűk kapillarisokon keresztül bocsátottam be. A kapillarisokat letördelve változtattam a cseppképződés sebességét. Meg kell jegyezmem, hogy LOHNSTEIN meggondolásaival szemben a cseppképződés sebességének változtatásával a destillált víz cseppszáma alig változik. A kolloid oldatokon észlelt változásokat tehát csakis az oldott kolloidok okozzák.

I. Destillált víz.¹

1. táblázat.

| t | T | Δ |
|-----|-------|----------|
| 44 | 43,80 | — |
| 128 | 43,80 | + 0,20 |
| 437 | 44,00 | — |
| 705 | 44,00 | — |

¹ Használt jelzésem: t a mérés ideje másodpercekben; T az oldat cseppszáma; Δ az egymásután következő méréseknél a cseppszámok különbsége; τ egy csepp képződésének ideje; δ a cseppszám változása 100 másodperc képződési időre átszámítva; % a cseppszám változása 100 cseppre átszámítva.

A mint az első táblázatból látható, a felszíni feszültségben csak kb. 1% különbséget okoz, ha egy csepp képződése 1 mp. helyett 14 mp.-ig tart. Ezen kis különbség egyúttal a stalagmometeres módszer jóságának erős bizonyítéka.

II. Aethylalkohol.

2. táblázat.

| 25 %-os | | | | | |
|---------|-------|--------|----------|----------|------|
| t | T | τ | Δ | δ | % |
| 45 | 78,70 | 0,56 | + 2,80 | + 1,25 | 3,48 |
| 255 | 81,50 | 3,1 | + 1,20 | + 0,33 | 5,08 |
| 620 | 82,70 | 7,5 | — | — | — |
| 5 %-os | | | | | |
| 44 | 55,80 | 0,79 | + 0,90 | + 0,47 | 1,60 |
| 233 | 56,70 | 4,2 | — | — | — |

Egy kísérletet 5, egyet pedig kb. 25 százalékos oldattal végeztem. (Az utóbbit csak összehasonlítás kedvéért említem meg, mert a használt stalagmometer ilyen nagy cseppszám mérésére nem alkalmas.)

Az 5 %-os oldatnál a csepegés sebességének növelésével a cseppszám kis mértékben csökken, ezen változás azonban alig nagyobb, mint a destillált víznél, egészen csak kb. 1,6 %-ot tesz ki.

A 25 %-os alkoholnál nagyobbak a különbségek, mert a cseppek képződése is sokkal gyorsabban történik, másrészt mert a koncentrációkülönbség a folyadék felszíne és belseje között is sokkal nagyobb.

Ezen kísérletekből arra következtethetünk, hogy az æthylalkoholnál ha nem is áll be pillanatnyilag az egyensúly, a felszín és a folyadék belseje között, mégis ez igen gyorsan következik be.

III. Amylalkohol.

3. táblázat.

| 1 : 50 | | | | | |
|---------|--------|--------|----------|----------|--------|
| t | T | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 103,30 | 0,43 | — 5,30 | — 2,51 | — 5,15 |
| 255 | 98,00 | 2,6 | — | — | — |
| 1 : 500 | | | | | |
| 44 | 53,20 | 0,84 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 240 | 53,20 | 4,50 | + 0,20 | + 0,05 | 0,10 |
| 640 | 53,40 | 10,1 | — | — | — |

Ismét két oldatot vizsgáltam meg. Az egyik esetben 1 cm^3 amylalkohol volt oldva 500 cm^3 vízben, a másik esetben pedig 1 cm^3 50 cm^3 vízben.

Az első oldatnál a különbségek egészen csekélyek. A második oldatnál a cseppszám csökkenését észleltem a cseppképződés növekedése idejének növekedésével. Ugyanezen jelenséget más anyagokon is észleltem. A jelenség vizsgálatára később rá fogok térni.

IV. Aceton.

4. táblázat.

| Aceton 1 : 10 | | | | | |
|---------------|-------|--------|----------|----------|--------|
| t | T | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 60,60 | 0,72 | — 1,60 | — 1,89 | — 2,66 |
| 130 | 59,00 | 2,2 | — | — | — |
| Aceton 1 : 25 | | | | | |
| 44 | 52,80 | 0,83 | — 0,60 | — 2,30 | — 1,14 |
| 70 | 52,20 | 1,33 | + 0,20 | + 0,36 | — 0,78 |
| 125 | 52,40 | 2,39 | + 0,40 | + 0,09 | 0 |
| 590 | 52,80 | 11,2 | — | — | — |

A használt acetondatokat az árubeli aceton 10-szeresére, illetve 25-szörösére való hígításával állítottam elő.

A higabb oldatnál először a cseppszám csökkenését (l. az amyl-alkoholnál is), azután kismértékű növekedését észleltem. A töményebb oldatnál a cseppszám csökkenése valamivel nagyobb volt.

V. Phenol.

5. táblázat.

| Conc. vizes oldat | | | | | |
|--------------------------------------|----------|--------|----------|----------|--------|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 77,60 | 0,17 | — 1,20 | — 0,60 | — 1,57 |
| 244 | 77,40 | 0,2 | — | — | — |
| Conc. vizes oldat 4-szeresen hígítva | | | | | |
| 44 | 52,40 | 0,84 | — 0,40 | — 0,52 | — 0,76 |
| 120 | 52,00 | 2,3 | + 1,00 | + 0,21 | + 1,15 |
| 600 | 53,00 | 11,3 | — | — | — |

Körülbelül telített oldatot és ezt négyszeresen hígítva vizsgáltam.

A változások egészen csekélyek, megegyeznek az acetonnál észlelt változásokkal.

VI. Chloralhydrat.

6. táblázat.

| 5%-os vizes chlorhydrat oldat | | | | | |
|-------------------------------|----------|--------|----------|----------|-------|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 58,20 | 0,76 | + 1,00 | + 1,1 | + 1,7 |
| 130 | 59,20 | 2,20 | — | — | — |

A cseppszám a cseppképződés sebességének csökkenésével kissé nő.

VII. Natriumbenzoat.

7. táblázat.

| <i>n</i> /1 oldat | | | | | |
|-------------------|----------|--------|----------|----------|-----|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 50,40 | 0,88 | + 2,00 | + 0,97 | 4,6 |
| 250 | 52,40 | 4,8 | — | — | — |

VIII. Natriumglykocholat.

8. táblázat.

| 1 : 2500 vizes oldat | | | | | |
|----------------------|----------|--------|----------|----------|-------|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 50,20 | 0,88 | — 0,20 | — 0,39 | — 0,4 |
| 150 | 50,00 | 3,0 | + 1,40 | + 2,5 | + 2,4 |
| 205 | 51,40 | 3,99 | — | — | — |

Ezen oldatok ugyanúgy viselkednek, mint az előbbiek.

IX. Kámfor.

9. táblázat.

| Telített vizes oldat | | | | | |
|----------------------|----------|--------|----------|----------|-----|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 51,20 | 0,86 | + 0,80 | + 0,83 | 1,5 |
| 190 | 52,00 | 2,7 | + 2,60 | + 0,59 | 6,7 |
| 545 | 54,60 | 10,9 | — | — | — |

A telített vizes oldatot használtam. A cseppképződés sebességének csökkenésével a csepkszám sokkal inkább növekszik, mint az eddig említett anyagoknál.

X. Thymol.

10. táblázat.

| Telített vizes oldat | | | | | | |
|----------------------|----------|--------|----------|----------|--------|-------|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % A* | % B** |
| 43 A | 68,10 | 0,63 | — 1,60 | — 7,3 | — 2,3 | — |
| 65 B | 66,50 | 0,98 | + 0,10 | + 2,0 | — 2,2 | + 0,1 |
| 70 | 66,60 | 1,00 | + 0,60 | + 0,10 | — 1,3 | + 1,0 |
| 126 | 67,20 | 1,70 | + 1,30 | + 0,77 | — 0,6 | + 2,0 |
| 218 | 68,50 | 3,03 | + 2,00 | + 0,49 | + 1,35 | + 5,8 |
| 625 | 70,50 | 8,86 | — | — | — | — |

* A-tól számítva.

** B-től

Szintén a telített vizes oldatot használtam.

A cseppképződés sebességének csökkenésével eleinte csökken a cseppszám, azután nő. A növekedés itt is nagyobb, mint a többi eddigi esetben (kivéve a kámfort).

XI. Hæmoglobín.

11. táblázat.

| Kb. 1 % vizes oldat | | | | | |
|---------------------|----------|--------|----------|----------|------|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 56,20 | 0,71 | + 0,20 | + 0,77 | 0,34 |
| 70 | 56,40 | 1,2 | + 2,00 | + 3,57 | 3,9 |
| 126 | 58,40 | 2,2 | + 4,80 | + 4,07 | 12,7 |
| 244 | 63,20 | 3,8 | + 0,40 | + 0,001 | 13,2 |
| 640 | 63,60 | 10,0 | — | — | — |

A MERCK-féle præperatumból készült kb. 1 %-os oldatot használtam. Nem oldódott tökéletesen. A hæmoglobín sokkal jobban csökkenti a víz felszín-feszültségét, mint a többi eddigi vizsgált fehérjeféle (serumalbumin, gelatine, ovalbumin, casein, WITTE-pepton). A cseppképződés sebességének növelésével a felszín-feszültség sokkal nagyobb mértékben nő, mint az eddigi esetekben.

XII. Serumalbumin.

12. táblázat.

| 1 % vizes oldat | | | | | |
|-----------------|----------|--------|----------|----------|-----|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 44,80 | 0,99 | + 0,80 | + 0,71 | 1,8 |
| 159 | 45,60 | 3,5 | + 1,00 | + 0,71 | 6,4 |
| 300 | 46,60 | 6,3 | — | — | — |

XIII. Ovalbumin.

13. táblázat.

| 1 % vizes oldat | | | | | |
|-----------------|----------|--------|----------|----------|------|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 44,20 | 1,00 | + 2,00 | + 1,81 | 4,6 |
| 155 | 46,20 | 3,4 | + 2,40 | + 1,66 | 10,0 |
| 300 | 48,60 | 6,2 | — | — | — |

XIV. Kasein.*14. táblázat.*

| 1 % vizes oldat $n/2$ KOH-ban oldva | | | | | |
|-------------------------------------|-------|--------|----------|----------|------|
| t | T | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 58,20 | 0,76 | + 1,20 | + 2,07 | 2,07 |
| 102 | 59,40 | 1,8 | + 2,30 | + 1,16 | 6,0 |
| 301 | 61,70 | 4,9 | — | — | — |

XV. Witte-pepton.*15. táblázat.*

| Kb. 1 % és vizes oldat | | | | | |
|------------------------|-------|--------|----------|----------|------|
| t | T | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 57,00 | 0,71 | + 0,80 | + 0,99 | 1,4 |
| 125 | 57,80 | 2,1 | + 1,20 | + 1,09 | 3,4 |
| 235 | 59,00 | 4,0 | + 0,20 | + 0,13 | 3,7 |
| 295 | 59,20 | 5,0 | + 4,60 | + 0,25 | 11,9 |
| 1793 | 63,80 | 28,1 | — | — | — |

XVI. Gelatina.*16. táblázat.*

| 1 % vizes oldat | | | | | |
|-----------------|-------|--------|----------|----------|-----|
| t | T | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 48,20 | 0,92 | + 0,80 | + 0,63 | 4,7 |
| 170 | 50,00 | 3,4 | + 1,60 | + 1,08 | 5,0 |
| 318 | 51,60 | 6,1 | — | — | — |

XVII. Saponin.*17. táblázat.*

| 1 % vizes oldat | | | | | |
|-----------------|-------|--------|----------|----------|-----|
| t | T | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 49,20 | 0,90 | + 1,00 | + 0,83 | 2,0 |
| 165 | 50,00 | 3,3 | + 2,60 | + 1,90 | 7,3 |
| 307 | 52,60 | 5,8 | — | — | — |

XVIII. Natriumoleat.

18. táblázat.

| 0,1% vizes oldat | | | | | |
|------------------|----------|--------|----------|----------|------|
| <i>t</i> | <i>T</i> | τ | Δ | δ | % |
| 44 | 61,60 | 0,71 | + 11,60 | + 10,95 | 18,9 |
| 150 | 72,20 | 2,08 | + 9,90 | + 6,60 | 34,9 |
| 300 | 82,10 | 3,6 | — | — | — |

Mindezek az anyagok qualitative egész egyformán viselkednek. A csepegés sebességének növekedésével lényegesen csökken a cseppszám, vagyis lényegesen nő az oldatok felszín-feszültsége. Ezen változások jóval nagyobbak, mint az előbb tárgyalt kristályos anyagoknál. (A thymol és kámfor mintegy átmenetet alkot.) Ezen *kolloidok tehát sokkal lassabban diffundálnak a felszínbe, mint a kristályos anyagok.*

Azonban még más körülmények is játszhatnak szerepet ezen jelenség létrejöttében. Így pl. a szappan-oldatoknál a hydrolysis is szerepelhet, még pedig úgy, hogy a felszínben más a hydrolysises egyensúly és ezen egyensúly csak lassan áll be. Ezen kérdés eldöntésére való kísérleteim folyamatban vannak.

Az itt leírt módszerrel igen egyszerű mérésekkel eldönthetjük, hogy egy a felszíni feszültséget csökkentő anyag kristaloid-e vagy kolloid.

Tehát, mivel épen főleg az anorganikus anyagoknál nem használható a módszer, főleg a biologus fogja használhatni. Az élettanban azonkívül, mint már említettem, annyiban is van érdekessége ezen jelenségnek, hogy a diffúciónak a felszínbe fontos szerepe van az anyagszerezefolyamatokban is.

VIZSGÁLATOK AZ ÉLETTANI ELEKTROMOS ÁRAMOK KELETKEZÉSÉRŐL.¹

ROHONYI HUGÓ-tól.

1.

Az élettani elektromos áramok elméletében, valamint az elektrolyt-permeabilitás, a sejt-kataphoresis stb. kérdéseiben nagy szerepet játszik az ion-permeabilitás fogalma. Ezt a fogalma KOEPPE vezette be a physiologiába s azóta HAMBURGER, LOEB és mások a legkülönbözőbb jelenségek magyarázásában felhasználták. A fizikai kémiában OSTWALD definiálta először az ionpermeabilitást a ferrocyanrézhártyára; szerinte a hártya a sómolekulákra nem, csak bizonyos ionokra átjárható; a chlorkaliumot azért bocsájtja át, mert a kalium- és chlor-ionokra permeabilis, a chlorbarium pedig nem jut rajta keresztül, mert az egyik ionra, a bariumionra impermeabilis.

Két kísérlet ismeretes ennek a feltevésnek bebizonyítására: WALDEN hártyadiffúziós kísérletei és BRÜNINGS mérései a ferrocyanrézhártya elektromos potenciáljáról.

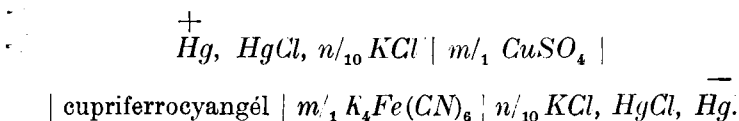
WALDEN adatai a szerző szerint arra mutatnak, hogy a diffúziót nem az egyes ionok szabják meg, hanem a bomlatlan molekulák; a ferrocyanrézhártya elektromos ereje pedig BRÜNINGS vizsgálatai szerint széles határok között független az általa elválasztott cuprisulfát, illetve ferrocyankalium koncentrációjától, a mi ennek a láncznak OSTWALD-féle elmélete értelmében lehetetlen volna. Így a tipikus félig áteresztő hártyák ionpermeabili-

¹ A budapesti kir. magy. tud.-egyetem általános kórtani intézetében készült dolgozat.

tása egyáltalán nem tekinthető bebizonyítotttnak; a physiologiában feltételezett sejthártyák ionpermeabilitása természetesen még kevésbé.

BRÜNINGS szerint a következő láncz: cuprisulfatoldat-ferrocyanrézhártya-ferrocyankaliumoldat elektromotoros ereje körülbelül 0·100 volt. Mi ennek az aránylag nagy elektromotoros erőnek a forrása, ha — mint láttuk — az OSTWALD által feltételezett nagy ionvándorlási sebesség-különbségekre nem vezethető vissza? Ennek a kérdésnek tisztázása a félig áteresztő hártyák és a sejthártyák sokszor hangsúlyozott analogiájánál fogva különösen az elektromos élettani áramokra való tekintettel physiologiai érdekekkel is bír.

A következőkben e czélból végzett vizsgálataimat foglalom röviden össze. Cuprisulfátból ferrocyanrézhártyából és ferrocyankaliumból álló lánczokat állítottam össze s az ilyen lánczok elektromotoros erejét mértem nem-polározható elektrodonkon keresztül kapillarelektrométerrel, vagy érzékeny tükrös galvanométerrel. A hártyát — a szokásos chromgelatinába való ágyazást mellőzve — a következő igen egyszerű és könnyen kivihető módon állítottam elő. Két kis főzőpoharat állítottam egymás mellé, az egyiket rézsulfátoldattal, a másikat ferrocyankaliumoldattal félig megtöltve; az egyik oldat nivója 1—2 mm-rel magasabb. Ebbe Π -alakúan görbitett, finoman kihúzott üvegkapilláris egyik szárát mártottam s miután ez az oldatot magába szívta, másik szárát a mellette álló másik oldatba vittem. Az átszivárgó réz- vagy ferrocyansepp nyomban ferrocyanrézhártyával vonódik be s ha most a két oldatba két chlorkaliummal töltött kalomelelektrodot mártottam s galvanométerrel összekötöttem, akkor egy-két perc alatt 0·085—0·095 Volt elektromotoros erőt mértem; tehát körülbelül annyit, a mennyit BRÜNINGS a gelatinába ágyazott hártyával mért. A láncz összeállítása tehát a következő volt:



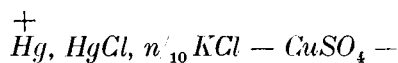
Változtatva a réz- illetve ferrocyanoldatok koncentrációját,

azt találtam, hogy nemcsak azok abszolút értékét (BRÜNINGS), hanem a két só koncentrációjának viszonyát is széles határok között lehet változtatni anélkül, hogy a láncz elektromotoros ereje lényegesen változna. A következő táblázat világosan mutatja ezt:

| | A $Cu SO_4$ oldat concentrációja | A $K_4 Fe (CN)_6$ oldat concentrációja | A láncz <i>E.M.E.</i> -je voltokban |
|----|-------------------------------------|---|--|
| 1. | $m/1$ | $m/1$ | 0,090 |
| 2. | $m/1$ | $m/20$ | 0,094 |
| 3. | $m/1$ | $m/50$ | 0,085 |
| 4. | $m/1$ | $m/100$ | 0,088 |
| 5. | $m/20$ | $m/20$ | 0,080 |
| 6. | $m/30$ | $m/1$ | 0,088 |
| 7. | $m/100$ | $m/1$ | 0,088 |

A hártypotenciálnak ilyen természete bizonyos elméleti megfontolások alapján arra a kísérletre vezetett, hogy ennek a láncznak elektromotoros erejét, a hártya helyén destillált vizet iktatva be, mérjem meg. Ez úgy történt, hogy a két főzőpohár közé egy harmadik, destillált vízzel töltött poharat állítottam, melyet a két oldalsóval gyapotfonalak útján kötöttem össze. Azt találtam, hogy ennek a rendszernek elektromotoros ereje ugyanolyan irányú, nagyságú s a koncentrációktól ugyanúgy független, mint a fentebbi lánczban láttuk.

Nyilvánvaló, hogy ennek a láncznak:



elektromotoros ereje azokból a kontakt-potenciálokból tevődik össze, a melyek az egyes oldatok határán jelennek meg s a melyek a szereplő ionoknak a vízre vonatkozó (minthogy csak vizes közegek szerepelnek) vándorlási sebesség-differenciáira vezetendők vissza. A feladat most az volt, megállapítani, hogy miért helyettesíthető ezekben a kísérletekben a ferrocyanrézhártya destillált vízzel s hogy így a két láncz analogiája mennyiben jelenti a két

láncz azonosságát. Ha a destillált vizes systemában az elvezető kalomelelektrodok chlorkalium-tartalmát változtatjuk, azt találjuk, hogy, mint az alábbi táblázut mutatja, a láncz E. M. E.-e lényegesen megváltozik.

| | A kalomel- elektrodok K Cl-tartalma | E. M. E. voltokban |
|----|---|-----------------------|
| 1. | $n/1$ | 0,128 |
| 2. | $n/10$ | 0,100 |
| 3. | $n/100$ | 0,058 |
| 4. | $n/1000$ | 0,051 |

A $Cu SO_4$ és
 $K_4 Fe (CN)_6$ olda-
tok concentratiója
 $m/1$; közbeiktatva
destillált víz

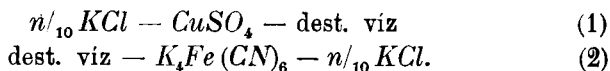
Minél higabb tehát az *elvezető* chlorkaliumoldat, az E. M. E. annál kisebb. Ha meghagyva az elvezető elektrodok $n/10$ KCl-tartalmát, a közbeiktatott destillált vizet cseréljük fel különböző töménységű KCl-oldatokkal, az E. M. E. ismét lényegesen változik:

| | A közbe- iktatott oldat K Cl-tartalma | E. M. E. voltokban |
|----|---|-----------------------|
| 1. | O (dest. víz) | 0,100 |
| 2. | $n/1000$ | 0,065 |
| 3. | $n/200$ | 0,042 |
| 4. | $n/50$ | 0,025 |
| 5. | $n/10$ | 0,000 |

A $Cu SO_4$ és
 $K_4 Fe (CN)_6$ olda-
tok concentratiója
 $m/1$; az elvezető
elektrodok K Cl-
tartalma $n/10$

Minél töményebb tehát a *közbeiktatott* oldat, annál kisebb az E. M. E.

Ezeknek az adatoknak ismeretével könnyű volt felismerni, hogy az eredeti destillált vizes rendszer E. M. E.-e micsoda kontaktpotenciálokból tevődik össze. Válasszuk a rendszert két részre:



Az (1) rendszernek E. M. E.-je azon mulik, hogy a $CuSO_4$ diff. E. M. E.-je a destillált vízzel szemben (mint nulla-concen-

tratiójú KCl oldattal szemben) nagyobb, mint a $n_{10} KCl$ -dal szemben, a mint az az ismeretes PLANCK-féle formulából következik s a mint azt hasonló lánczokon először TOWER be is bizonyította. A (2) lánczra nézve ugyanez áll. Ezzel az elvezető elektrodok, valamint a közbeiktatott oldat koncentrációjának hatása a láncz E. M. E.-jére nyomban érthető.

Ilyen szempontból vizsgálván a *ferrocyan-rézhártya*-rendszer E. M. E.-jét, azt találtam, hogy az elvezető kalomelektrodok KCl -tartalmának változtatásával ugyanolyan irányú és nagyságú különbségek állnak elő, mint a destillált vizes rendszerben: minél kisebb azok KCl -tartalma, annál kisebb a láncz E. M. E.-je, minél koncentráltabbak a KCl -oldatok, annál nagyobb. A közbeiktatott hártya elektrolyt-tartalmát természetesen nem lehet változtatni, mert az, mint tudjuk, elektrolyteket nem, vagy alig vesz fel; a többi egyezést azonban elegendőnek tartom annak a kimondásához, hogy a ferrocyan-rézhártya elektromotoros erejének forrása egyszerűen az, hogy a hártya impermeabilis lévén az elektrolytekre, mint sómentes vizes közeg szerepel; E. M. E.-jének származtatásához tehát nem szükséges és nem is szabad a szereplő ionok hártyadiffúziójának sebességeire nézve különös feltevéseket alkotni, vagy fázishatárfeszültségek (Phasengrenzkraftpotentiale) jelenlétére következtetni, hanem a homogén-közegben történő elektrolyt-diffúzióra érvényes PLANCK-féle formulát¹ kell megfelelő módon alkalmazni. Ezen az alapon számolva kimutattam, hogy a «hártyapotenciál» függetlensége a réz-, illetve ferrocyan-ionok koncentrációjától (a mit már BRÜNINGS észlelt anélkül, hogy értelmezni tudta volna) a PLANCK-féle formulából direkte következik.

¹ Két vizes elektrolytoldat határán mutatkozó E. M. E.:

$$\pi_2 - \pi_1 = RT \ln \xi,$$

hol ξ a köv. egyenlet alapján számítandó:

$$\frac{\xi u_2 c_2 - u_1 c_1}{v_2 c_2 - \xi v_1 c_1} = \frac{\ln \frac{c_2}{c_1} - \ln \xi}{\ln \frac{c_2}{c_1} + \ln \xi} \cdot \frac{\xi c_2 - c_1}{c_2 - \xi c_1}$$

c_1 és c_2 a sók koncentrációját, u_1 és v_1 ill. u_2 és v_2 az ionok vánd. seb.-ét jelenti.

Mindez élesen ellentmond a hártýák ionpermeabilitásáról szóló elméletnek. Nyilvánvaló, hogy a ferrocyanrézhártýában a vizsgált ionok vándorlási sebességei ugyanazok, mint a vízben s hogy valamely só permeabilitásának vagy impermeabilitásának szükségszerű összefüggése a só ionjainak vándorlási sebességével nincsen.

2.

A selektív ionpermeabilitás elméletén kívül legújabban nagy szerepet játszanak az élettani elektromos áramok értelmezésében azok a felfogások, a melyek szerint a sejtfelület a környező szövetnedvvel szemben mint külön fázis tekintendő s a sejtáramok két nem keveredő fázis határán beálló feszültség-különbségekből vezetendők le. Különösen LOEB és BEUTNER foglalkozott sokat ennek a lehetőségnek a bebizonyításával; növényi és állati szerveken, valamint mesterséges sejtmodelleken végzett vizsgálataik eredményét — különböző időközökben tett különböző módosítások után — következőleg foglalják össze: a sejtfelület lipoid-rétegből áll; e réteg és a szövetnedv elektrolytjei között olyan a megoszlás, hogy a lipoid-hártýa a szövetnedv elektrolytjeinek csak nyomait tartalmazza; az érintkezési felületen így fázis-határfeszültség jelentkezik (Phasengrenzkraftpotential). Ennek a feszültségnek változása különböző kísérleti körülmények között még speciálisabb feltevésekre kényszerítette őket. Így fel kell tenniök, hogy a sejthártýa vízben oldhatatlan bizonyos sókat tartalmaz homogen eloszlásban; az alkalisók a hártýában kicsiny, de véges mennyiségben oldhatók; a hártýa vízben oldhatatlan sója (YX) reagál a hártýában diffundáló alkalisóval (pl. KCl) egy teljesen lefolyó reakció egyenlete szerint, úgy hogy elektromosan diszociált KX és nem-diszociált YCl keletkezik.

A következőkben arra akarok rámutatni, hogy mindezek az ellenőrizhetetlen feltevések szükségtelenné válnak, illetve egyetlen nagyon egyszerű feltevéssel helyettesíthetők, ha a sejtáramokat nem fázishatáráramokként, hanem ugyanolyan összetételű homogén-diffúziós lánczokként tárgyaljuk, a minőt fentebb a a cupriferrrocyanhártýa feszültségének ismertetésekor leírtunk. Az erre a célra szükséges feltevés az, hogy a sejtfelület egy

elektrolytmentes (elektrolytszegény) *vizes* közeg; így a sejt belseje és a szövetnedv közé, két elektrolytoldat közé iktatva épűgy elektromotoros erő forrása, mint a ferrocyanrézhártya, vagy mint a destillált víz. Ez ellen a feltevés ellen semmisem hozható fel; ellenkezőleg eddig is a sejt felületi rétegét elektrolytmentesnek tartották, a mi mindenekelőtt a vér és a serum vezetőségének viszonyára vonatkozó mérésekből (TANGL és BUGARSZKY) következik; LOEB és BEUTNER is abból indul ki, mint említettem, hogy sók a felületi rétegben csak nyomokban oldódnak. Arra vonatkozólag, hogy ez a felületi réteg nem lipid-hártya, hanem vizes közeg (a melyben lipidok mindenesetre nagyobb concentrációban vannak jelen, mint a sejt belsejében), mindazok az érvek felhozhatók, a melyeket általában a lipid-elmélet ellen fel szoktak hozni. Én ezek közül csak arra hívom fel a figyelmet, hogy a physiologiai áramoknak azok a sajátságai, a melyek értelmezésére LOEB és BEUTNER az említett feltevéseket adja, éppen növényi sejteken a legkifejezettebbek, tehát olyan sejteken, a melyeken lipid-hártyáról a legkevésbbé lehet szó.

Feltevéseim szerint a sértési áramnak a következő összetételű láncz felel meg:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Kalomel-} \\ \text{elektrod} \end{array} \right] \overset{\pi_1}{\parallel} \left[\begin{array}{c} \text{A sejt} \\ \text{belseje} \end{array} \right] \overset{\pi_2}{\parallel} \left[\begin{array}{c} \text{Sejthártya=} \\ \text{elektrolytszegény} \\ \text{vizes közeg} \end{array} \right] \overset{\pi_3}{\parallel} \left[\begin{array}{c} \text{Szövet-} \\ \text{nedv} \end{array} \right] \overset{\pi_4}{\parallel} \left[\begin{array}{c} \text{Kalomel-} \\ \text{elektrod} \end{array} \right]$$

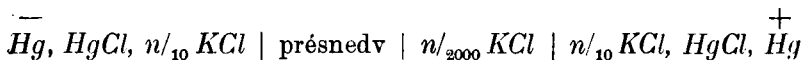
A sértés
helye

a láncz E. M. E.-je:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4,$$

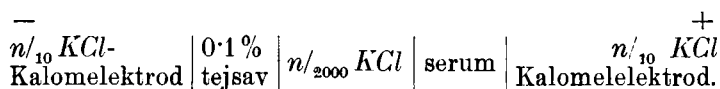
π_1 és π_2 ellenkező irányú, de nem egyenlő, mert $\pi_2 > \pi_1$; ép így π_3 és π_4 ellenkező irányú, de $\pi_3 > \pi_4$.

Az izom sértési áramát ennek a láncznak megfelelően következően rekonstruáltam. Frissen leölt kutya lábizmait BUCHNER-présszel kisajtoltam; a nyert sűrű, barna, lakmusra savanyú folyadék nyilván a sejt belsejének + szövetnedvnek felel meg. A sejthártyát $n/_{2000}$ KCl-oldattal helyettesítettem. A



láncz E. M. E.-je 0·040 Volt, nagyságára és irányára tehát a sér-
tési árammal megegyező.

Ha a működő vagy a sértett izom belsejét hig tejsavoldat-
nak tekintjük, a perifibrilláris folyadékot pedig elektrolyt-össze-
tételére nézve lényegében a vérserummal azonosnak, akkor a
következő lánczot konstruálhatjuk:



Ennek a láncznak E. M. E.-je 0·100 V.

Ezek s az ezekhez hasonló tények az itt ismertetett elmélet
lehetőségét kétségtelenné teszik. Direkt *bizonyítékainak* tekin-
tem azonban azokat a méréseimet, a melyekből kiderült, hogy
a physiologiai áramok E. M. E.-jének változásait a szövet érintő-
oldat elektrolyttartalmának változtatásával (LOEB és BEUTNER),
ezekkel a lánczokkal qualitative és quantitative utánózni lehet.
LOEB és BEUTNER megállapította, hogy a sértett vagy sértetlen
növény-leveél áramának E. M. E.-je mint változik aszerint, a mint
a növény-levelet, vagy állat-izmot, vagy bőrt különböző con-
centrátiójú különböző elektrolytoldatokkal érintkezésben kötötték
össze a galvanométerrel. Az általuk észlelt változások iránya és
nagysága, sőt az adataiból konstruálható görbék *menete* is pon-
tosan ugyanaz, mint az általam összeállított lánczmodelleknél
észlelhető, ha azokban a megfelelő helyen ugyanolyan elektrolyt-
oldatokat helyettesítünk, a mi különben a PLANCK-féle formulá-
ból előre látható is volt.

Az állati szervek *működési, hő-* (BERNSTEIN), valamint só-
áramai (HÖBER) az itt ismertetett felfogás alapján igen egyszerűen
értelmezhetők. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a felületi réteg sótar-
talmának igen kiefőkü megváltozása (a sópermeabilitás megvál-
tozása), vagy másrészt új ionok keletkezése a sejt belsejében,
különösen ha azok eléggé eltérő vándorlási sebességekkel bir-
nak (sav), elegendők ahhoz, hogy a feltételezett típusú láncz

E. M. E.-jében nagy változások jöjjenek létre. Így tehát mindezek a jelenségek érthetővé válnak, anélkül, hogy rejtélyesen különböző ionvándorlási sebességek, vagy kimutathatatlan új fázisok feltételezésére kényszerülnénk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 február 16.-án tartott üléséből,)

AZ URÁN ÁTALAKULÁSAIRÓL.

RÓNA ERZSÉBET-től.

Bevezetés.

A geologiai értelemben vett öregásványok urán- és rádium-tartalmának viszonya mindig állandó, a miből következik, hogy genetikus összefüggésnek kell fennállni az urán és rádium között. RUTHERFORD és SODDY¹ ismert elmélete adta meg ezen összefüggés magyarázatát olyképen, hogy a rádium az uránnak leszármazottja és a már CROOKES² által felfedezett UX kapcsolja őket össze. Az UX -en azonban évek múltán sem sikerült a rádium képződését kimutatni, daczára annak, hogy a rádium átalakulásának félideje 2000 év; és így egy év alatt ki kellett volna mutatni a rádium növekedését az UX -ből.

A fenti negatív eredményből azt következtették, hogy a rádium nem az UX -ből származik, hanem a kettő között kell még egy hosszúéletű elemnek keletkezni. Ezen elemet, az ioniumot, melynek félideje 100,000 év, BOLTWOOD³ fedezte fel.

Időközben gyűjtött radioaktív tapasztalataink egyértelműleg a mellett szözlottak, hogy minden ú. n. α átalakulásnál minden átalakuló atom egy és csakis egy α részt ad le, csak az urán tért el látszólag ettől a törvénytől, mert minden urán-atom átalakulása két α rész leadásával jár. Ez az eltérés valószínűvé tette, hogy az, a mit uránnak nevezünk, nem egy elem, de kettőnek a keveréke, melyeknek mindegyike átalakulása közben egy-egy α részt lövel ki. Később GEIGER és NUTTAL-nak⁴ sikerült

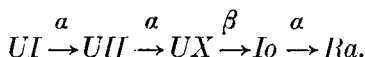
¹ Radioactive Substances and their Radiations, I. 445. Cambridge 1913.

² Proc. Roy. Soc. A. 66. I. 409. 1900.

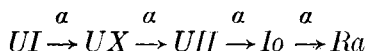
³ Amer. Journ. Sci. 24, I. 370. 1907. 25, I. 365. 1908.

⁴ Phys. Zeitschr. 8, I. 884. 1907.

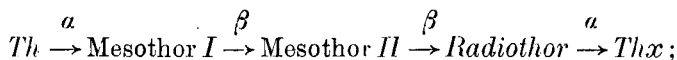
kimutatni, hogy az urán α -sugarai komplexek, hogy egy részüknek hatótávolsága 2·5, a másiké 2·9 cm. Minden α átalakulás egy meghatározott hatótávolságú α rész leadásával járván, világos, hogy az urán két elem keverékéből áll: az *UI* és *UII*-ből és hogy az átalakulási sor, mely az urántól a rádiumig vezet, a következő:



HEVESY és PUTNOKY¹ megkísérlette az *UI*-et az *UII*-től diffúzió segítségével elválasztani és kísérleteik negatív eredményéből azt a következtetést vonták, hogy az *UII* nem lehet az *UI* átalakulási terméke, mert nem lehetséges, hogy egy elem kémiai karaktere ne változzék meg egy α rész leadása után és az *UI* átalakulása a következőképpen megy végbe:



és az urán jellege az α rész leadása után megváltozik, de a γ rész leadása után visszatér éppen úgy, mint a thorium átalakulásánál:



a thorium jellege megváltozik egy α rész leadása után, de újból fellép, miután a Mesothor *II* leadta a kompensáló β részt.

A fentiekkel majdnem egyidejűleg RUSSEL² és FAJANS³ még jobban kifejtették az urán és a thorium átalakulása közötti analógiát. Szerintük az *UX* és az *UII* között létezik még egy elem, mely a periodusos rendszer ötödik oszlopába esik és a mely a tantálnak a homologja.

FAJANS és GÖHRINGnek⁴ tényleg sikerült igen zseniális módon ezt az elemet, az *UX*₂-t vagy más néven bréviumot (*Bv*)₂ izolálni és ennek a csak 1·15 percznyi félidejű elem tulajdonságait pon-

¹ Phys. Zeitschr. 14, l. 63. 1913.

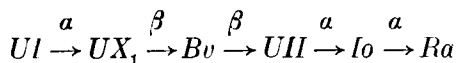
² Chem. News. 107, l. 49. 1913.

³ Phys. Zeitschr. 14, l. 131. és 136. 1913.

⁴ Phys. Zeitschr. 14, l. 877—84. 1913.

tosan megállapítani. Kísérleteikből egyértelműleg következik, hogy a brevium a tantal homologja.

Az urán átalakulási sora ezek szerint így hangzik:



és úgy látszik, mintha már tökéletes lenne.

Néhány évvel ezelőtt ANTONOFFnak¹ sikerült az urántól leválasztani az UX -en kívül egy elemet, mely lágy β sugarakat lövelt ki s melynek félideje 1·5 nap volt.

Ezt az elemet, az UY -t nem sikerült ANTONOFFnak UX mentesen előállítani, hanem mindig az Ux -hez képest kis mennyiségben, a mi a mellett szólott, hogy az UX nem tartozik az uran főátalakulási sorába, a mely a rádiumhoz vezet, hanem annak elágazási terméke.

Ismeretes, hogy az egyes átalakulások két irányban mennek végbe, hogy pl. a RaC , a $Th C$ és $Akt C$ kétféleképen alakulhat át. Vagy úgy, hogy α részeket ad le, mikor a talliummal kémiailag azonos elem keletkezik belőle, vagy β részek leadása mellett, mikor a poloniummal azonos elemmé lesz. Különböző érvek szólnak a mellett, hogy az aktinium az urán-sornak ilyen elágazási terméke. Az aktinium atomsúlya kb. 230 lévén, az elágazás valószínűleg már az uránnál történik. Az UrY azonban ANTONOFF szerint ilyen oldalági terméke az uránnak és így valószínű,² hogy az aktinium és az urán is ilyen összefüggésben állanak.

Az UY problémájának ez különös érdekességet kölcsönöz.

FLECK SODDY³ laboratóriumában megismételte ANTONOFF kísérleteit, de nem tudta az UY -t megkapni. Ezért mi feladatunkul tűztük ki ANTONOFF kísérleteinek a megismétlését és annak az eldöntését, hogy honnét ágazik el az UY .

¹ Phil. Mag. 22, l. 419. 1911.

² Radioactive Substances and their Radiations. Cambridge, 1913.

³ Phil. Mag. 24, l. 711. 1913.

Az urán megtisztítása.

A kémiailag tiszta uránsók mindig tartalmaznak radioaktív szennyezéseket, kisebb-nagyobb mennyiségben thoriumot, aktiniumot, sőt némely esetben rádiumot is. Ezek, illetve ezek átalakulási termékei az UY leválasztásakor szintén kiesnek és így zavarólag hatnak. Ezért a kísérleteimben használt $UO_2 \cdot NO_3 \cdot 2H_2O$ -ot az UX leválasztása előtt gondosan megtisztítottam. Először többször átkristályosítottam s ilyenkor a leöntött anyalúg tartalmazza az UX nagy részét. Miután a vízben oldott sóhoz $BaCl_2$ -ot adtam, a melyet H_2SO_4 -gyel csaptam le, $BaSO_4$ -gyel az esetleg jelenlevő rádium és mesothorium szintén kiesik. Az aktinium és thorium leválasztása végett a szűrlethez kb. 5—6 gr $La_2(SO_4)_3$ -at adtam, a melyet ammonoxalattal csaptam le. A képződött uránammonoxalatot izzítás útján U_3O_8 -á alakítottam át és ismét nitrattá alakítottam vissza; az uránnitrát-oldatot ætherrel rázom ki, ilyenkor a vizes réteg tartalmazza az UX -et. Az æther elpárologtatása után a maradékot ismételen átkristályosítottam, vízben feloldottam és $(H_4N)_2CO_3$ oldat nagy feleslegéhez öntöttem. Ehhez forralás közben cseppenként $FeNO_3$ oldatot adtam, a keletkezett $Fe(OH)_3$ csapadékot leszűrjük, megszárítjuk, finom rétegben kiterítjük s mérjük az aktivitását. Ezen vasoxyd-módszerrel az UX még jelenlevő része s az összes UY kiesik.

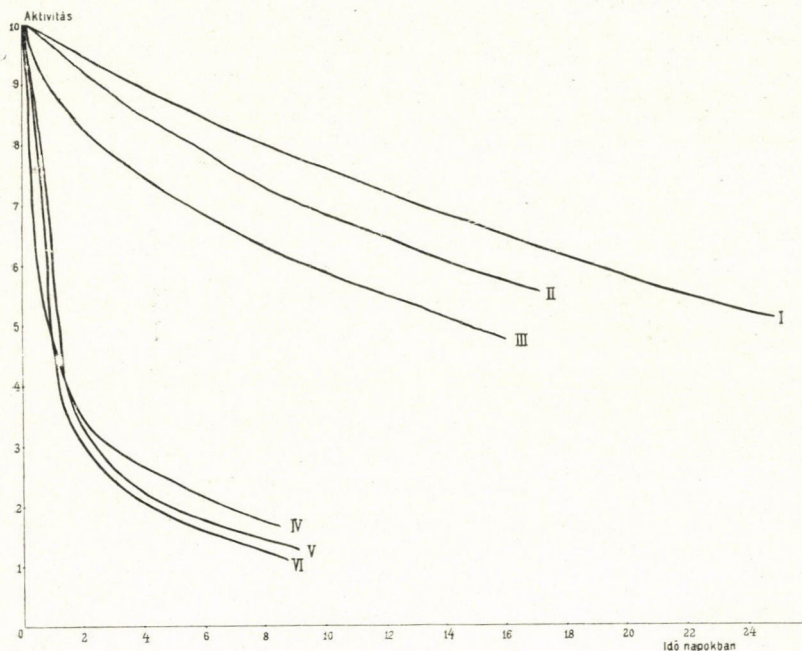
ANTONOFF szerint $BaSO_4$ -gyel ki lehet ejteni az UX -et, az UY -t azonban nem. Az én kísérleteim azonban azt mutatják, hogy ha az urán ammoniumkarbonatos oldatához $BaCl_2$ -ot adok s ezt H_2SO_4 -gyel lecsapom, a csapadék aktivitását mérve, a vasoxydos eljárásnál nyert görbéhez teljesen hasonlót kapok.

Végül vizsgáltam, hogy a thorium aktív csapadékának jelenléte miképen befolyásolja a görbe menetét. Ezt a végből tartottam fontosnak, mert FLECK¹ közleményében thoriumszennyezésre vezette vissza ANTONOFF eredményeit, mert a ThB félideje 10·6 óra lévén, ugyanolyan nagyságrendű, mint az UY . E végből 120 α aktivitású ThB -t oldottam az uránammoniakarbonatos oldatban

¹ Loc. cit.

s azután csaptam le vasoxyddal azzal az eredménnyel, hogy a *ThB* jelenléte nem befolyásolja az *UY* görbét.

Az *UX*-nek *UY* tartalma nem az eljárás módjától, hanem attól függ, hogy mennyi idő mult el az utolsó *UX* leválasztása után. Az *UX* félideje 23 nap lévén, az *UX* mentes uránsók csak 24 nap múlva fogják elérni maximális *UX* tartalmuk felét, míg az *UY* félideje 1.5 nap lévén, másfél nap múlva az erede-



tileg *UY* mentes uránsó már maximális *UY* tartalmának felével rendelkezik. És ezért czélyszerű lehetőleg *UX* mentes készítményt használni.

Az ábrában feltüntetett *I* görbe az *UX* theoretikus görbéje.

II. Egy olyan készítményre vonatkozik, melyben az *UY* és *UX* jóformán egyensúlyban vannak.

A III. görbében az *UY* feleslegben van.

A IV. mutatja, hogy *ThB* nem befolyásolja a görbe menetét.

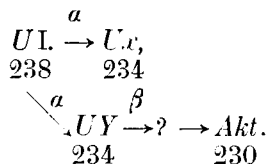
Az V. BaSO_4 -mal kiejtett *UX*-re vonatkozik.

Végül a VI. egy teljesen friss, majdnem *UX* mentes készítményre vonatkozik.

Az *UY* elágazási helye.

A mondottakból következik, hogy az *UY* csak *UI*. vagy *UII*-ből ágazhatik el; az utóbbi két elem kémiai jellege azonos lévén, az *UY* jellege is ugyanaz lesz, akár az egyikből, akár a másikból ágazik el. Csupán az atomsúlya lesz az utóbbi esetben kisebb, ugyanis 230, míg az előbbiben 234. Az *UI* és *UII* nem lövel ki β sugarakat és így az *UY* csupán α átalakulás eredménye lehet és így atomsúlya 4-gyel lesz kisebb az *UI*, illetve az *UII*. atomsúlyánál. A kérdést csak úgy lehetne végleg megoldani, ha vagy sikerülne az *UY* atomsúlyát meghatározni, vagy pedig azt, hogy az *UI*-ből képződött *UX* megfelel-e a annak a mennyiségnek, a mely várható, ha minden *UI* atomból *UX* lesz; ha az *UY* már az *UX*-ből ágazik el, kevesebb *UX*-et kellene találni.

Valószínűbb azonban, hogy az *UY* az *UI*-ből ágazik el és hogy az átalakulás következőképen történik:



Ezen sorozaton szokatlannak tűnik fel, hogy az urán mindkét elágazása α átalakulás eredménye, eddig ilyen esetet nem ismertünk és azt hittük, hogy elágazások csak úgy jöhetnek létre, hogy az atomok egy része α részt, a másika β részt lövel ki. Ha valóban bizonyul az, hogy létezik olyan elágazás is, melynél mindkét esetben ugyanolyan nemű elektromosságot veszít az atom, akkor ez lényegesen fogja befolyásolni a radioaktiv folyamatok mechanizmusáról alkotott képünket. Eddig pl. a rádium minden atomját egyformának képzeljük, mindaddig, míg az illető atom nem szűnt meg rádium atom-lenni; de a fentiek után lehetséges, hogy igen sokféle rádium-atom vagy más atom stb.

létezik, melyek kémiaailag azonosak, atomsúlyuk is ugyanaz, de az atommag belső szerkezete más és más, a szerint, a mint gyorsabban vagy lassabban alakulnak át.

Az itt leírt kísérletek befejezése után jelentek meg, illetve fognak megjelenni SODDYNak, illetve HAHN és MEITNERnek közleményei, a kik a fentiekkel megegyező eredményre jutottak.

Összefoglalás.

1. ANTONOFF 1·5 nap félidejű elem: az *UY* létezésére következtetett kísérleteiből. Ezen elem létezését más oldalról kétségbe vonták; ez a közlemény igazolja ANTONOFF eredményeit az *UY* létezését illetőleg.

2. Az *UY* az *UX*-szel nemcsak akkor esik ki, ha vasoxyddal választjuk le uránoldatból, hanem akkor is, ha a leválasztás $BaSO_4$ -gyel történik.

3. A thorium aktív csapadékának jelenléte az uránoldatban nem változtatja meg lényegesen az *UX* ionizációs görbáját.

4. Az *UY* elágazási terméke az uránnak, valószínűleg a thorium-plejádhoz tartozik és az *UI*-ből ágazik el.

Köszönettel tartozom BUCHBÖCK GUSZTÁV dr. prof. úrnak, a III. sz. kémiai intézet igazgatójának támogató érdeklődéséért, valamint HEVESY GYÖRGY dr. egyet. magántanár úrnak, kinek kezdeményezésére és közreműködésével végeztem az e közleményben leírt kísérleteket.

A β LYRAE, AZ η AQUILAE ÉS A δ CEPHEI VÁLTOZÓ CSILLAGOK FÉNYVÁLTOZÁSA A KÜLÖNBÖZŐ SZINEKBEN.

TERKÁN LAJOS-tól.

Az értekezésünk címébe foglalt állócsillagok fényváltozásának jellege ugyan már régen ismert részben becslési adatokból, részben exakt módszerekkel végrehajtott megfigyelésekből, mégis ezt az ismert tárgyat a Tekintetes Akadémia elé terjeszteni bátorkodunk, mert a nevezett csillagok fényváltozását a főbb spectral-szineken is figyelemmel kísértük egészen sajátos visualis módszerrel és mert módszerünknek ez a sajátossága több olyan, egészen új eredményt nyújtott a fényváltozás jellegére, melyekkel a fényváltozás oka is felderíthető.

A megfigyelés módja. HARKÁNYI BÉLA báró legújabb photometriai vizsgálatait kapcsán, melyekkel a felületi fényességnek a csillag látszó sugara és felületi «effectiv» hőmérséklete között levő összefüggéséből a visualis és a photographikus fényességek alapján a látszósugarat és az effectiv hőmérsékletet kiszámította, az az ötletünk támadt, nem lehetne-e a csillagok visualis fényességét a photographikus adatok módszerével azonos úton megállapítani. Mert ha ilyen módszert sikerül találni, akkor egy és ugyanannak a csillagnak azonos pontosságú, hasonló karaktert mutató, de lényegben más fényességbeli rendszerbe tartozó nagyságrendjeiből megszerkeszthetjük az első katalógust a csillagok látszósugarára és hőmérsékletére.

SCHWARZSCHILD, a photographikus photometria megteremtője, a csillagokról egy és ugyanarra a lemezre több különböző idejű felvételt készített úgy, hogy az egyes csillagképek között azo-

nos nagyságrendbeli különbséget állított elő. Ennek a nagyságrendbeli különbségnek megfelelő sötételési értékek összefüggéséből meghatározta a csillagok photographikus fényességét a nyert sötételés nagyságából.

A SCHWARZSCHILD-féle felvételeken lévő csillagok két képének sötétedései legyenek rendre: S_1 , S_2 . Ezek között van valami

$$S_2 = \chi(S_1)$$

összefüggés, melyet interpolatiós úton meghatározhatunk. Továbbá az S sötételés általában a fényességnek, a magnitudonak függvénye, azaz:

$$S = \varphi(m),$$

vagy fordítva:

$$m = \phi(S).$$

Az összetartozó (S_1 , S_2) értékpároknak, mindnek megfelel valami « d » fényességkülönbség, úgy hogy

$$\begin{aligned} m_1 &= \phi(S_1) \\ m_2 &= m_1 + d = \phi(S_2), \end{aligned}$$

a miből a

$$d = \phi(S_2) - \phi(S_1) = \phi(\chi(S_1)) - \phi(S_1)$$

kapcsolat megadja a számításra alkalmas

$$m = \phi(S)$$

függvényt.

SCHWARZSCHILDnek a photographikus eljárásnak a feldolgozására vonatkozó ezt a módszerét volt tehát szándékunkban a visualis photometriában is teljes egészében alkalmazni. E módszer alapján tehát a csillagoknak két, valami « d » fényességkülönbséget tartalmazó képét ugyanannak a skálának értékeiben kellett a mérésre felhasználni a fényességre vonatkozólag. E követelménynek teljesen eleget teszünk, ha a csillagok extra- és intrafocalis képeinek eltűnését az oculárkihúzó skálaértékeiben megmérjük két, mindig állandó fényességet és fényességbeli különbséget mutató látómezőben.

Feladatunk elvi része ily módon megoldást nyervén, gondoskodnunk kellett műszerről, illetve ennek a cél követelményeinek megfelelő módon való berendezéséről.

A 125 mm objectív-nyílású Merz-Cooke refractor új berendezése photometriai megfigyelésekre.

Célunk megvalósítására fölötte alkalmasnak bizonyult a 125 mm objectív-nyílású Merz-Cooke refractor, mert a jelzett katalogus elkészítésekor egyelőre úgys csak a fényesebb csillagokra gondolhattunk, az ily szerény méretű távcső pedig majd a 6. rendű csillagokig alkalmas módszerünkre. Ehhez járult még, hogy a kérdéses refractor oculárkihúzója már skálával is fel volt szerelve. Látómezővilágítása azonban egyáltalán nem volt. A tervet az intézet igazgatója melegen felkarolta, átlátva tüstént intentionkat. A kivitelkor felmerült nehézségek az ő gyakorlati præcisiós munkához szokott keze alatt eloszlottak. Munkáját megkönnyítette az a körülmény, hogy az átépítés alatt levő 162 mm nyílású Merz-Cooke refractornak igen sok, teljesen jó karban levő alkotórésze mindjárt rendelkezésre is állott.

A 125 mm nyílású Merz-Cooke refractor photometriai célra való berendezésekor felmerült munka, illetve átalakítás, melynek az igazgató mint mechanikus meg akart felelni, egyes részleteiben a következő volt:

1. Az elektromos áramot be kellett vezetnie a távcsőbe oly módon, hogy a távcső látómezejét meg lehessen világítani teljesen egyenletesen és állandó erősségű fényben.

2. A távcsövet kitűnő szálas oculárral kellett ellátnia, hogy a mérés a látómezőnek mindig ugyanazon a helyén történhesék meg.

3. A látómezőmegvilágítást aránylag kis ellenállású lámpával kellett elérni, hogy rheostat alkalmas bekapcsolásával (megfelelő ellenállással) az áramkörbe kapcsolt voltmeterrel a fényerősséget állandó értékkel tarthassuk fenn.

4. Külön kézi lámpára is volt szükség, de ezt a látómező-lámpa áramától el kellett különíteni, hogy fényességbeli változást ne idézzon elő benne.

5. Áramelosztó kellett a távcsőre, hogy az áramot a megfelelő lámpákba irányíthassuk.

6. Rheostatra is szükség volt, hogy a 3. pontban vázolt czélt teljesen elérjük.

Az áram bevezetése végett két pár sarkcsipőt kapott a távcső. Ezek egyike felveszi az alulról jövő 100-voltos áramot és bevezeti abba a dugóba, melybe a kézi lámpát kapcsoljuk, a másik pár pedig a rheostatból jövő áramot veszi fel az áramelosztóba és továbbítja oly czélból, hogy innen az oculár látómezejének megvilágító lámpájába juthasson.

Az oculárokat (orthoscopicus oculár) HENSOLDT szállította Wetzlárból, a látómezőt megvilágító lámpa és a kézi lámpa az átépítés alatt levő 162 mm objectiv nyílású refractorról került le.

A rheostatot teljesen maga készítette az igazgató: a vastagabb dróttekereseket rheostan-sodronyból, a vékonyabbakat kruppin-sodronyból állította elő az esztergapadon. A rheostatot kapcsolókkal úgy lehet kombinálni, hogy előellenállásul lámpát, vagy folytonosan növelhető más ellenállást lehet még bekapcsolni. Ez az ellenállás-szekrény a voltmeterrel együtt a távcső kupolájának alsó helyiségében nyert elhelyezést, hogy az észlelési adatokat jegyző irnok a legkisebb ingadozást észrevehesse és a folytonos előellenállással a voltmeter segélyével tüstént ki-küszöbölhesse.

Ezekkel a photometriai berendezéshez szükséges minden alkotórész rendelkezésre állott, miután az egyes alkotórészekben mutatkozó minden olyan szükséges átalakítás, melyet az ógyallai szerény műhelyben nem lehetett megcsinálni, Budapesten Marx és Mérei tanszer és precisiós műszerkészítők műhelyében a cégtulajdonosok felügyelete alatt a legsikerültebb módon elkészült.

Arra kellett most még törekednünk, hogy spectral-photometerként is használhassuk a távcsövet. Erre a célra az oculár-fedő lemezére rotáló diaphragma vált szükségessé, hogy a benne levő nyílásokba helyezett színes üvegek úgy az összehasonlító fénynek, mint a csillagfénynek különböző értékű megszűrését eszközöljék. Ily módon a hány színes üveget alkalmazunk, annyi-féle magnitudorendszert állítunk elő, de mindet azonos módon ugyanannak a skálának értékeivel mérjük meg.

A *megfigyelések feldolgozása*. Az oculárfedőlemez megkapván a különböző színszűrő üvegeket tartalmazó diaphragmát az előnyösen ismert Töpfer-czég kezeiből, a kitűzött terv megvalósításába kezdhettünk volna; előgyakorlatul azonban czélszerűnek tartottuk azt a már önmagában is érdekes feladatot keresztülvinni, hogy a typicus változó csillagok fényváltozását megmérjük módszerünkkel a különböző színekben. A legelső kísérletek meglepő eredménynyel jártak, mert a photometriában előforduló felfogásbeli zavarok nem jelentkeztek az eltűnés megítélésében. A kinek a photometriában csak kis gyakorlata van, meg tudja ítélni, mily sok munkájába kerül az észlelőnek, míg a fényegyenlőség megítélésében állandó felfogást szerez, mert mindig különböző színű kis felületeket kénytelen összehasonlítani, holott a színek a látóidegekben azonos objectiv intensitás mellett feltétlen különböző ingereket hoznak létre, hogy az agyban a nekik megfelelő érzeteket okozzák. Sokszor zavarban van az észlelő, hogy mint döntse el a fényességbeli egyenlőséget két egyenlő nagyságú kis felületnél, ha ezek között a legkisebb észrevehető színbeli eltérés van.

Ezeknek a zavaró körülményeknek nem jelentkezése, sőt a színbeli eltérés okozta fényességbeli különbségek teljes érvényesülése már is a legmeglepőbb eredményeket sejtette, melyek a szokásos visualis módszereknél mind észrevétlenül, vagy meg nem mérhetőségük miatt tudva elhanyagoltattak.

Első kísérleteinknek ez a sikeres eredménye arra ösztökélt bennünket, hogy a β Lyræ, az η Aquilæ és a δ Cephei fényváltozó csillagok fényváltozását tüzetes vizsgálattal ezen az úton a vörös, a sárga, a zöld és kék színekben külön-külön és sárgászöld összetett fényű látómező-megvilágítás mellett is meghatározzuk.

A következőkben ezeket az észleleteket és ezeknek a feldolgozását bátorkodunk a Tekintetes Akadémia elé terjeszteni.

Az észleletek feldolgozásakor az volt a legelső feladatunk, hogy a használt kétféle látómezőmegvilágításnál a csillagok extra-, illetve intrafocalis képeihez fényességük eltűnésekor nyert (S_1 , S_2) értékpárok összefüggését megállapítsuk úgy az extrafocalis, mint az intrafocalis képekre. Az összetartozó (S_1 , S_2) értékpárokat

színek szerint csoportosítottuk, azután az $S_2 - S_1$ különbséget ordinatának, az $\frac{S_1 + S_2}{2} = T$ értéket abscissának fogva fel, a graphikonból előállítottuk az

$$S_2 - S_1 = \gamma\left(\frac{S_1 + S_2}{2}\right) = \gamma(T)$$

függvényt. Úgy találtuk, hogy az összes színekre $\gamma(T)$ igen nagy megközelítéssel ugyanaz az egyenes. Erre az összes értékeket egyesítettük, hogy a számítást a közepes skálagörbével hajtsuk végre.

A focuson kívül eltűnő képeknél az egyesített adatok voltak:

| $S_2 - S_1$ | $\frac{S_1 + S_2}{2} = T$ |
|-------------|---------------------------|
| 6.8 | 81.1 |
| 13.6 | 87.1 |
| 10.9 | 85.5 |
| 18.3 | 96.6 |
| 4.0 | 77.2 |
| 5.8 | 79.9 |
| 8.2 | 83.8 |
| 9.7 | 86.0 |
| 14.2 | 91.1 |
| 6.0 | 79.2 |
| 8.8 | 82.8 |
| 12.0 | 86.4 |
| 17.4 | 94.4 |
| 2.3 | 75.2 |
| 4.3 | 77.2 |
| 4.5 | 80.1 |
| 6.2 | 82.8 |

Ezekből, ha

$$S_2 - S_1 = y, \quad \frac{S_1 + S_2}{2} = x, \quad S_2 - S_1 = \gamma(T),$$

kapjuk, hogy

$$17.5y - 13.5x + 972 = 0,$$

azaz :

$$\eta(T) = \frac{13.5}{17.5} T - \frac{972}{17.5}.$$

Az intrafocalis képek eltűnésének összetartozó adataira pedig:

| $S_2 - S_1$ | $\frac{S_1 + S_2}{2}$ |
|-------------|-----------------------|
| 6.6 | 61.2 |
| 11.8 | 56.8 |
| 12.8 | 53.0 |
| 18.1 | 46.4 |
| 4.6 | 63.5 |
| 6.5 | 61.6 |
| 9.0 | 57.3 |
| 10.6 | 54.1 |
| 13.5 | 50.1 |
| 6.0 | 61.8 |
| 9.8 | 58.5 |
| 11.1 | 55.3 |
| 15.0 | 48.6 |
| 2.4 | 66.0 |
| 3.2 | 64.5 |
| 4.1 | 62.1 |
| 5.8 | 60.2 |
| 7.0 | 57.5 |

értékpárokat nyertük, melyek lineáris összefüggése a fenti rövid jelzésekkel :

$$16y + 12x - 836 = 0,$$

azaz :

$$\begin{aligned} \eta(T) &= -\frac{12}{16} T + \frac{836}{16} \\ &= -\frac{3}{4} T + \frac{209}{4}. \end{aligned}$$

A

$$d = \phi(S_2) - \phi(S_1),$$

vagy S_1 , S_2 értékeket T -vel és $\eta(T)$ -vel kifejezve, a

$$d = \phi(T + \tfrac{1}{2}\eta(T)) - \phi(T - \tfrac{1}{2}\eta(T))$$

kapcsolatból levezethető, hogy

$$\eta(T) = 2 \frac{b-1}{b+1} (T-a);$$

linearis vonatkozás esetén:

$$m = \phi(T) = \frac{d}{\log b} \log(T-a).$$

Ennélfogva az extrafocalis csillagképek eltűnéséhez tartozó skálaértékek fényesség-értékei:

$$m = \frac{d}{0.3826} \log(S-72)$$

képlettel számítandók.

Az intrafocalis csillagképek eltűnésének skálaértékeihez pedig az

$$m = \frac{d}{0.3445} \log(S-70)$$

szolgáltatja a kívánt fényességeket.

Ha ezekben d fényességkülönbség értékét ismernők, az S skálaértékekhez tartozó fényességek adottak lennének egészen önkényes kezdőértékű rendszerben.

A « d » mennyiség értékét kétféleképp határoztuk meg: 1. két azonos színű csillag potsdami nagyságrendkülönbségéből; 2. a TÖPFER-féle ekphotometerrel.

Két csillag:

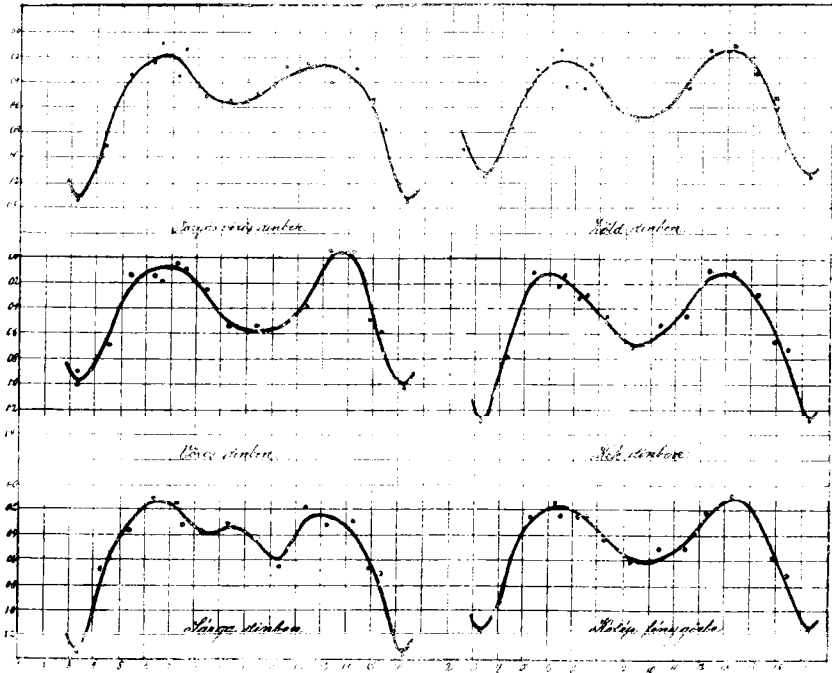
| | P. Gr. |
|------------------|--------|
| 1 Pegasi | 4.24 |
| ϵ Cygni | 2.72 |

potsdami nagyságrendjének különbségéből kaptuk, hogy

$$d = 1.48.$$

Hogy d -nek ezt az értékét az extinctio ne befolyásolhassa nagyon, igyekeztünk kis zenithtávolságoknál végrehajtani az észlelést.

A TÖFFER-féle ékphotometerrel pedig úgy állapítottuk meg a d értékét, hogy a kétféle látómezőmegvilágításnál, melylyel tulajdonkép előállítottuk a d fényességkülönbséget, megmértük számos csillag fényességét minden egyes színszűrőn át. A csil-



1. ábra. β Lyrae fénygörbéi.

lagok fényességének különbsége volt a már régebben nagy észlelet-sorozatokkal meghatározott $\frac{1}{6}$ nagyságú ékállandóval:

$$1.52 = d.$$

A reductiót tehát a

$$d = 1.50$$

értékkel hajtottuk végre, mely az extrafocalis képekre:

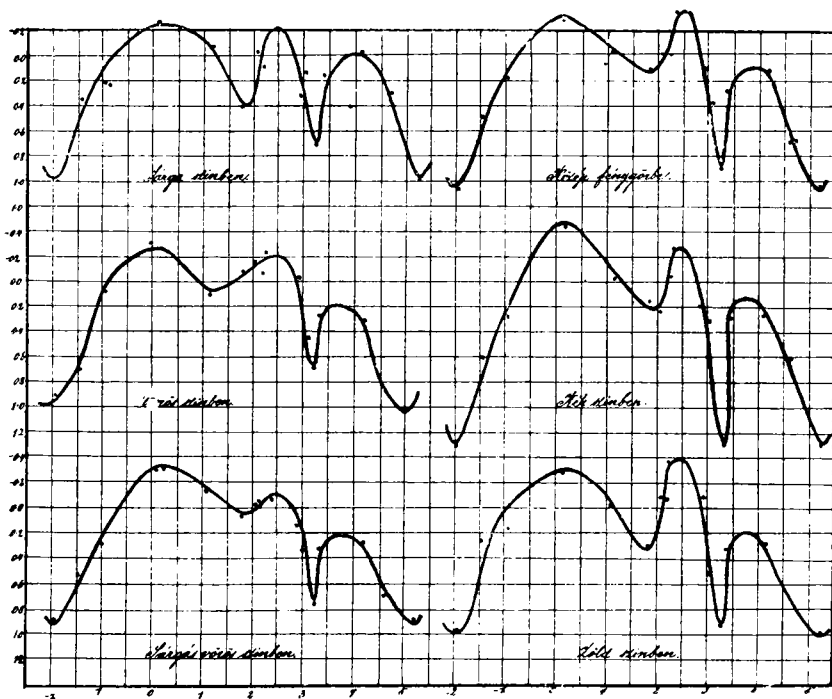
$$m = [0.5875] \log (S-72),$$

az intrafocalis képekre pedig :

$$m = [0.6331] \log (S - 70)$$

reductió s fényességi egyenletekhez vezetett.

A reductio gyorsítása végett a fényességi adatokat táblázatba foglaltuk: a II. táblázat tartalmazza ezeket az értékeket, benne csak az intrafocalis képek skálaértékeihez tartozó fényességek



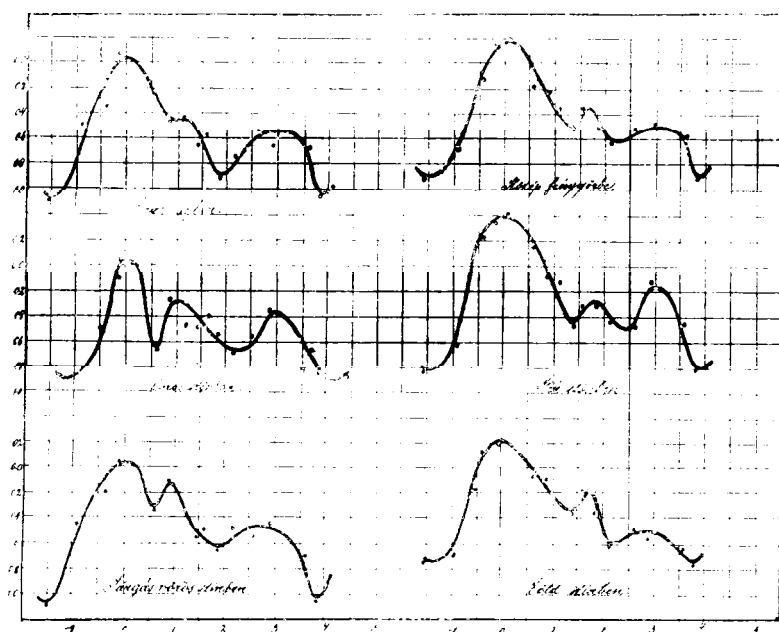
2. ábra. η Aquilae fénygörbéi.

egyébként is egészen önkényes kezdőértékét 0.57 nagyságrenddel gyöngítettük a későbbiekben kiderülő okból.

Az észleleti hibák csökkentése végett pedig felkerestük az ugyanarra a csillagra vonatkozó extrafocalis és intrafocalis adatok kapcsolatát, természetesen ugyanazon látómezőbeli megvilágítás mellett. Ezek az adatok is lineáris vonatkozásban voltak egymással a választott megvilágításoknál.

Ezekkel az adatokkal aztán minden egyes extrafocalis értékhez megkerestük a helyes intrafocalis adatot, az észlelt intrafocalis adathoz pedig a görbe extrafocalis adatát, hogy a reduktóban az észlelt és a görbéből vett adatok közepét használjuk fel a pontosság jobbítása végett.

A levegő extinciója a főbb színeknél. A második fontos feladatunk volt a levegő extinciójának megfigyelése a főbb spectralszíneknél. Ennek az adatnak pontos ismeretét nem lehet



3. ábra. δ Cephei fénygörbéi.

elégé kiemelni a photometriában. Egyrészt ebből a szempontból, másrészt a módszerünk természetében rejlő oknál fogva is különös gondot kellett fordítanunk arra, hogy az észleletek reduktójának pontos keresztülvitele érdekében lehető széles terjedelemben ejtsük meg extincióvizsgálatainkat.

Az extinció szokásos képletét kiegészítettük még egy taggal, mely a levegő relatív nedvességének befolyását veteti velünk

figyelembe. A szokásos extinctio-táblák a levegő fényelnyelő képességét astrophysikai szempontból a levegőnek közepes állapotára adják, holott az extinctio jelentékeny változásnak van alávetve a légköri viszonyok változásának megfelelőleg. A légkörünk állapotának változását főbb részben a relativ nedvesség megváltozásában látjuk visszatükröződni, azért indokoltnak láttuk csupán ennek a tényezőnek befolyását számításba venni az

$$m_1 - m_0 = -\frac{1}{0.4} \log p_i \left(\frac{a_z}{a_0} \sec z - 1 \right) - \frac{1}{0.4} \log (\pi_i) (N - N_{50}) \sec z$$

képlet alapján, melyben p_i értéket az 50%-os relativ nedvességű közepes állapotú levegő fényátbocsátási együtthatójának akarjuk tekinteni valamely színnél, a (π_i) pedig a levegő relativ nedvességével összefüggő fényátbocsátási együttható.

E képlettel számított extinctioészleléseinkről a részletes áttekintést az I. táblázat adja meg, melyben a relativ nedvességre vonatkozó adatokat SZABÓ BÁLINT meteorologus barátom volt szíves rendelkezésünkre bocsátani.

A p_i és (π_i) értékekre vonatkozó egyenletek a II. táblázat után következnek, a középen felírt egyenletek az összetett fényre vonatkoznak, az 1., 2., 3. és 4. alatt jelzett adatok pedig a vörös, sárga, zöld és kék színű fényre.

Ezekben az egyenletekben:

$$-\frac{1}{0.4} \log p = a, \quad -\frac{1}{0.4} \log (\pi_i) = b.$$

I. táblázat.

Az extinctio-megfigyelések.

| A csillag neve | Az észlelés ideje csillagidőben | Zenithtávolság | A levegő relatív nedvessége |
|-------------------|--|-------------------------------------|-----------------------------|
| β Sagittae | 1913 okt. 25. 23 ^h 36 ^m — 0 ^h 46 ^m | 57.3 ^o 68.8 ^o | 95%—97% |
| | « « 26. 23 42 — 1 16 | 58.0 74.2 | 85 « —86 « |
| | « « 27. 23 50 — 1 12 | 59.3 73.5 | 99 « —99 « |
| | « « 31. 22 56 — 1 10 | 50.8 73.3 | 92 « —95 « |
| δ Sagittae | 1913 okt. 23. 23 ^h 48 ^m — 1 ^h 22 ^m | 57.2 73.4 | 87%—87% |
| | « « 25. 23 40 — 0 48 | 55.9 67.3 | 95 « —97 « |
| | « « 26. 23 46 — 1 28 | 57.2 73.9 | 85 « —86 « |
| | « « 27. 23 54 — 1 16 | 58.5 72.0 | 99 « —99 « |
| | « « 28. 21 35 — 1 35 | 37.4 75.2 | 75 « —73 « |
| | « « 31. 22 58 — 1 13 | 49.5 71.3 | 92 « —95 « |
| 1 Pegasi | 1913 nov. 21. 1 ^h 27 ^m — 2 ^h 32 ^m | 57.7 69.1 | 73%—77% |
| | « « 24. 1 14 — 3 04 | 55.7 73.2 | 93 « —96 « |
| | « decz. 1. 22 50 — 2 30 | 32.7 67.9 | 75 « —83 « |
| | « « 3. 23 20 — 2 34 | 38.0 68.5 | 89 « —81 « |
| | « « 4. 22 48 — 2 36 | 36.0 68.6 | 78 « —89 « |
| | « « 19. 23 52 — 2 50 | 42.3 70.8 | 80 « —86 « |
| 2 Pegasi | 1913 nov. 21. 1 ^h 31 ^m — 2 ^h 36 ^m | 53.9 65.1 | 73%—77% |
| | « « 24. 1 18 — 3 07 | 51.9 70.4 | 93 « —96 « |
| | « decz. 1. 22 56 — 2 36 | 30.8 65.1 | 75 « —83 « |
| | « « 3. 23 23 — 2 36 | 34.3 65.1 | 89 « —81 « |
| | « « 4. 22 50 — 2 45 | 30.6 66.5 | 78 « —89 « |
| ϵ Pegasi | 1913 nov. 21. 1 ^h 35 ^m — 2 ^h 40 ^m | 62.6 72.3 | 73%—77% |
| | « « 24. 1 22 — 3 12 | 60.6 81.9 | 93 « —96 « |
| | « decz. 1. 23 00 — 2 40 | 42.4 72.3 | 75 « —83 « |
| | « « 3. 23 28 — 2 40 | 45.1 72.3 | 89 « —81 « |
| | « « 4. 22 47 — 2 40 | 41.2 72.3 | 78 « —89 « |
| | « « 19. 0 00 — 2 56 | 48.4 75.7 | 80 « —86 « |
| | « « 19. 0 00 — 2 56 | 48.4 75.7 | 80 « —86 « |
| θ Pegasi | 1913 nov. 21. 1 ^h 39 ^m — 2 ^h 44 ^m | 62.3 72.4 | 73%—77% |
| | « « 24. 1 28 — 3 14 | 60.4 77.0 | 93 « —96 « |
| | « decz. 1. 23 04 — 2 48 | 44.1 73.1 | 75 « —83 « |
| | « « 3. 23 32 — 2 48 | 46.4 73.1 | 89 « —81 « |
| | « « 4. 23 00 — 2 48 | 44.0 73.1 | 78 « —89 « |
| | « « 7. 1 10 — 3 32 | 57.5 80.6 | 91 « —95 « |
| | « « 19. 0 06 — 3 05 | 49.4 75.7 | 80 « —86 « |
| ϵ Cygni | 1913 decz. 1. 23 ^h 14 ^m — 2 ^h 55 ^m | 32.4 68.2 | 75%—83% |
| | « « 3. 23 40 — 2 55 | 36.0 68.2 | 89 « —81 « |
| | « « 4. 23 08 — 3 08 | 31.1 70.0 | 78 « —89 « |
| | « « 8. 1 52 — 4 00 | 58.2 77.3 | 86 « —87 « |
| | « « 19. 0 10 — 3 23 | 43.7 72.2 | 80 « —86 « |
| | « « 20. 1 03 — 4 11 | 50.4 79.0 | 90 « —93 « |
| | 1914 jan. 12. 1 51 — 4 33 | 56.9 82.1 | 88 « —93 « |
| | « « 18. 3 10 — 4 56 | 70.6 84.0 | 92 « —95 « |

| A csillag neve | Az észlelés ideje csillagidőben | Zenithtávolság | | A levegő relatív nedvessége |
|---|---|----------------|------|-----------------------------------|
| γ Cygni | 1913 nov. 24. 1 ^h 30 ^m — 3 ^h 16 ^m | 44.8 | 69.4 | 93%—96% |
| | « dec. 1. 23 10 — 2 50 | 31.5 | 66.2 | 75 « —83 « |
| | « « 3. 23 37 — 2 50 | 36.0 | 66.2 | 89 « —81 « |
| | « « 4. 23 03 — 3 03 | 30.2 | 67.8 | 78 « —89 « |
| | « « 7. 1 21 — 3 40 | 52.7 | 72.7 | 91 « —95 « |
| | « « 8. 1 47 — 3 52 | 56.7 | 74.0 | 86 « —87 « |
| γ Cygni | « « 20. 0 54 — 4 03 | 48.7 | 75.5 | 90 « —93 « |
| | 1914 jan. 12. 1 ^h 56 ^m — 4 ^h 12 ^m | 58.0 | 76.5 | 88%—93% |
| | « « 13. 2 20 — 4 48 | 61.1 | 80.4 | 84 « —89 « |
| η Pegasi α Cygni α Pegasi α Pegasi α Cygni | « « 18. 3 12 — 4 54 | 68.9 | 81.2 | 92 « —95 « |
| | 1914 jan. 12. 1 ^h 38 ^m — 4 ^h 36 ^m | 38.8 | 77.0 | 88%—93% |
| | « « 12. 1 58 — 4 28 | 52.6 | 72.2 | 88 « —93 « |
| | « « 12. 2 02 — 4 24 | 49.7 | 73.2 | 88 « —93 « |
| | « « 13. 2 16 — 4 52 | 52.2 | 78.0 | 84 « —89 « |
| | « « 18. 3 15 — 4 52 | 63.2 | 75.0 | 92 « —95 « |

II. táblázat.

Skálaértékek nagyságrendben.

| S_k | Fényesség | S_k | Fényesség | S_b | Fényesség | S_b | Fényesség |
|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|
| 74 | 1.16 | 93 | 5.11 | 67 | 1.58 | 48 | 5.20 |
| 75 | 1.85 | 94 | 5.19 | 66 | 2.02 | 47 | 5.28 |
| 76 | 2.33 | 95 | 5.27 | 65 | 2.46 | 46 | 5.36 |
| 77 | 2.73 | 96 | 5.34 | 64 | 2.77 | 45 | 5.43 |
| 78 | 3.01 | 97 | 5.41 | 63 | 3.06 | 44 | 5.50 |
| 79 | 3.27 | 98 | 5.48 | 62 | 3.31 | 43 | 5.57 |
| 80 | 3.50 | 99 | 5.54 | 61 | 3.53 | 42 | 5.64 |
| 81 | 3.70 | 100 | 5.60 | 60 | 3.73 | 41 | 5.71 |
| 82 | 3.87 | 101 | 5.67 | 59 | 3.91 | 40 | 5.77 |
| 83 | 4.03 | 102 | 5.72 | 58 | 4.07 | 39 | 5.83 |
| 84 | 4.18 | 103 | 5.77 | 57 | 4.21 | 38 | 5.89 |
| 85 | 4.31 | 104 | 5.82 | 56 | 4.35 | 37 | 5.95 |
| 86 | 4.43 | 105 | 5.87 | 55 | 4.48 | 36 | 6.01 |
| 87 | 4.54 | 106 | 5.92 | 54 | 4.61 | 35 | 6.06 |
| 88 | 4.65 | 107 | 5.97 | 53 | 4.72 | 34 | 6.11 |
| 89 | 4.76 | 108 | 6.01 | 52 | 4.83 | 33 | 6.16 |
| 90 | 4.86 | 109 | 6.06 | 51 | 4.93 | 32 | 6.21 |
| 91 | 4.95 | 110 | 6.10 | 50 | 5.02 | 31 | 6.26 |
| 92 | 5.03 | | | 49 | 5.11 | | |
| 93 | 5.11 | | | 48 | 5.20 | | |

Extinctió egyenleteink tehát az egyes megfigyelt csillagokra lesznek rendre:

| | β Sagittæ-re: | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------|-------------------------|------|------|------|------|
| 1913 okt. 25 | $0.74=0.94a+41.2b$ | 0.40 | 0.75 | 1.03 | 0.96 |
| " " 26 | $1.26=1.74a+63.5b$ | 0.70 | 1.05 | 1.33 | 1.56 |
| " " 27 | $0.69=1.53a+76.4b$ | 0.58 | 0.92 | 0.83 | 1.27 |
| " " 31 | $0.97=1.86a+83.7b$ | 0.55 | 0.53 | 0.73 | 0.84 |
| | S Sagittæ-re: | | | | |
| 1913 okt. 23 | $0.94=1.62a+59.1b$ | 0.77 | 1.02 | 1.09 | 1.33 |
| " " 25 | $0.56=0.80a+36.3b$ | 0.11 | 0.36 | 0.44 | 0.64 |
| " " 26 | $0.81=1.73a+64.2b$ | 0.24 | 0.85 | 0.99 | 0.98 |
| " " 27 | $0.69=1.30a+64.8b$ | 0.60 | 0.40 | 0.58 | 0.80 |
| " " 28 | $1.08=2.61a+64.0b$ | 1.02 | 0.92 | 0.98 | 1.15 |
| " " 31 | $0.48=1.55a+69.7b$ | 0.58 | 0.44 | 0.89 | 0.94 |
| | 1 Pegasira: | | | | |
| 1913 nov. 21 | $0.31=0.92a+22.6b$ | 0.40 | 0.42 | 0.34 | 0.71 |
| " " 24 | $0.65=1.64a+75.6b$ | 0.32 | 0.63 | 0.72 | 0.68 |
| " decz. 1 | $0.43=1.45a+42.9b$ | 0.60 | 0.60 | 0.73 | 0.61 |
| " " 3 | $0.53=1.44a+51.1b$ | 0.11 | 0.54 | 0.49 | 0.72 |
| " " 4 | $0.80=1.51a+49.5b$ | 0.71 | 0.35 | 0.46 | 0.81 |
| " " 19 | $0.42=1.67a+55.8b$ | 0.41 | 0.46 | 0.58 | 0.62 |
| | 2 Pegasira: | | | | |
| 1913 nov. 21 | $0.33=0.67a+16.0b$ | 0.43 | 0.25 | 0.16 | 0.28 |
| " " 24 | $0.70=1.34a+60.6b$ | 0.41 | 0.55 | 0.51 | 0.78 |
| " decz. 1 | $0.49=1.20a+34.8b$ | 0.48 | 0.74 | 0.42 | 0.65 |
| " " 3 | $0.50=1.15a+38.1b$ | 0.48 | 0.59 | 0.44 | 0.46 |
| " " 4 | $0.68=1.34a+44.3b$ | 0.71 | 0.92 | 0.56 | 1.06 |
| | ε Pegasira: | | | | |
| 1913 nov. 21 | $0.44=1.10a+26.8b$ | 0.29 | 0.45 | 0.33 | 0.39 |
| " " 24 | $0.90=4.72a+230.5b$ | 0.68 | 1.00 | 0.91 | 1.45 |
| " decz. 1 | $0.63=1.91a+56.5b$ | 0.28 | 0.38 | 0.81 | 0.63 |
| " " 3 | $0.72=1.85a+65.8b$ | 0.72 | 0.69 | 0.75 | 0.75 |
| " " 4 | $0.82=1.93a+64.9b$ | 0.51 | 0.37 | 0.45 | 0.80 |
| " " 19 | $0.68=2.47a+111.6b$ | 0.24 | 0.38 | 0.56 | 0.64 |
| " " 19 | $0.77=2.47a+111.6b$ | 0.43 | 0.48 | 0.51 | 0.80 |
| | δ Pegasira: | | | | |
| 1913 nov. 21 | $0.69=1.12a+28.6b$ | 0.35 | 0.58 | 0.61 | 1.02 |
| " " 24 | $1.28=2.34a+108.9b$ | 0.80 | 1.04 | 1.42 | 1.69 |
| " decz. 1 | $0.89=2.02a+57.7b$ | 0.35 | 0.47 | 0.88 | 1.00 |
| " " 3 | $1.17=1.96a+68.2b$ | 0.74 | 0.93 | 1.21 | 1.19 |
| " " 4 | $0.89=2.01a+70.1b$ | 0.93 | 0.99 | 0.75 | 0.85 |
| " " 7 | $1.49=4.21a+189.3b$ | 1.10 | 1.46 | 1.86 | 2.23 |
| " " 19 | $0.68=2.44a+82.6b$ | 0.70 | 0.55 | 0.71 | 1.06 |

| ε Cygnire : | | | | | |
|-------------------------|---------------------|------|------|------|------|
| 1913 decz. 1 | $0.57=1.49a+ 42.1b$ | 0.46 | 0.39 | 0.41 | 0.72 |
| “ “ 3 | $0.57=1.43a+ 49.5b$ | 0.63 | 1.06 | 0.72 | 0.73 |
| “ “ 4 | $0.90=1.73a+ 59.6b$ | 0.78 | 0.73 | 0.97 | 1.13 |
| “ “ 8 | $0.95=2.58a+ 95.9b$ | 1.26 | 0.92 | 0.82 | 1.22 |
| “ “ 19 | $0.44=1.85a+ 62.2b$ | 0.32 | 0.17 | 0.26 | 0.43 |
| “ “ 20 | $1.61=3.52a+154.3b$ | 1.34 | 1.53 | 1.65 | 2.23 |
| 1914 jan. 12 | $2.05=5.13a+219.0b$ | 1.75 | 2.00 | 2.16 | 2.73 |
| “ “ 18 | $1.53=5.78a+282.0b$ | 0.89 | 1.80 | 2.15 | 2.54 |
| γ Cygnire : | | | | | |
| 1914 nov. 24 | $0.76=1.42a+ 64.0b$ | 0.85 | 0.71 | 0.59 | 0.75 |
| “ decz. 1 | $0.45=1.29a+ 36.4b$ | 0.36 | 0.58 | 0.73 | 0.87 |
| “ “ 3 | $0.67=1.22a+ 42.2a$ | 0.79 | 1.14 | 0.78 | 1.03 |
| “ “ 4 | $0.83=1.47a+ 50.8b$ | 0.72 | 0.74 | 0.63 | 1.16 |
| “ “ 7 | $0.48=1.68a+ 73.3b$ | 0.87 | 0.75 | 0.49 | 0.95 |
| “ “ 8 | $0.60=1.67a+ 65.2b$ | 0.82 | 0.61 | 0.69 | 0.74 |
| “ “ 20 | $1.29=2.38a+104.1b$ | 1.26 | 1.29 | 1.19 | 1.26 |
| γ Cygnire : | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1914 jan. 12 | $1.36=2.33a+ 95.8b$ | 1.13 | 1.29 | 1.36 | 1.56 |
| “ “ 13 | $1.34=3.70a+141.1b$ | 0.48 | 0.97 | 0.93 | 1.31 |
| “ “ 18 | $0.80=3.47a+167.4b$ | 0.76 | 1.16 | 1.67 | 1.74 |
| η Pegasira : | | | | | |
| 1914 jan. 12 | $1.31=3.07a+126.4b$ | 1.14 | 1.66 | 1.61 | 1.46 |
| α Cygnire : | | | | | |
| 1914 jan. 12 | $0.94=1.58a+ 64.6b$ | 0.60 | 0.88 | 1.07 | 1.33 |
| α Pegasira : | | | | | |
| 1914 jan. 12 | $1.06=1.87a+ 76.4b$ | 0.93 | 1.34 | 0.99 | 1.02 |
| “ “ 13 | $1.03=3.17a+114.5b$ | 0.72 | 1.45 | 1.19 | 1.62 |
| α Cygnire : | | | | | |
| 1914 jan. 18 | $0.83=1.60a+ 74.2b$ | 0.69 | 0.20 | 1.06 | 1.68 |

A legkisebb négyzetek elméletével való feldolgozásra az egyes csoportokból közepet képeztünk. Ezek az egyenletek rendre :

| | | | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|---|----------------|
| $1.51a+ 66.2b=0.92$ | 0.66 | 0.81 | 0.98 | 1.16 | 4 | megfigyelésből |
| $1.60a+ 59.6b=0.76$ | 0.55 | 0.67 | 0.83 | 0.97 | 6 | “ |
| $1.66a+ 49.6b=0.52$ | 0.44 | 0.50 | 0.55 | 0.69 | 6 | “ |
| $1.14a+ 38.8b=0.54$ | 0.50 | 0.61 | 0.44 | 0.65 | 5 | “ |
| $2.35a+ 95.4b=0.71$ | 0.47 | 0.54 | 0.62 | 0.78 | 7 | “ |
| $2.58a+ 86.5b=1.01$ | 0.71 | 0.86 | 1.06 | 1.29 | 7 | “ |
| $2.98a+120.6b=1.08$ | 0.93 | 1.07 | 1.14 | 1.46 | 8 | “ |
| $1.59a+ 62.3b=0.73$ | 0.81 | 0.83 | 0.73 | 0.97 | 7 | “ |
| $3.17a+134.8b=1.17$ | 0.79 | 1.14 | 1.32 | 1.54 | 3 | “ |
| $2.22a+ 91.2b=1.03$ | 0.82 | 1.11 | 1.18 | 1.42 | 5 | “ |

A súlyok négyzetgyökével szorzott egyenletrendszerek tehát:

| | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|
| $3.02a+132.4b=1.84$ | 1.32 | 1.62 | 1.96 | 2.32 |
| $3.92a+146.0b=1.86$ | 1.35 | 1.64 | 2.03 | 2.38 |
| $4.06a+121.5b=1.52$ | 1.08 | 1.23 | 1.35 | 1.69 |
| $2.55a+86.8b=1.21$ | 1.12 | 1.37 | 0.98 | 1.45 |
| $6.23a+252.4b=1.88$ | 1.25 | 1.43 | 1.64 | 2.06 |
| $6.83a+228.9b=2.68$ | 1.88 | 2.28 | 2.80 | 3.41 |
| $8.34a+341.1b=3.06$ | 2.63 | 3.03 | 3.23 | 4.13 |
| $4.22a+168.8b=1.94$ | 2.14 | 2.20 | 1.93 | 2.57 |
| $5.50a+233.5b=2.03$ | 1.37 | 1.97 | 2.29 | 2.67 |
| $4.97a+203.8b=2.31$ | 1.83 | 2.48 | 2.64 | 3.18 |

Ha ezekben az egyenletrendszerekben a

$$8.43a=x \quad 341.1b=y$$

$$\varepsilon_0=3.06 \quad \varepsilon_1=2.63 \quad \varepsilon_2=3.03 \quad \varepsilon_3=3.23 \quad \varepsilon_4=4.13$$

helyettesítéseket végrehajtjuk, a számításra közvetlenül alkalmazható rendszereink lesznek:

| | | | | |
|-------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $0.358x+0.388y=0.601 \varepsilon_0$ | $0.502 \varepsilon_1$ | $0.535 \varepsilon_2$ | $0.607 \varepsilon_3$ | $0.563 \varepsilon_4$ |
| $0.465x+0.428y=0.608 \varepsilon$ | 0.513ε | 0.541ε | 0.628ε | 0.577ε |
| $0.482x+0.356y=0.497 \varepsilon$ | 0.411ε | 0.406ε | 0.418ε | 0.410ε |
| $0.302x+0.255y=0.397 \varepsilon$ | 0.426ε | 0.453ε | 0.303ε | 0.351ε |
| $0.739x+0.740y=0.615 \varepsilon$ | 0.475ε | 0.472ε | 0.508ε | 0.498ε |
| $0.810x+0.671y=0.876 \varepsilon$ | 0.715ε | 0.752ε | 0.867ε | 0.826ε |
| $1.000x+1.000y=1.000 \varepsilon$ | 1.000ε | 1.000ε | 1.000ε | 1.000ε |
| $0.502x+0.483y=0.634 \varepsilon$ | 0.814ε | 0.726ε | 0.597ε | 0.622ε |
| $0.652x+0.684y=0.663 \varepsilon$ | 0.522ε | 0.650ε | 0.709ε | 0.647ε |
| $0.590x+0.596y=0.755 \varepsilon$ | 0.696ε | 0.820ε | 0.818ε | 0.770ε |

Az egyes rendszerek normalegyenletei rendre:

$$3.8953x+3.7169y=4.2077$$

$$3.7169x+3.5796y=4.0242$$

a vöröses sárga összetett fényre;

$$3.8953x+3.7169y=3.8348$$

$$3.7169x+3.5796y=3.6656$$

a vörös fényre;

$$3.8953x+3.7169y=4.0056$$

$$3.7169x+3.5796y=3.8370$$

a sárga fényre;

$$3.8953x + 3.7169y = 4.1246$$

$$3.7169x + 3.5796y = 3.9505$$

a zöld fényre;

$$3.8953x + 3.7169y = 3.9984$$

$$3.7169x + 3.5796y = 3.8255$$

a kék színű fényre.

Ezekből a fényátbocsátási együtthatók az 50%-os relatív nedvességű közepes állapotú levegőre, illetve a páratartalomtól függő tényezőkre vonatkozólag a fenti színeknél

$$p_k = 0.766 \quad (\pi_k) = 0.9978$$

$$p_1 = 0.797 \quad (\pi_1) = 0.9987$$

$$p_2 = 0.822 \quad (\pi_2) = 0.9971$$

$$p_3 = 0.815 \quad (\pi_3) = 0.9957$$

$$p_4 = 0.723 \quad (\pi_4) = 0.9968$$

értékek lesznek.

A p -kből nyert közép

$$p_m = 0.787$$

teljesen egyezik G. MÜLLER értékével.

Extinctioérték-számításkor a p_1 , p_2 , p_3 adatokból közepet vettünk, mert lényeges eltérés bizonyára itt nincs; ezzel a középvel és a p_k , p_4 adatokkal számított extinctioértékeket a III. táblázat tartalmazza.

A relatív páratartalomtól függő extinctioértékeket pedig a IV. táblázatban állítottuk össze, az összes (π) értékekből közepet képezve.

III. táblázat.

Extinctio-értékek
az 50 %-os relatív nedvességű közepes állapotú levegőre.

| Zenithtávolság | Vörös színű Sárga „ Zöld „ fénynél | Összetett fénynél | Kékes színű fénynél |
|----------------|---|----------------------|------------------------|
| 40° | 0.07 | 0.09 | 0.11 |
| 45 | 0.09 | 0.12 | 0.15 |
| 50 | 0.13 | 0.16 | 0.20 |
| 55 | 0.17 | 0.21 | 0.26 |
| 60 | 0.23 | 0.29 | 0.35 |
| 65 | 0.31 | 0.39 | 0.48 |
| 70 | 0.43 | 0.55 | 0.67 |
| 75 | 0.66 | 0.84 | 1.01 |
| 80 | 1.04 | 1.32 | 1.60 |
| 81 | 1.18 | 1.49 | 1.80 |
| 82 | 1.32 | 1.69 | 2.05 |
| 83 | 1.52 | 1.96 | 2.40 |
| 84 | 1.77 | 2.26 | 2.80 |
| 85 | 2.10 | 2.67 | 3.32 |

IV. táblázat.

A páratartalomtól függő extinctio-értékek.

| Zenithtávolság | 50 % | 60 % | 70 % | 80 % | 90 % | 100 % |
|----------------|------|------|------|------|------|-------|
| 40° | 0.00 | 0.04 | 0.08 | 0.12 | 0.16 | 0.20 |
| 45 | 0.00 | 0.04 | 0.08 | 0.13 | 0.17 | 0.22 |
| 50 | 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 |
| 55 | 0.00 | 0.05 | 0.11 | 0.16 | 0.22 | 0.27 |
| 60 | 0.00 | 0.06 | 0.12 | 0.18 | 0.24 | 0.30 |
| 65 | 0.00 | 0.07 | 0.14 | 0.21 | 0.28 | 0.35 |
| 70 | 0.00 | 0.09 | 0.18 | 0.26 | 0.35 | 0.44 |
| 75 | 0.00 | 0.12 | 0.24 | 0.36 | 0.48 | 0.60 |
| 80 | 0.00 | 0.17 | 0.34 | 0.52 | 0.69 | 0.86 |
| 81 | 0.00 | 0.19 | 0.38 | 0.58 | 0.77 | 0.96 |
| 82 | 0.00 | 0.21 | 0.42 | 0.65 | 0.86 | 1.07 |
| 83 | 0.00 | 0.25 | 0.51 | 0.78 | 1.03 | 1.29 |
| 84 | 0.00 | 0.29 | 0.60 | 0.91 | 1.20 | 1.53 |
| 85 | 0.00 | 0.34 | 0.69 | 1.03 | 1.37 | 1.72 |

Ily módon a módszerünk kívánta előfeltételeket előállítván, a programmszerű észleletek feldolgozásának semmi sem állja útját.

A β Lyrae, az η Aquilae és δ Cephei spectralphotometrikus

megfigyelései. Erre a három tipikus változó csillagra vonatkozó spectralphotometrikus megfigyeléseinket és ezeknek a fénygörbe szempontjából való feldolgozását az V—XIII. táblázatba foglaltuk.

A β Lyræ összehasonlítója γ Lyræ; az η Aquilæ-é β Aquilæ; a δ Cephei-é pedig ζ Cephei.

A phasisokat β Lyrænél PANNEKOEK formulája:

1855 jan. $6^d 604 + 12^d 908009E + 0.000003855E^2$ szerint számítottuk, mely a főminimum idejére szól; az η Aquilæ-re és a δ Cepheire a «Vierteljahrschrift der Astron. Gesellschaft, 48. Jahrg. 4. Heft»-ben levő formulákat használtuk. E szerint az η Aquilæ maximumának ideje julianusi periodusban:

$$2.396168.732 + 7.176382E + 0.14 \sin(0^{\circ}042E + 304^{\circ})$$

képlet szerint, a δ Cephei-é pedig

$$2.393659.856 + 5.366386E$$

formula szerint számítandó.

A nevezett változók fénygörbéi világosan mutatják a már ismert karakterüket, de több oly részletet is nyújtanak, melyek egyenesen meglepők. Így különösen az η Aquilæ és a δ Cephei fénygörbéi a változás végén eddig még ismeretlen III. minimumot, illetve III. maximumot is feltüntetnek. Ez a közös jelleg oly biztonsággal megvan, hogy hozzá kétség nem is férhet.

Ez a meglepő új eredmény rendkívül értékes, mert most már igen elementáris úton magyarázható a két utóbbi változónak is a fényváltozása. Négyes csillagrendszerrel (fizikai rendszerrel) van dolgunk, melyben a főcsillagnak és ennek a kísérőjének is van sötét bolygója és a főcsillag sötét holdja mindig valamilyen a világos kísérő előtt forog a főcsillag körül a világos kísérővel és ennek holdjával egy irányban. Ebben az utóbbi kérdésben is talán lesz még alkalmunk, hogy bővebben előterjeszthetjük vizsgálatainkat a Tekintetes Akadémia elé.

Végül pedig arra a körülményre bátorzkodunk a Tekintetes Akadémia figyelmét felhívni, hogy a visualis módszereknél eddig sohasem tapasztalt nagy pontossággal simulnak a fénygörbe adatai a fénygörbéjükhöz a módszerünkkel végzett méréseknél.

V. táblázat.

β Lyrae spectralphotometrikus megfigyelései.

| Az ész- lelés ideje csillag- időben | β | | γ | | Fényesség | | z | Extinctio | Fényesség- különbség | Fényességkülönbség extinc- tióval javítva |
|--|---------|-------|----------|-------|-----------|----------------|-------------------------------|-----------|-------------------------|--|
| | S_k | S_b | S_k | S_b | β | γ | | | | |
| 1913 szept. 14 21h 56m | 90.4 | 52.6 | 91.4 | 48.2 | 4.90 | 4.76 5.20 5.17 | 38.7° 38.0° | 0.00 | +0.36 | +0.36 |
| | 79.6 | 62.2 | 79.3 | 62.2 | 3.41 | 3.26 3.34 3.26 | | 0.00 | -0.03 | -0.03 |
| | 81.6 | 60.0 | 82.1 | 59.0 | 3.80 | 3.73 3.89 3.91 | | 0.00 | +0.18 | +0.18 |
| | 86.3 | 55.8 | 87.0 | 55.4 | 4.46 | 4.38 4.54 4.43 | | 0.00 | +0.07 | +0.07 |
| | 101.3 | 43.3 | 104.5 | 40.2 | 5.69 | 5.57 5.84 5.76 | | 0.00 | +0.17 | +0.17 |
| 1913 szept. 16 22h 0m | 91.0 | 52.2 | 97.0 | 44.5 | 4.95 | 4.81 5.41 5.47 | 39.6 37.7 | 0.00 | +0.56 | +0.56 |
| | 77.9 | 63.4 | 80.3 | 61.7 | 2.99 | 2.96 3.56 3.38 | | 0.00 | +0.49 | +0.49 |
| | 82.6 | 58.7 | 87.7 | 54.4 | 3.97 | 3.96 4.62 4.56 | | 0.00 | +0.63 | +0.63 |
| | 88.3 | 53.8 | 94.0 | 48.2 | 4.68 | 4.63 5.19 5.18 | | 0.00 | +0.54 | +0.54 |
| | 97.2 | 45.5 | 108.0 | 34.3 | 5.42 | 5.40 6.01 6.09 | | 0.00 | +0.64 | +0.64 |
| 1913 szept. 17 22h 16m | 83.2 | 58.7 | 97.2 | 45.6 | 4.06 | 3.96 5.42 5.39 | 41.8 41.0 | 0.00 | +1.40 | +1.40 |
| | 77.0 | 65.0 | 79.6 | 61.6 | 2.73 | 2.46 3.41 3.40 | | 0.00 | +0.81 | +0.81 |
| | 79.5 | 62.4 | 87.0 | 54.7 | 3.39 | 3.21 4.54 4.52 | | 0.00 | +1.23 | +1.23 |
| | 82.2 | 60.4 | 91.4 | 51.2 | 3.90 | 3.65 4.98 4.91 | | 0.00 | +1.18 | +1.18 |
| | 86.4 | 55.0 | 104.2 | 39.6 | 4.47 | 4.48 5.83 5.80 | | -0.02 | +1.33 | +1.31 |
| 1913 szept. 20 21h 40m | 89.3 | 52.2 | 94.2 | 49.0 | 4.79 | 4.81 5.21 5.11 | 36.0 35.3 | 0.00 | +0.36 | +0.36 |
| | 77.7 | 64.0 | 78.7 | 62.5 | 2.93 | 2.77 3.19 3.19 | | 0.00 | +0.34 | +0.34 |
| | 83.0 | 59.0 | 83.0 | 59.0 | 4.03 | 3.91 4.03 3.91 | | 0.00 | +0.00 | +0.00 |
| | 86.6 | 55.3 | 89.0 | 52.7 | 4.50 | 4.44 4.76 4.75 | | 0.00 | +0.28 | +0.28 |
| | 100.0 | 43.0 | 103.4 | 39.0 | 5.60 | 5.57 5.79 5.83 | | 0.00 | +0.22 | +0.22 |
| 1913 szept. 21 22h 0m | 88.6 | 52.0 | 92.0 | 50.0 | 4.72 | 4.83 5.19 5.02 | 39.6 38.0 | 0.00 | +0.44 | +0.44 |
| | 78.0 | 62.0 | 78.6 | 62.8 | 3.01 | 3.31 3.17 3.11 | | 0.00 | -0.02 | -0.02 |
| | 82.9 | 58.4 | 82.8 | 58.9 | 4.01 | 4.01 4.00 3.93 | | 0.00 | -0.05 | -0.05 |
| | 84.6 | 57.0 | 88.9 | 53.0 | 4.26 | 4.21 4.75 4.72 | | 0.00 | +0.50 | +0.50 |
| | 98.4 | 44.2 | 103.0 | 39.0 | 5.50 | 5.49 5.77 5.83 | | 0.00 | +0.30 | +0.30 |
| 1913 szept. 28 23h 55m | 92.5 | 49.7 | 95.5 | 46.0 | 5.07 | 5.05 5.30 5.36 | 57.9 57.0 | -0.01 | +0.27 | +0.26 |
| | 78.8 | 63.2 | 78.5 | 63.2 | 3.22 | 3.01 3.14 3.01 | | -0.01 | -0.04 | -0.05 |
| | 82.0 | 59.0 | 84.2 | 57.5 | 3.87 | 3.91 4.21 4.14 | | -0.01 | +0.28 | +0.27 |
| | 85.8 | 55.7 | 89.0 | 53.0 | 4.41 | 3.39 4.76 4.72 | | -0.01 | +0.34 | +0.33 |
| | 99.0 | 44.0 | 105.0 | 39.0 | 5.54 | 5.50 5.87 5.83 | | -0.02 | +0.32 | +0.30 |
| 1913 okt. 14 22h 35m | 85.9 | 55.6 | 95.4 | 46.5 | 4.42 | 4.40 5.30 5.32 | 44.7 43.7 | -0.01 | +0.90 | +0.89 |
| | 76.6 | 65.2 | 79.0 | 62.4 | 2.57 | 2.37 3.27 3.20 | | 0.00 | +0.76 | +0.76 |
| | 81.2 | 59.7 | 84.9 | 56.4 | 3.73 | 3.78 4.30 4.30 | | 0.00 | +0.55 | +0.55 |
| | 84.0 | 57.7 | 92.6 | 50.6 | 4.18 | 4.11 5.08 4.97 | | 0.00 | +0.88 | +0.88 |
| | 93.0 | 50.0 | 105.0 | 38.8 | 5.11 | 5.02 5.87 5.84 | | -0.01 | +0.82 | +0.81 |
| 1913 okt. 17 23h 4m | 92.3 | 49.9 | 95.7 | 46.7 | 5.05 | 5.03 5.32 5.30 | 49.3 48.0 | -0.01 | +0.27 | +0.26 |
| | 78.7 | 63.0 | 79.2 | 63.0 | 3.19 | 3.06 3.32 3.06 | | 0.00 | +0.07 | +0.07 |
| | 83.4 | 59.0 | 85.2 | 56.0 | 4.09 | 3.91 4.33 4.35 | | 0.00 | +0.34 | +0.34 |
| | 88.4 | 53.5 | 92.4 | 50.0 | 4.69 | 4.66 5.06 5.02 | | 0.00 | +0.37 | +0.37 |
| | 100.0 | 44.0 | 106.0 | 38.0 | 5.60 | 5.50 5.92 5.89 | | -0.01 | +0.35 | +0.34 |

| Az ész- lelés ideje csillag- időben | β | | γ | | Fényesség | | z | Extinctio | Fényesség- különbség | Fényességkülön- besség extinc- tióval javítva |
|---|---------|-------|----------|-------|-----------|----------|-----------|-----------|-------------------------|---|
| | S_k | S_b | S_k | S_b | β | γ | | | | |
| 1913 okt. 18 23 ^h 30 ^m | 90.0 | 51.3 | 97.0 | 45.6 | 4.86 | 4.90 | 53.3 52.4 | -0.02 | +0.52 | +0.50 |
| | 79.2 | 62.7 | 80.2 | 61.6 | 3.32 | 3.14 | | | | |
| | 84.0 | 57.0 | 86.8 | 54.3 | 4.18 | 4.21 | | | | |
| | 86.7 | 55.0 | 93.0 | 49.0 | 4.51 | 4.48 | | | | |
| | 96.7 | 46.2 | 104.0 | 40.0 | 5.40 | 5.34 | | | | |
| 1913 okt. 19 23 ^h 20 ^m | 88.1 | 53.3 | 94.7 | 48.6 | 4.66 | 4.68 | 52.0 51.1 | -0.01 | +0.58 | +0.57 |
| | 77.2 | 64.4 | 79.3 | 62.5 | 2.79 | 2.65 | | | | |
| | 83.2 | 58.8 | 86.6 | 55.6 | 4.06 | 4.20 | | | | |
| | 83.8 | 58.0 | 91.4 | 50.4 | 4.16 | 4.07 | | | | |
| | 93.2 | 50.0 | 104.0 | 40.0 | 5.13 | 5.02 | | | | |
| 1913 okt. 20 0 ^h 55 ^m | 84.7 | 57.2 | 89.5 | 52.5 | 4.27 | 4.18 | 67.3 66.5 | -0.02 | +0.57 | +0.55 |
| | 76.7 | 64.4 | 79.0 | 62.6 | 2.61 | 2.65 | | | | |
| | 81.4 | 60.6 | 84.2 | 57.7 | 3.77 | 3.61 | | | | |
| | 83.6 | 59.0 | 88.0 | 54.0 | 4.12 | 3.91 | | | | |
| | 89.0 | 53.0 | 96.0 | 47.0 | 4.76 | 4.72 | | | | |
| 1913 okt. 21 23 ^h 50 ^m | 90.4 | 52.2 | 93.0 | 48.6 | 4.90 | 4.81 | 56.9 56.1 | -0.01 | +0.29 | +0.28 |
| | 77.4 | 64.7 | 79.6 | 61.8 | 2.84 | 2.55 | | | | |
| | 80.6 | 60.4 | 85.4 | 56.4 | 3.62 | 3.65 | | | | |
| | 86.4 | 57.0 | 90.8 | 52.0 | 4.47 | 4.21 | | | | |
| | 96.4 | 47.0 | 105.0 | 39.0 | 5.37 | 5.27 | | | | |
| 1913 okt. 22 23 ^h 50 ^m | 93.2 | 48.0 | 96.8 | 45.4 | 5.13 | 5.20 | 56.9 56.1 | -0.01 | +0.24 | +0.23 |
| | 79.0 | 62.2 | 80.8 | 60.6 | 3.27 | 3.26 | | | | |
| | 84.7 | 57.0 | 86.0 | 55.7 | 4.27 | 4.21 | | | | |
| | 88.7 | 52.8 | 93.0 | 51.0 | 4.73 | 4.92 | | | | |
| | 104.3 | 40.5 | 105.0 | 38.0 | 5.80 | 5.74 | | | | |
| 1913 okt. 23 0 ^h 30 ^m | 78.9 | 63.2 | 80.9 | 61.2 | 3.25 | 3.01 | 64.0 63.3 | -0.02 | +0.46 | +0.44 |
| | 75.3 | 66.3 | 74.8 | 66.0 | 2.00 | 1.89 | | | | |
| | 77.0 | 64.8 | 78.7 | 63.2 | 2.73 | 2.53 | | | | |
| | 78.9 | 63.0 | 78.9 | 62.2 | 3.09 | 3.06 | | | | |
| | 81.7 | 60.2 | 82.4 | 59.2 | 3.82 | 3.88 | | | | |
| 1913 okt. 25 23 ^h 25 ^m | 85.6 | 56.2 | 94.2 | 48.6 | 4.38 | 4.32 | 52.7 51.9 | -0.01 | +0.83 | +0.82 |
| | 76.5 | 64.8 | 78.2 | 63.0 | 2.53 | 2.52 | | | | |
| | 80.3 | 60.7 | 85.0 | 56.0 | 3.56 | 3.59 | | | | |
| | 83.7 | 58.0 | 92.4 | 49.2 | 4.11 | 4.07 | | | | |
| | 94.0 | 47.5 | 104.6 | 38.4 | 5.19 | 5.24 | | | | |
| 1913 okt. 26 23 ^h 35 ^m | 84.5 | 58.0 | 97.0 | 46.0 | 4.24 | 4.07 | 54.3 53.5 | -0.01 | +1.23 | +1.22 |
| | 76.0 | 65.7 | 80.0 | 62.0 | 2.33 | 2.15 | | | | |
| | 78.5 | 63.0 | 87.2 | 54.4 | 3.13 | 3.06 | | | | |
| | 83.5 | 59.0 | 93.7 | 50.3 | 4.10 | 3.91 | | | | |
| | 89.0 | 53.0 | 107.0 | 37.0 | 4.76 | 4.72 | | | | |

| Az ész- lelés ideje csillag- időben | β | | γ | | Fényesség | | z | Extinctio | Fényesség- különbség | Fényességkül- önbség extinc- tívra javítva |
|--|--|--|---|-----------|---|---|-----|-----------|-------------------------|--|
| | S_k | S_b | S_k | S_b | β | γ | | | | |
| 1913 okt. 27 23h 40m | 86.2 56.2 76.4 65.0 79.2 61.7 81.4 60.0 93.0 51.0 | 95.6 47.2 78.5 63.4 83.4 57.4 86.4 55.8 104.0 40.0 | 4.45 4.32 5.31 5.26 2.49 2.46 3.14 2.97 3.32 3.38 4.09 4.15 3.77 3.73 4.47 4.38 5.11 4.93 5.82 5.77 | 55.3 54.5 | -0.01 +0.90 0.00 +0.57 0.00 +0.77 0.00 +0.67 -0.01 +0.77 | +0.89 +0.57 +0.77 +0.67 +0.76 | | | | |
| 1913 okt. 28 21h 40m | 92.7 50.3 79.0 62.4 83.2 59.2 87.0 56.0 106.0 39.0 | 97.0 44.5 79.6 62.0 85.3 56.0 89.0 53.5 109.0 36.0 | 5.09 4.99 5.41 5.47 3.27 3.21 3.41 3.31 4.06 3.87 4.35 4.35 4.54 4.35 4.76 4.66 5.92 5.83 6.06 6.01 | 35.3 34.4 | 0.00 +0.42 0.00 +0.12 0.00 +0.38 0.00 +0.26 0.00 +0.15 | +0.42 +0.12 +0.38 +0.26 +0.15 | | | | |
| 1913 okt. 28 1h 48m | 86.0 56.2 77.0 63.6 80.0 62.0 82.3 60.3 93.4 47.4 | 88.2 53.0 87.0 63.2 81.8 60.0 83.6 57.6 92.0 50.0 | 4.43 4.32 4.67 4.72 2.73 2.86 3.00 3.00 3.50 3.31 3.84 3.73 3.92 3.67 4.12 4.13 5.15 5.25 5.03 5.03 | 74.9 74.2 | -0.04 +0.32 -0.03 +0.20 -0.03 +0.38 -0.03 +0.32 -0.05 +0.17 | +0.28 +0.17 +0.35 +0.29 +0.12 | | | | |
| 1913 okt. 29 (h) 4(m) | 88.0 54.2 78.3 62.6 81.4 60.2 83.4 58.7 94.0 50.0 | 89.6 54.2 78.4 63.0 83.0 59.0 84.0 57.0 96.0 46.2 | 4.65 4.58 4.82 4.58 3.09 3.16 3.12 3.06 3.77 3.69 4.03 3.91 4.09 4.18 4.18 4.21 5.19 5.02 5.34 5.34 | 64.9 64.1 | -0.02 +0.10 -0.01 -0.04 -0.01 +0.24 -0.01 +0.05 -0.02 +0.24 | +0.08 -0.05 +0.23 +0.04 +0.22 | | | | |
| 1913 nov. 16 1h 16m | 90.0 52.1 77.8 63.3 81.8 60.3 86.2 56.2 96.4 45.4 | 92.2 49.5 80.2 61.5 85.4 56.3 88.0 53.7 104.0 40.5 | 4.86 4.81 5.05 5.06 2.95 3.15 3.54 3.42 3.84 3.67 4.36 4.31 4.45 4.31 4.65 4.65 5.37 5.40 5.82 5.74 | 70.3 69.5 | -0.03 +0.23 -0.02 +0.43 -0.02 +0.59 -0.02 +0.27 -0.03 +0.40 | +0.20 +0.41 +0.57 +0.25 +0.37 | | | | |
| 1913 decz. 3 2h 6m | 77.5 63.6 74.4 67.0 75.2 66.1 77.0 64.4 79.2 62.4 | 80.9 60.1 75.6 65.4 76.3 64.2 81.2 61.0 83.6 57.4 | 2.87 2.88 3.68 3.71 1.44 1.58 2.13 2.28 1.94 1.98 2.45 2.70 2.73 2.65 3.73 3.53 3.32 3.21 4.12 4.15 | 77.2 76.5 | -0.05 +0.81 -0.04 +0.69 -0.04 +0.61 -0.04 +0.94 -0.06 +0.88 | +0.76 +0.65 +0.57 +0.90 +0.82 | | | | |
| 1913 decz. 8 2h (m) | 82.0 60.3 76.5 65.0 77.3 63.8 79.4 62.4 83.4 58.4 | 82.5 58.4 76.8 64.7 78.4 62.4 80.6 61.4 85.6 56.2 | 3.87 3.67 3.95 4.01 2.53 2.46 2.65 2.55 2.81 2.82 3.12 3.21 3.36 3.21 3.62 3.44 4.09 4.01 4.38 4.32 | 76.4 75.8 | -0.04 +0.20 -0.03 +0.13 -0.03 +0.36 -0.03 +0.25 -0.04 +0.32 | +0.16 +0.10 +0.33 +0.22 +0.28 | | | | |
| 1912 decz. 20 (h) 3(m) | 93.4 49.6 79.4 61.7 84.7 56.4 87.0 55.2 98.0 44.2 | 94.4 48.2 80.4 60.9 86.0 55.0 91.0 51.2 102.0 42.7 | 5.14 5.06 5.22 5.18 3.36 3.38 3.58 3.55 4.27 4.29 4.43 4.48 4.54 4.45 4.95 4.91 5.48 5.49 5.72 5.59 | 63.3 62.5 | -0.02 +0.10 -0.01 +0.20 -0.01 +0.18 -0.01 +0.43 -0.02 +0.17 | +0.08 +0.19 +0.17 +0.42 +0.15 | | | | |

VI. táblázat.

| Az észlelés ideje | Minimumok Pannekek szerint | Phasisok | Össze-tett | Vörös | Sárga | Zöld | Kék |
|-------------------|----------------------------|--------------|------------|---------------|-------|-------|-------|
| | | | | f é n y b e n | | | |
| 1913 | 1913 | | | | | | |
| szept. 14.40 | szept. 14.30 | +0.10 | +0.36 | -0.03 | +0.18 | +0.07 | +0.17 |
| « 16.38 | « « | +2.08 | +0.56 | +0.49 | +0.63 | +0.54 | +0.64 |
| « 17.42 | « « | +3.12 | +1.40 | +0.81 | +1.23 | +1.18 | +1.31 |
| « 20.37 | « « | +6.07 | +0.36 | +0.34 | +0.00 | +0.28 | +0.22 |
| « 21.37 | « « | +7.07 | +0.44 | -0.02 | -0.05 | +0.50 | +0.30 |
| « 28.43 | « 27.21 | +1.22 | +0.26 | -0.05 | +0.27 | +0.33 | +0.30 |
| okt. 14.33 | okt. 10.12 | +4.21 | +0.89 | +0.76 | +0.55 | +0.88 | +0.81 |
| « 17.34 | « « | +7.22 | +0.26 | +0.07 | +0.34 | +0.37 | +0.34 |
| « 18.36 | « « | +8.24 | +0.50 | +0.23 | +0.38 | +0.59 | +0.45 |
| « 19.35 | « « | +9.23 | +0.57 | +0.54 | +0.31 | +0.86 | +0.71 |
| « 20.42 | « « | +10.30 | +0.55 | +0.56 | +0.44 | +0.61 | +0.54 |
| « 21.36 | « 23.03 | +11.24 -1.67 | +0.28 | +0.72 | +0.69 | +0.59 | +0.50 |
| « 22.37 | « « | +12.25 -0.66 | +0.23 | +0.38 | +0.18 | +0.17 | +0.10 |
| « 23.37 | « « | +13.25 +0.34 | +0.44 | -0.08 | +0.44 | +0.17 | +0.11 |
| « 25.34 | « « | +2.31 | +0.82 | +0.54 | +0.77 | +0.99 | +0.64 |
| « 26.34 | « « | +3.31 | +1.22 | +1.16 | +1.46 | +1.03 | +1.21 |
| « 27.34 | « « | +4.31 | +0.89 | +0.57 | +0.77 | +0.67 | +0.76 |
| « 28.25 | « « | +5.22 | +0.42 | +0.12 | +0.38 | +0.26 | +0.15 |
| « 28.42 | « « | +5.39 | +0.28 | +0.17 | +0.35 | +0.29 | +0.12 |
| « 29.38 | « « | +6.35 | +0.08 | -0.05 | +0.23 | +0.04 | +0.22 |
| nov. 16.35 | nov. 4.94 | +11.41 -1.50 | +0.20 | +0.41 | +0.57 | +0.25 | +0.37 |
| decz. 3.34 | « 30.76 | +2.58 | +0.76 | +0.65 | +0.57 | +0.90 | +0.82 |
| « 8.32 | « « | +7.56 | +0.16 | +0.10 | +0.33 | +0.22 | +0.28 |
| « 20.24 | decz. 13.67 | +6.57 | +0.08 | +0.19 | +0.17 | +0.42 | +0.15 |

VII. táblázat.

β Lyra fénygörbéinek adatai.

| Phasisok | | Össze- tett | Vörös | Sárga | Zöld | Kék | Közepes fénygörbe adatai | Az egyesített észlelések száma |
|----------|-------|----------------|-------|-------|------|------|--------------------------------|---|
| | | f é n y b e n | | | | | | |
| 0.22 | 13.13 | 0.40 | −0.06 | 0.31 | 0.12 | 0.14 | 0.13 | 2 |
| 1.22 | | 0.26 | −0.05 | 0.27 | 0.33 | 0.30 | 0.21 | 1 |
| 2.08 | | 0.56 | 0.49 | 0.63 | 0.54 | 0.64 | 0.58 | 1 |
| 2.45 | | 0.79 | 0.60 | 0.67 | 0.95 | 0.73 | 0.74 | 2 |
| 3.21 | | 1.31 | 0.98 | 1.35 | 1.11 | 1.26 | 1.17 | 2 |
| 4.26 | | 0.89 | 0.67 | 0.66 | 0.78 | 0.79 | 0.72 | 2 |
| 5.31 | | 0.35 | 0.15 | 0.37 | 0.28 | 0.14 | 0.24 | 2 |
| 6.22 | | 0.22 | 0.15 | 0.12 | 0.16 | 0.22 | 0.16 | 2 |
| 6.57 | | 0.08 | 0.19 | 0.17 | 0.42 | 0.15 | 0.23 | 1 |
| 7.14 | | 0.35 | 0.03 | 0.15 | 0.43 | 0.32 | 0.23 | 2 |
| 7.56 | | 0.16 | 0.10 | 0.33 | 0.22 | 0.28 | 0.23 | 1 |
| 8.24 | | 0.50 | 0.23 | 0.38 | 0.59 | 0.45 | 0.41 | 1 |
| 9.23 | | 0.57 | 0.54 | 0.31 | 0.86 | 0.71 | 0.60 | 1 |
| 10.30 | | 0.55 | 0.56 | 0.44 | 0.61 | 0.54 | 0.54 | 1 |
| −1.59 | 11.33 | 0.24 | 0.56 | 0.63 | 0.42 | 0.43 | 0.51 | 2 |
| −0.66 | 12.25 | 0.23 | 0.38 | 0.18 | 0.17 | 0.10 | 0.21 | 1 |

VIII. táblázat.

Az γ Aquilae spectralphotometrikus megfigyelései.

| Az ész- lelés ideje csillag- időben | η | | β | | Fényesség | | | | z | Extinctio | Fényesség- különbség | Fényességkü- lönbség extinc- tióval javítva |
|---|--------|-------|---------|-------|-----------|---------|------|------|-----------|-----------|-------------------------|---|
| | S_k | S_b | S_k | S_b | η | β | | | | | | |
| 1913 szept. 14 21 ^h 32 ^m | 81.2 | 60.3 | 81.4 | 60.2 | 3.73 | 3.67 | 3.77 | 3.69 | 52.8 47.6 | -0.07 | +0.03 | -0.04 |
| | 76.7 | 64.0 | 76.7 | 64.0 | 2.61 | 2.77 | 2.61 | 2.77 | | -0.05 | +0.00 | -0.05 |
| | 77.6 | 63.4 | 78.2 | 63.0 | 2.90 | 2.94 | 3.06 | 3.06 | | -0.05 | +0.14 | +0.09 |
| | 80.7 | 60.8 | 80.8 | 60.6 | 3.64 | 3.57 | 3.66 | 3.61 | | -0.05 | +0.02 | -0.03 |
| 1913 szept. 17 22 ^h 06 ^m | 83.7 | 58.0 | 84.0 | 57.8 | 4.14 | 4.07 | 4.18 | 4.10 | 55.5 50.7 | -0.08 | +0.04 | -0.04 |
| | 80.7 | 61.2 | 86.8 | 55.0 | 3.64 | 3.51 | 4.51 | 4.48 | | -0.07 | +0.93 | +0.86 |
| | 75.2 | 65.8 | 77.7 | 63.5 | 1.95 | 2.11 | 2.93 | 2.91 | | -0.05 | +0.89 | +0.84 |
| | 77.3 | 63.7 | 81.8 | 59.7 | 2.81 | 2.86 | 3.84 | 3.78 | | -0.05 | +0.98 | +0.93 |
| 1913 szept. 20 21 ^h 48 ^m | 79.0 | 62.4 | 83.6 | 57.4 | 3.27 | 3.28 | 4.12 | 4.21 | 53.8 48.9 | -0.05 | +0.90 | +0.85 |
| | 81.7 | 60.2 | 89.8 | 51.0 | 3.82 | 3.70 | 4.84 | 4.93 | | -0.07 | +1.13 | +1.06 |
| | 82.5 | 59.0 | 82.8 | 59.0 | 3.95 | 3.91 | 4.00 | 3.91 | | -0.07 | +0.02 | +0.05 |
| | 75.2 | 65.6 | 75.5 | 65.2 | 1.94 | 2.20 | 2.09 | 2.37 | | -0.05 | +0.16 | -0.11 |
| 1913 szept. 21 21 ^h 50 ^m | 80.0 | 61.3 | 79.3 | 62.0 | 3.50 | 3.46 | 3.34 | 3.31 | 53.8 48.9 | -0.05 | -0.15 | -0.20 |
| | 80.2 | 61.2 | 80.3 | 60.8 | 3.54 | 3.50 | 3.56 | 3.57 | | -0.05 | -0.04 | -0.09 |
| | 82.6 | 59.0 | 84.0 | 57.5 | 3.97 | 3.91 | 4.18 | 4.14 | | -0.07 | +0.21 | +0.14 |
| | 82.3 | 58.7 | 83.5 | 57.6 | 3.92 | 3.96 | 4.11 | 4.13 | | -0.07 | +0.18 | +0.11 |
| 1913 szept. 28 23 ^h 45 ^m | 76.7 | 64.0 | 76.9 | 64.2 | 2.61 | 2.71 | 2.69 | 2.77 | 69.2 65.0 | -0.05 | +0.01 | -0.04 |
| | 80.0 | 61.0 | 79.8 | 61.4 | 3.50 | 3.53 | 3.45 | 3.44 | | -0.05 | -0.06 | -0.11 |
| | 81.2 | 60.4 | 81.2 | 60.2 | 3.73 | 3.65 | 3.73 | 3.69 | | -0.05 | +0.03 | -0.02 |
| | 82.4 | 59.4 | 84.7 | 57.1 | 3.93 | 3.84 | 4.27 | 4.20 | | -0.07 | +0.35 | +0.28 |
| 1913 okt. 14 22 ^h 25 ^m | 82.5 | 58.7 | 84.3 | 57.5 | 3.95 | 3.96 | 4.22 | 4.14 | 58.0 53.3 | -0.18 | +0.22 | +0.04 |
| | 76.0 | 65.0 | 76.3 | 64.7 | 2.33 | 2.46 | 2.45 | 2.55 | | -0.15 | +0.09 | -0.06 |
| | 79.2 | 62.1 | 81.2 | 58.7 | 3.32 | 3.28 | 3.73 | 3.96 | | -0.15 | +0.55 | +0.40 |
| | 80.8 | 60.8 | 82.5 | 59.0 | 3.66 | 3.57 | 3.95 | 3.91 | | -0.15 | +0.31 | +0.16 |
| 1913 okt. 17 22 ^h 50 ^m | 82.7 | 58.6 | 85.5 | 56.5 | 3.98 | 3.97 | 4.37 | 4.28 | 61.1 56.4 | -0.20 | +0.34 | +0.14 |
| | 82.5 | 58.8 | 85.9 | 55.8 | 3.95 | 3.94 | 4.42 | 4.38 | | -0.10 | +0.46 | +0.36 |
| | 76.1 | 65.2 | 76.8 | 63.8 | 2.37 | 2.37 | 2.65 | 2.86 | | -0.08 | +0.34 | +0.26 |
| | 80.0 | 61.2 | 81.2 | 59.7 | 3.50 | 3.49 | 3.73 | 3.78 | | -0.08 | +0.25 | +0.17 |
| 1913 okt. 18 23 ^h 22 ^m | 81.0 | 60.5 | 84.4 | 57.3 | 3.70 | 3.63 | 4.23 | 4.17 | 65.6 61.1 | -0.08 | +0.53 | +0.45 |
| | 86.2 | 55.7 | 89.5 | 52.5 | 4.45 | 4.39 | 4.81 | 4.78 | | -0.11 | +0.38 | +0.27 |
| | 84.0 | 57.8 | 85.9 | 56.2 | 4.18 | 4.10 | 4.42 | 4.32 | | -0.11 | +0.23 | +0.12 |
| | 76.7 | 64.1 | 77.2 | 63.6 | 2.61 | 2.74 | 2.80 | 2.88 | | -0.08 | +0.17 | +0.09 |
| 1913 okt. 18 23 ^h 22 ^m | 79.4 | 62.1 | 81.4 | 60.2 | 3.36 | 3.28 | 3.77 | 3.70 | 65.6 61.1 | -0.08 | +0.41 | +0.33 |
| | 83.0 | 58.7 | 83.2 | 58.4 | 4.03 | 3.96 | 4.06 | 4.01 | | -0.08 | +0.03 | -0.05 |
| | 85.3 | 56.7 | 88.7 | 53.3 | 4.35 | 4.25 | 4.73 | 4.70 | | -0.13 | +0.42 | +0.29 |
| | 86.9 | 55.0 | 86.1 | 55.5 | 4.54 | 4.48 | 4.44 | 4.42 | | -0.12 | -0.08 | -0.20 |
| 1913 okt. 18 23 ^h 22 ^m | 77.2 | 63.7 | 77.0 | 64.0 | 2.79 | 2.86 | 2.73 | 2.77 | 65.6 61.1 | -0.09 | -0.08 | -0.17 |
| | 82.3 | 59.3 | 81.7 | 58.4 | 3.92 | 3.86 | 3.82 | 4.01 | | -0.09 | +0.03 | -0.06 |
| | 82.4 | 58.5 | 82.8 | 58.8 | 3.94 | 3.99 | 4.00 | 3.95 | | -0.09 | +0.01 | -0.08 |
| | 87.7 | 54.2 | 87.0 | 55.0 | 4.62 | 4.58 | 4.54 | 4.48 | | -0.14 | -0.09 | -0.23 |

| Az ész- lelés ideje csillag- időben | η | | β | | Fényesség | | z | Extinctio | Fényesség- különbség | Fényességkülön- bség extinc- tióval javítva |
|---|--------|-------|---------|-------|-----------|--------|-----------|-----------|-------------------------|---|
| | S_k | S_b | S_k | S_b | β | η | | | | |
| 1913 okt. 19 23 ^h 05 ^m | 87.8 | 54.0 | 86.5 | 53.7 | 4.63 | 4.61 | 63.4 59.0 | -0.11 | -0.06 | -0.17 |
| | 78.0 | 63.2 | 78.7 | 62.4 | 3.01 | 3.00 | | -0.08 | +0.20 | +0.12 |
| | 81.8 | 59.2 | 81.7 | 59.3 | 3.84 | 3.87 | | -0.08 | -0.01 | -0.09 |
| | 83.5 | 58.0 | 84.6 | 57.2 | 4.10 | 4.07 | | -0.08 | +0.12 | +0.04 |
| 1913 okt. 20 0 ^h 48 ^m | 90.6 | 51.8 | 90.6 | 51.2 | 4.91 | 4.85 | 79.4 75.3 | -0.13 | +0.03 | -0.10 |
| | 80.1 | 61.2 | 82.3 | 59.2 | 3.52 | 3.51 | | -0.45 | +0.38 | -0.07 |
| | 75.1 | 65.7 | 75.7 | 65.5 | 1.90 | 2.15 | | -0.40 | +0.18 | -0.22 |
| | 78.6 | 62.6 | 78.8 | 63.0 | 3.17 | 3.16 | | -0.40 | -0.02 | -0.42 |
| 1913 okt. 21 23 ^h 28 ^m | 80.4 | 60.7 | 79.0 | 62.2 | 3.58 | 3.59 | 66.8 62.4 | -0.40 | -0.31 | -0.71 |
| | 83.6 | 58.4 | 85.0 | 56.2 | 4.12 | 4.01 | | -0.49 | +0.24 | -0.25 |
| | 81.1 | 60.7 | 86.9 | 54.5 | 3.72 | 3.60 | | -0.14 | +0.88 | +0.74 |
| | 75.2 | 66.2 | 77.2 | 64.5 | 1.94 | 1.93 | | -0.11 | +0.76 | +0.65 |
| 1913 okt. 22 23 ^h 50 ^m | 78.0 | 63.4 | 81.4 | 59.4 | 3.01 | 2.96 | 69.8 65.5 | -0.11 | +0.82 | +0.71 |
| | 79.0 | 62.8 | 84.7 | 57.4 | 3.27 | 3.11 | | -0.11 | +1.02 | +0.91 |
| | 97.6 | 62.1 | 89.6 | 53.2 | 3.41 | 3.28 | | -0.16 | +1.42 | +1.26 |
| | 82.8 | 59.2 | 85.7 | 56.5 | 4.00 | 3.87 | | -0.17 | +0.40 | +0.23 |
| 1913 okt. 23 23 ^h 40 ^m | 75.6 | 65.8 | 76.7 | 64.0 | 2.15 | 2.14 | 68.5 64.3 | -0.13 | +0.54 | +0.41 |
| | 79.2 | 62.0 | 79.5 | 62.0 | 3.32 | 3.31 | | -0.13 | +0.03 | -0.10 |
| | 79.4 | 62.1 | 81.2 | 60.7 | 3.36 | 3.29 | | -0.13 | +0.35 | +0.22 |
| | 83.6 | 58.0 | 88.0 | 54.0 | 4.12 | 4.07 | | -0.19 | +0.52 | +0.33 |
| 1913 okt. 23 23 ^h 40 ^m | 79.0 | 62.8 | 85.1 | 57.0 | 3.27 | 3.11 | 65.0 60.6 | -0.15 | +1.07 | +0.92 |
| | 74.6 | 66.8 | 77.0 | 64.0 | 1.58 | 1.69 | | -0.12 | +1.11 | +0.99 |
| | 76.5 | 65.4 | 80.4 | 60.9 | 2.53 | 2.28 | | -0.12 | +1.14 | +1.02 |
| | 76.4 | 65.3 | 81.0 | 60.3 | 2.52 | 2.33 | | -0.12 | +1.27 | +1.15 |
| 1913 okt. 25 23 ^h 17 ^m | 78.4 | 63.3 | 89.0 | 53.0 | 3.12 | 2.97 | 66.0 61.8 | -0.17 | +1.70 | +1.53 |
| | 88.7 | 52.6 | 86.4 | 55.0 | 4.73 | 4.76 | | -0.04 | -0.27 | -0.41 |
| | 78.2 | 63.8 | 77.2 | 64.1 | 3.06 | 2.85 | | -0.11 | -0.19 | -0.30 |
| | 82.0 | 59.7 | 80.5 | 61.2 | 3.87 | 3.78 | | -0.11 | -0.28 | -0.39 |
| 1913 okt. 26 23 ^h 25 ^m | 85.8 | 56.2 | 83.7 | 58.6 | 4.41 | 4.38 | 68.0 63.6 | -0.11 | -0.34 | -0.45 |
| | 94.0 | 48.5 | 89.2 | 53.5 | 5.19 | 5.15 | | -0.16 | -0.45 | -0.61 |
| | 88.2 | 53.8 | 87.3 | 54.5 | 4.67 | 4.63 | | -0.15 | -0.09 | -0.24 |
| | 77.3 | 63.6 | 77.7 | 63.5 | 2.81 | 2.88 | | -0.12 | +0.08 | -0.04 |
| 1913 okt. 27 23 ^h 36 ^m | 80.6 | 61.0 | 81.5 | 59.6 | 3.62 | 3.53 | 68.0 63.6 | -0.12 | +0.21 | +0.09 |
| | 83.2 | 58.8 | 85.6 | 57.0 | 4.06 | 4.20 | | -0.12 | +0.16 | +0.04 |
| | 90.0 | 52.0 | 91.2 | 52.0 | 4.86 | 4.83 | | -0.17 | +0.06 | -0.11 |
| | 82.8 | 58.0 | 85.1 | 57.0 | 4.00 | 4.07 | | -0.16 | +0.23 | +0.07 |
| 1913 okt. 27 23 ^h 36 ^m | 76.5 | 65.0 | 76.6 | 65.4 | 2.53 | 2.46 | 68.0 63.6 | -0.13 | -0.07 | -0.20 |
| | 79.2 | 62.1 | 80.6 | 61.4 | 3.32 | 3.28 | | -0.13 | +0.23 | +0.10 |
| | 81.7 | 60.2 | 81.4 | 60.2 | 3.82 | 3.69 | | -0.13 | -0.03 | -0.16 |
| | 84.0 | 57.6 | 87.0 | 55.2 | 4.18 | 4.13 | | -0.18 | +0.34 | +0.16 |

| Az ész- lelés ideje csillag- időben | η | | β | | Fényesség | | z | Extinctio | Fényesség- különbség | Fényességkülönbség extinctióval javítva |
|--|-----------|-----------|---------|-------|-----------|---------|-----------|-----------|-------------------------|---|
| | S_k | S_b | S_k | S_b | η | β | | | | |
| 1913 okt. 28 21h 17m | 87.4 55.2 | 88.6 53.6 | 4.58 | 4.47 | 4.72 | 4.79 | 51.0 45.8 | -0.07 | +0.22 | +0.15 |
| | 78.2 63.1 | 78.5 63.2 | 3.06 | 3.03 | 3.14 | 3.00 | | -0.05 | +0.03 | -0.02 |
| | 81.6 60.3 | 84.0 58.0 | 3.80 | 3.67 | 4.18 | 4.07 | | -0.05 | +0.38 | +0.33 |
| | 84.6 57.7 | 84.3 57.9 | 4.26 | 4.11 | 4.22 | 4.09 | | -0.05 | -0.02 | -0.07 |
| | 87.0 55.7 | 88.9 53.0 | 4.54 | 4.39 | 4.75 | 4.72 | | -0.08 | +0.28 | +0.20 |
| 1913 okt. 29 0h 28m | 78.8 63.2 | 80.2 60.7 | 3.22 | 3.00 | 3.54 | 3.59 | 76.1 72.0 | -0.26 | +0.46 | +0.20 |
| | 74.8 67.0 | 75.6 65.6 | 1.72 | 1.58 | 2.13 | 2.20 | | -0.22 | +0.51 | +0.29 |
| | 76.7 64.8 | 77.0 64.2 | 2.61 | 2.52 | 2.73 | 2.71 | | -0.22 | +0.15 | -0.07 |
| | 77.0 64.2 | 78.3 63.5 | 2.73 | 2.71 | 3.09 | 2.90 | | -0.22 | +0.27 | +0.05 |
| | 79.2 62.8 | 81.4 61.0 | 3.32 | 3.11 | 3.76 | 3.53 | | -0.30 | +0.43 | +0.13 |
| 1913 okt. 31 22h 46m | 80.6 60.6 | 84.4 57.5 | 3.62 | 3.61 | 4.23 | 4.14 | 60.6 56.0 | -0.11 | +0.57 | +0.46 |
| | 76.2 65.0 | 76.7 65.0 | 2.41 | 2.46 | 2.61 | 2.46 | | -0.08 | +0.11 | +0.03 |
| | 78.2 63.0 | 78.7 62.2 | 3.06 | 3.06 | 3.19 | 3.26 | | -0.08 | +0.17 | +0.09 |
| | 80.2 61.8 | 82.8 59.1 | 3.54 | 3.35 | 4.00 | 3.89 | | -0.08 | +0.50 | +0.42 |
| | 83.2 59.0 | 86.0 56.5 | 4.06 | 3.91 | 4.43 | 4.28 | | -0.13 | +0.35 | +0.22 |
| 1913 decz. 3 23h 10m | 83.6 57.5 | 88.0 54.2 | 4.12 | 4.14 | 4.65 | 4.58 | 63.9 59.4 | -0.13 | +0.48 | +0.35 |
| | 77.0 64.0 | 79.2 61.9 | 2.73 | 2.77 | 3.32 | 3.28 | | -0.10 | +0.55 | +0.45 |
| | 80.5 60.6 | 81.9 59.4 | 3.60 | 3.61 | 3.85 | 3.84 | | -0.10 | +0.25 | +0.15 |
| | 81.2 60.6 | 84.6 56.8 | 3.73 | 3.61 | 4.26 | 4.24 | | -0.10 | +0.58 | +0.48 |
| | 87.0 56.0 | 91.0 51.8 | 4.54 | 4.35 | 4.95 | 4.85 | | -0.15 | +0.46 | +0.31 |
| 1913 decz. 4 22h 40m | 85.8 55.2 | 91.0 51.6 | 4.41 | 4.45 | 4.95 | 4.87 | 60.0 55.5 | -0.11 | +0.48 | +0.37 |
| | 78.7 62.0 | 81.2 61.0 | 3.19 | 3.31 | 3.73 | 3.53 | | -0.08 | +0.38 | +0.30 |
| | 81.4 59.7 | 83.4 58.3 | 3.77 | 3.78 | 4.09 | 4.02 | | -0.08 | +0.28 | +0.20 |
| | 85.0 57.2 | 85.0 57.1 | 4.31 | 4.18 | 4.31 | 4.20 | | -0.08 | +0.02 | -0.06 |
| | 90.2 52.5 | 94.0 47.2 | 4.88 | 4.78 | 5.19 | 5.26 | | -0.13 | +0.40 | +0.27 |
| 1913 decz. 19 23h 45m | 80.2 60.7 | 84.7 56.9 | 3.54 | 3.59 | 4.27 | 4.48 | 69.2 65.0 | -0.14 | +0.81 | +0.67 |
| | 74.6 66.7 | 77.5 64.2 | 1.58 | 1.72 | 2.87 | 2.71 | | -0.11 | +1.14 | +1.03 |
| | 77.2 64.0 | 78.6 62.2 | 2.79 | 2.77 | 3.16 | 3.26 | | -0.11 | +0.43 | +0.32 |
| | 77.3 64.0 | 81.2 61.0 | 2.82 | 2.77 | 3.73 | 3.53 | | -0.11 | +0.83 | +0.72 |
| | 80.3 61.4 | 84.6 56.6 | 3.56 | 3.44 | 4.26 | 4.27 | | -0.16 | +0.77 | +0.61 |
| 1913 decz. 20 0h 18m | 80.0 61.2 | 85.0 57.0 | 3.50 | 3.50 | 4.31 | 4.21 | 74.2 70.1 | -0.22 | +0.76 | +0.54 |
| | 75.3 65.9 | 77.9 63.8 | 1.99 | 2.06 | 2.98 | 2.83 | | -0.17 | +0.87 | +0.70 |
| | 78.4 62.7 | 81.4 61.0 | 3.11 | 3.13 | 3.77 | 3.53 | | -0.17 | +0.53 | +0.36 |
| | 78.4 63.0 | 81.8 60.0 | 3.11 | 3.06 | 3.84 | 3.73 | | -0.17 | +0.70 | +0.53 |
| | 79.8 61.0 | 85.7 56.3 | 3.45 | 3.53 | 4.39 | 4.31 | | -0.26 | +0.86 | +0.60 |

IX. táblázat.

| Az észlelés ideje | Maximumok V. A. G. adatai szerint | Phasisok | Össze- tett | Vörös | Sárga | Zöld | Kék |
|----------------------|--|-------------|----------------|-------|-------|-------|-------|
| | | | f é n y b e n | | | | |
| 1913 | 1913 | | | | | | |
| szept. 14.39 | szept. 12.18 | +2.21 | −0.04 | −0.05 | +0.09 | −0.03 | −0.04 |
| » 17.38 | » » | +5.20 −1.98 | +0.86 | +0.84 | +0.93 | +0.85 | +1.05 |
| » 20.36 | » » | +1.00 | −0.05 | +0.11 | −0.20 | −0.09 | +0.14 |
| » 21.36 | » » | +2.00 | +0.11 | −0.04 | −0.11 | −0.02 | +0.28 |
| » 28.42 | » 26.54 | +1.88 | +0.04 | −0.06 | +0.40 | +0.16 | +0.14 |
| okt. 14.32 | okt. 10.90 | +3.42 | +0.36 | +0.26 | +0.17 | +0.45 | +0.27 |
| » 17.33 | » 18.08 | +643 −0.75. | +0.12 | +0.09 | +0.33 | −0.05 | +0.29 |
| » 18.35 | » » | +0.27 | −0.20 | −0.17 | −0.06 | −0.08 | −0.23 |
| » 19.34 | » » | +1.26 | −0.17 | +0.12 | −0.09 | +0.04 | −0.10 |
| » 20.41 | » » | +2.33 | −0.07 | −0.22 | −0.42 | −0.71 | −0.25 |
| » 21.35 | » » | +3.27 | +0.74 | +0.65 | +0.71 | +0.91 | +1.26 |
| » 22.36 | » 25.26 | +4.28 −2.90 | +0.23 | +0.41 | −0.10 | +0.22 | +0.33 |
| » 23.35 | » » | +5.27 −1.91 | +0.92 | +0.99 | +1.02 | +1.15 | +1.53 |
| » 25.33 | » » | +0.07 | −0.41 | −0.30 | −0.39 | −0.45 | −0.61 |
| » 26.33 | » » | +1.07 | −0.24 | −0.04 | +0.09 | +0.04 | −0.11 |
| » 27.33 | » » | +2.07 | +0.07 | −0.20 | +0.10 | −0.16 | +0.16 |
| » 28.24 | » » | +2.98 | +0.15 | −0.02 | +0.33 | −0.07 | +0.20 |
| » 29.37 | nov. 1.44 | +4.11 −3.07 | +0.20 | +0.29 | −0.07 | +0.05 | +0.13 |
| » 31.29 | » » | +0.63 −1.15 | +0.46 | +0.03 | +0.09 | +0.42 | +0.22 |
| decz. 3.22 | » 30.16 | +3.06 | +0.35 | +0.45 | +0.15 | +0.48 | +0.31 |
| » 4.19 | decz. 7.34 | +4.03 −3.15 | +0.37 | +0.30 | +0.20 | −0.06 | +0.27 |
| » 19.20 | » 14.52 | +4.68 −2.50 | +0.67 | +1.03 | +0.32 | +0.72 | +0.61 |
| » 20.22 | » 21.70 | +5.70 −1.48 | +0.54 | +0.70 | +0.36 | +0.23 | +0.60 |

X. táblázat.

η Aquilæ fénygörbéinek adatai

| Phasisok | Össze- tett | Vörös | Sárga | Zöld | Kék | Közepes fénygörbe adatai | Az egyesített észlelések száma |
|-------------|----------------|-------|-------|-------|-------|--------------------------------|---|
| | | | | | | | |
| +0.17 | -0.30 | -0.24 | -0.22 | -0.27 | -0.42 | -0.29 | 2 |
| +1.11 | -0.15 | +0.06 | -0.06 | -0.01 | -0.02 | -0.01 | 3 |
| +1.88 | +0.04 | -0.06 | +0.40 | +0.16 | +0.14 | +0.16 | 1 |
| +2.04 | +0.01 | -0.12 | -0.01 | -0.09 | +0.22 | +0.00 | 2 |
| +2.21 | -0.04 | -0.05 | +0.09 | -0.03 | -0.04 | -0.00 | 1 |
| +2.33 | -0.07 | -0.22 | -0.42 | -0.71 | -0.25 | -0.41 | 1 |
| +2.98 | +0.15 | -0.02 | +0.33 | -0.07 | +0.20 | +0.11 | 1 |
| +3.06 | +0.35 | +0.45 | +0.15 | +0.48 | +0.31 | +0.39 | 1 |
| +3.27 | +0.74 | +0.65 | +0.71 | +0.91 | +1.26 | +0.88 | 1 |
| +3.42 | +0.36 | +0.26 | +0.17 | +0.45 | +0.27 | +0.29 | 1 |
| +4.14 | +0.27 | +0.33 | -0.01 | +0.07 | +0.24 | +0.11 | 3 |
| +4.68 -2.50 | +0.67 | +1.03 | +0.32 | +0.72 | +0.61 | +0.67 | 1 |
| +5.24 -1.94 | +0.89 | +0.92 | +0.98 | +1.00 | +1.29 | +1.05 | 2 |
| +5.70 -1.48 | +0.54 | +0.70 | +0.36 | +0.23 | +0.60 | +0.47 | 1 |
| +6.23 -0.95 | +0.29 | +0.06 | +0.21 | +0.18 | +0.26 | +0.18 | 2 |

XI. táblázat.

A δ Cephei spectralphotometrikus megfigyelései.

| Az ész- lélés ideje csillag- időben | δ | | ζ | | Fényesség | | | | z | Extinctio | Fényesség- különbség | Fényességkülönbség extinc- tíóval javítva |
|--|--|-------|---|-------|---|---------|--|--|-----------|--|-------------------------|---|
| | S_k | S_b | S_k | S_b | δ | ζ | | | | | | |
| 1913 szept. 16 22h 32m | 82.4 59.0 77.5 64.0 80.0 62.0 81.6 59.6 85.2 56.3 | | 86.0 55.9 80.3 61.2 82.9 58.6 84.6 56.0 90.0 52.0 | | 3.93 3.91 4.43 4.38 2.87 2.77 3.56 3.50 3.50 3.31 4.01 3.99 3.80 3.80 4.26 4.35 4.34 4.32 4.86 4.83 | | | | 10.3 10.7 | 0.00 +0.52 +0.52 0.00 +0.71 +0.71 0.00 +0.60 +0.60 0.00 +0.50 +0.50 0.00 +0.52 +0.52 | | |
| 1913 szept. 17 21h 50m | 83.1 58.8 77.4 63.4 80.0 61.2 82.4 59.3 89.0 53.2 | | 88.6 53.1 80.2 61.0 84.7 56.3 86.0 55.2 94.0 49.0 | | 4.05 3.95 4.72 4.71 2.84 2.94 3.54 3.53 3.50 3.50 4.27 4.31 3.93 3.86 4.43 4.45 4.76 4.70 5.19 5.11 | | | | 11.6 10.9 | 0.00 +0.72 +0.72 0.00 +0.65 +0.65 0.00 +0.78 +0.78 0.00 +0.54 +0.54 0.00 +0.42 +0.42 | | |
| 1913 szept. 20 21h 36m | 84.1 58.0 77.2 64.0 80.4 60.5 81.7 59.4 88.0 54.0 | | 85.8 55.2 79.0 61.9 82.5 57.7 83.6 57.5 89.0 52.6 | | 4.20 4.07 4.41 4.45 2.79 2.77 3.27 3.34 3.58 3.63 3.95 4.11 3.82 3.84 4.12 4.14 4.65 4.61 4.76 4.76 | | | | 12.6 11.2 | 0.00 +0.31 +0.31 0.00 +0.52 +0.52 0.00 +0.43 +0.43 0.00 +0.30 +0.30 0.00 +0.13 +0.13 | | |
| 1913 szept. 21 21h 40m | 83.0 59.2 77.0 63.8 79.6 62.2 80.5 60.4 85.6 57.0 | | 85.9 55.8 79.7 61.2 83.4 58.0 85.0 57.6 89.6 54.0 | | 4.03 3.87 4.42 4.38 2.73 2.82 3.43 3.48 3.41 3.26 4.09 4.07 3.60 3.65 4.31 4.13 4.38 4.21 4.82 4.61 | | | | 12.2 10.9 | 0.00 +0.45 +0.45 0.00 +0.67 +0.67 0.00 +0.75 +0.75 0.00 +0.60 +0.60 0.00 +0.42 +0.42 | | |
| 1913 szept. 28 (h) 08m | 82.6 59.4 77.0 64.0 79.4 62.0 83.8 58.5 86.7 55.6 | | 91.5 50.5 80.5 60.3 85.8 56.0 89.0 53.0 94.5 48.0 | | 3.97 3.84 4.99 4.98 2.73 2.77 3.60 3.67 3.36 3.31 4.41 4.35 4.15 3.99 4.76 4.72 4.51 4.40 5.23 5.20 | | | | 18.6 20.6 | 0.00 +1.08 +1.08 0.00 +0.88 +0.88 0.00 +1.05 +1.05 0.00 +0.68 +0.68 0.00 +0.77 +0.77 | | |
| 1913 okt. 21 (h) (m) | 96.2 45.8 82.0 61.0 85.2 57.1 91.0 53.0 106.0 36.0 | | 95.0 45.8 80.4 60.2 55.0 88.2 88.3 55.4 97.0 45.6 | | 5.35 5.37 5.27 5.37 3.87 3.53 3.58 3.69 4.33 4.20 4.48 4.67 4.95 4.72 4.62 4.43 5.92 6.01 5.41 5.39 | | | | 18.0 19.5 | 0.00 -0.04 -0.04 0.00 -0.06 -0.06 0.00 -0.31 -0.31 0.00 -0.30 -0.30 0.00 -0.57 -0.57 | | |
| 1913 okt. 22 (h) 0m | 79.5 61.6 75.3 65.5 77.7 64.2 79.0 63.5 82.0 60.0 | | 79.8 61.0 76.0 65.0 79.0 62.4 78.7 63.0 81.7 60.0 | | 3.39 3.40 3.45 3.53 1.99 2.24 2.33 2.46 2.93 2.71 3.27 3.21 3.27 2.92 3.19 3.06 3.87 3.73 3.82 3.73 | | | | 18.7 20.7 | 0.00 +0.09 +0.09 0.00 +0.28 +0.28 0.00 +0.46 +0.46 0.00 +0.03 +0.03 0.00 -0.02 -0.02 | | |
| 1913 okt. 23 (h) 44m | 87.0 54.3 78.0 63.2 83.2 59.2 85.0 56.4 92.0 52.0 | | 95.0 49.3 80.7 61.3 89.0 54.0 86.6 54.9 95.4 48.0 | | 4.54 4.57 5.27 5.08 3.01 3.00 3.64 3.47 4.06 3.87 4.76 4.61 4.31 4.30 4.50 4.50 5.03 4.83 5.30 5.20 | | | | 23.2 25.8 | 0.00 +0.63 +0.63 0.00 +0.56 +0.56 0.00 +0.91 +0.91 0.00 +0.20 +0.20 0.00 +0.32 +0.32 | | |

| Az ész- lelés ideje csillag- időben | δ | | ζ | | Fényesség | | z | Extinctio | Fényesség- különbség | Fényességkülönbség extinctióval javítva |
|---|-----------|-------|-----------|-------|---------------------|---------|-----------|-----------|-------------------------|--|
| | S_k | S_b | S_k | S_b | δ | ζ | | | | |
| 1913 okt. 25 0 ^h 30 ^m | 85.0 57.5 | | 94.5 46.6 | | 4.31 4.14 5.23 5.31 | | 22.7 25.0 | 0.00 | +1.05 | +1.05 |
| | 76.3 64.4 | | 79.0 62.0 | | 2.42 2.65 3.27 3.31 | | | 0.00 | +0.75 | +0.75 |
| | 80.0 61.2 | | 87.0 54.0 | | 3.50 3.50 4.54 4.61 | | | 0.00 | +1.07 | +1.07 |
| | 80.3 61.7 | | 85.0 56.0 | | 3.56 3.38 4.31 4.35 | | | 0.00 | +0.86 | +0.86 |
| | 86.4 56.5 | | 94.0 47.2 | | 4.47 4.28 5.19 5.26 | | | 0.00 | +0.85 | +0.85 |
| 1913 okt. 26 1 ^h 50 ^m | 80.3 61.9 | | 81.3 60.9 | | 3.56 3.33 3.75 3.55 | | 31.8 34.2 | 0.00 | +0.20 | +0.20 |
| | 75.0 66.3 | | 76.4 65.3 | | 1.85 1.89 2.49 2.33 | | | 0.00 | +0.53 | +0.53 |
| | 77.0 64.8 | | 77.7 63.0 | | 2.72 2.52 2.93 3.06 | | | 0.00 | +0.38 | +0.38 |
| | 78.5 63.0 | | 77.6 63.2 | | 3.14 3.06 2.90 3.00 | | | 0.00 | -0.15 | -0.15 |
| | 81.0 61.2 | | 80.0 62.2 | | 3.70 3.50 3.50 3.26 | | | 0.00 | -0.22 | -0.22 |
| 1913 okt. 27 0 ^h 12 ^m | 85.8 56.1 | | 89.0 52.7 | | 4.41 4.34 4.76 4.75 | | 19.0 21.4 | 0.00 | +0.37 | +0.37 |
| | 79.4 63.0 | | 81.4 59.7 | | 3.19 3.06 3.77 3.78 | | | 0.00 | +0.65 | +0.65 |
| | 81.3 57.2 | | 85.4 55.6 | | 4.09 4.18 4.36 4.40 | | | 0.00 | +0.25 | +0.25 |
| | 80.2 54.0 | | 87.4 53.4 | | 4.54 4.61 4.58 4.68 | | | 0.00 | +0.06 | +0.06 |
| | 96.3 47.0 | | 95.0 50.4 | | 5.36 5.28 5.27 4.98 | | | 0.00 | -0.19 | -0.19 |
| 1913 okt. 28 1 ^h 54 ^m | 85.7 56.7 | | 90.6 52.5 | | 4.39 4.25 4.91 4.77 | | 32.0 34.3 | 0.00 | +0.52 | +0.52 |
| | 77.6 63.7 | | 79.3 62.0 | | 2.89 2.85 3.34 3.31 | | | 0.00 | +0.46 | +0.46 |
| | 80.2 62.0 | | 83.6 58.0 | | 3.54 3.31 4.12 4.07 | | | 0.00 | +0.68 | +0.68 |
| | 85.0 56.4 | | 87.4 56.2 | | 4.31 4.20 4.58 4.32 | | | 0.00 | +0.20 | +0.20 |
| | 88.9 53.0 | | 93.4 49.0 | | 4.75 4.72 5.14 5.10 | | | 0.00 | +0.38 | +0.38 |
| 1913 okt. 29 0 ^h 52 ^m | 86.5 56.2 | | 93.3 50.2 | | 4.48 4.32 4.97 4.81 | | 24.3 26.7 | 0.00 | +0.60 | +0.60 |
| | 79.0 62.2 | | 82.6 60.1 | | 3.27 3.26 3.97 3.71 | | | 0.00 | +0.58 | +0.58 |
| | 82.4 59.7 | | 87.0 56.2 | | 3.93 4.04 4.54 4.32 | | | 0.00 | +0.45 | +0.45 |
| | 84.0 58.2 | | 88.0 55.2 | | 4.18 4.04 4.65 4.45 | | | 0.00 | +0.44 | +0.44 |
| | 93.3 51.5 | | 96.5 45.7 | | 5.14 4.88 5.37 5.38 | | | 0.00 | +0.37 | +0.37 |
| 1913 nov. 16 1 ^h 28 ^m | 85.7 55.2 | | 90.6 52.0 | | 4.40 4.45 4.91 4.83 | | 28.9 31.4 | 0.00 | +0.45 | +0.45 |
| | 77.0 63.7 | | 81.4 60.7 | | 2.73 2.85 3.77 3.60 | | | 0.00 | +0.88 | +0.88 |
| | 80.5 60.4 | | 83.7 58.0 | | 3.60 3.65 4.14 4.07 | | | 0.00 | +0.48 | +0.48 |
| | 83.0 60.0 | | 88.0 55.0 | | 4.03 3.73 4.65 4.48 | | | 0.00 | +0.68 | +0.68 |
| | 90.3 54.2 | | 94.6 47.4 | | 4.89 4.58 5.24 5.25 | | | 0.00 | +0.61 | +0.61 |
| 1913 decz. 3 2 ^h 16 ^m | 90.9 51.6 | | 90.4 51.4 | | 4.94 4.87 4.90 4.89 | | 35.3 37.5 | 0.00 | -0.02 | -0.02 |
| | 80.6 61.2 | | 80.4 60.5 | | 3.62 3.50 3.58 3.63 | | | 0.00 | +0.04 | +0.04 |
| | 83.8 58.0 | | 84.0 58.0 | | 4.15 4.07 4.18 4.07 | | | 0.00 | +0.02 | +0.02 |
| | 90.6 52.8 | | 89.3 53.8 | | 4.91 4.74 4.73 4.63 | | | 0.00 | -0.10 | -0.10 |
| | 99.0 45.0 | | 95.6 48.4 | | 5.54 5.43 5.31 5.16 | | | 0.00 | -0.25 | -0.25 |
| 1913 decz. 19 3 ^h 35 ^m | 80.0 61.8 | | 80.5 61.7 | | 3.50 3.35 3.60 3.38 | | 44.9 47.0 | 0.00 | +0.07 | +0.07 |
| | 75.4 65.6 | | 76.0 65.0 | | 2.04 2.20 2.33 2.46 | | | 0.00 | +0.26 | +0.26 |
| | 77.9 63.7 | | 78.2 63.4 | | 2.98 2.86 3.06 2.94 | | | 0.00 | +0.08 | +0.08 |
| | 79.0 62.6 | | 78.3 63.5 | | 3.27 3.16 3.08 2.91 | | | 0.00 | -0.20 | -0.20 |
| | 82.0 60.0 | | 80.6 61.4 | | 3.87 3.73 3.62 3.44 | | | 0.00 | -0.27 | -0.27 |

| Az ész- lelés ideje csillag- időben | δ | | ζ | | Fényesség | | | | z | Extinctio | Fényesség- különbség | Fényességkülön- bség extinc- tióval javítva |
|--|----------|-------|---------|-------|-----------|------|---------|------|-----------|-----------|-------------------------|---|
| | S_k | S_b | S_k | S_b | δ | | ζ | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| 1913 decz. 20 3h 40m | 85.6 | 55.5 | 88.9 | 53.6 | 4.38 | 4.42 | 4.75 | 4.65 | 45.1 47.2 | 0.00 | +0.20 | +0.20 |
| | 78.5 | 63.0 | 79.3 | 62.4 | 3.14 | 3.06 | 3.34 | 3.21 | | | | |
| | 80.0 | 61.0 | 82.5 | 58.0 | 3.50 | 3.53 | 3.92 | 4.07 | | | | |
| | 84.0 | 57.8 | 86.2 | 56.2 | 4.18 | 4.10 | 4.45 | 4.32 | | | | |
| | 88.6 | 53.0 | 90.4 | 52.0 | 4.72 | 4.72 | 4.90 | 4.83 | | | | |
| 1914 jan. 12 4h 54m | 81.9 | 59.3 | 86.1 | 55.5 | 3.85 | 3.86 | 4.44 | 4.41 | 53.2 55.2 | +0.02 | +0.57 | +0.59 |
| | 77.4 | 63.4 | 80.4 | 60.6 | 2.84 | 2.95 | 3.58 | 3.61 | | | | |
| | 79.4 | 61.7 | 81.9 | 59.5 | 3.36 | 3.38 | 3.85 | 4.00 | | | | |
| | 81.4 | 60.7 | 84.0 | 56.6 | 3.77 | 3.60 | 4.18 | 4.26 | | | | |
| | 83.4 | 58.6 | 86.4 | 55.0 | 4.09 | 3.97 | 4.47 | 4.48 | | | | |
| 1914 márcz. 18 9h 36m | 80.8 | 61.6 | 83.5 | 57.4 | 3.66 | 3.65 | 4.10 | 4.15 | 73.5 73.7 | +0.01 | +0.46 | +0.47 |
| | 76.3 | 64.0 | 77.4 | 63.0 | 2.45 | 2.77 | 2.85 | 3.06 | | | | |
| | 77.9 | 63.2 | 80.7 | 60.5 | 3.00 | 3.00 | 3.64 | 3.63 | | | | |
| | 79.0 | 62.4 | 81.7 | 59.8 | 3.27 | 3.21 | 3.82 | 3.77 | | | | |
| | 83.2 | 59.0 | 85.4 | 56.8 | 4.06 | 3.91 | 4.36 | 4.24 | | | | |
| 1914 márcz. 22 9h 20m | 80.3 | 61.6 | 82.0 | 58.9 | 3.56 | 3.40 | 3.87 | 3.93 | 73.3 73.4 | +0.01 | +0.42 | +0.43 |
| | 76.5 | 64.9 | 77.3 | 63.5 | 2.53 | 2.50 | 2.81 | 2.91 | | | | |
| | 77.0 | 63.4 | 80.2 | 62.1 | 2.73 | 2.94 | 3.32 | 3.29 | | | | |
| | 80.0 | 61.3 | 80.4 | 60.2 | 3.50 | 3.47 | 3.58 | 3.69 | | | | |
| | 84.2 | 58.6 | 85.0 | 56.3 | 4.21 | 3.97 | 4.31 | 4.31 | | | | |
| 1914 márcz. 24 9h 07m | 92.6 | 49.1 | 103.2 | 41.1 | 5.08 | 5.10 | 5.78 | 5.70 | 72.9 73.2 | +0.01 | +0.65 | +0.66 |
| | 80.6 | 61.1 | 84.2 | 57.6 | 3.62 | 3.52 | 4.20 | 4.13 | | | | |
| | 86.6 | 55.0 | 91.8 | 50.0 | 4.50 | 4.48 | 5.01 | 5.02 | | | | |
| | 90.0 | 52.0 | 99.0 | 44.0 | 4.86 | 4.83 | 5.54 | 5.50 | | | | |
| | 98.0 | 46.0 | 104.5 | 38.0 | 5.48 | 5.36 | 5.84 | 5.89 | | | | |

XII. táblázat.

| Az észlelés ideje | Maximumok V. A. G. adatai szerint | Phasisok | Össze- tett | Vörös | Sárga | Zöld | Kék |
|-------------------|---|----------|----------------|---------------|-------|-------|-------|
| | | | | f é n y b e n | | | |
| 1913 | 1913 | | | | | | |
| szept. 16.42 | szept. 13.90 | +2.52 | +0.52 | +0.71 | +0.60 | +0.50 | +0.52 |
| „ 17.42 | „ „ | +3.52 | +0.72 | +0.65 | +0.78 | +0.54 | +0.42 |
| „ 20.36 | „ 19.27 | +1.09 | +0.31 | +0.55 | +0.43 | +0.30 | +0.13 |
| „ 21.38 | „ „ | +2.11 | +0.45 | +0.67 | +0.75 | +0.60 | +0.42 |
| „ 28.44 | „ 24.64 | +3.80 | +1.08 | +0.88 | +1.05 | +0.68 | +0.77 |
| okt. 21.37 | okt. 16.11 | +5.26 | -0.04 | -0.06 | -0.31 | -0.30 | -0.57 |
| „ 22.38 | „ 21.47 | +0.91 | +0.09 | +0.28 | +0.46 | +0.03 | -0.02 |
| „ 23.37 | „ „ | +1.90 | +0.63 | +0.56 | +0.91 | +0.20 | +0.32 |
| „ 25.38 | „ „ | +3.91 | +1.05 | +0.75 | +1.07 | +0.86 | +0.85 |
| „ 26.42 | „ „ | +4.95 | +0.20 | +0.53 | +0.38 | -0.15 | -0.22 |
| „ 27.36 | „ 26.83 | +0.53 | +0.37 | +0.65 | +0.25 | +0.06 | -0.19 |
| „ 28.33 | „ „ | +1.50 | +0.52 | +0.46 | +0.68 | +0.20 | +0.38 |
| „ 29.39 | „ „ | +2.56 | +0.60 | +0.58 | +0.45 | +0.44 | +0.37 |
| nov. 16.36 | nov. 11.92 | +4.44 | +0.45 | +0.88 | +0.48 | +0.68 | +0.61 |
| decz. 3.35 | „ 28.03 | +5.32 | -0.02 | +0.04 | +0.02 | -0.10 | -0.25 |
| „ 19.32 | decz. 14.14 | +5.18 | +0.07 | +0.26 | +0.08 | -0.20 | -0.27 |
| „ 20.35 | „ 19.51 | +0.84 | +0.20 | +0.17 | +0.47 | +0.15 | +0.15 |
| 1914 | 1914 | | | | | | |
| jan. 12.37 | jan. 10.97 | +1.40 | +0.59 | +0.72 | +0.57 | +0.56 | +0.47 |
| márcz. 18.34 | márcz. 15.37 | +2.97 | +0.47 | +0.36 | +0.64 | +0.57 | +0.33 |
| „ 22.33 | „ 20.74 | +1.59 | +0.43 | +0.33 | +0.47 | +0.18 | +0.23 |
| „ 24.33 | „ 20.74 | +3.59 | +0.66 | +0.61 | +0.53 | +0.69 | +0.44 |

XIII. táblázat.

ç Cephei fénygörbeinek adatai.

| Phasisok | Össze- tett | Vörös | Sárga | Zöld | Kék | Közepes fénygörbe adatai | Az egyesített észlelések száma |
|----------|----------------|-------|-------|-------|-------|--------------------------------|---|
| | | | | | | | |
| +0.53 | +0.37 | +0.65 | +0.25 | +0.06 | -0.19 | +0.19 | 1 |
| +0.88 | +0.15 | +0.23 | +0.46 | +0.09 | +0.07 | +0.21 | 2 |
| +1.09 | +0.31 | +0.55 | +0.43 | +0.30 | +0.13 | +0.35 | 1 |
| +1.45 | +0.56 | +0.59 | +0.63 | +0.38 | +0.43 | +0.51 | 2 |
| +1.55 | +0.48 | +0.40 | +0.58 | +0.19 | +0.31 | +0.37 | 2 |
| +1.90 | +0.63 | +0.56 | +0.91 | +0.20 | +0.32 | +0.50 | 1 |
| +2.11 | +0.45 | +0.67 | +0.75 | +0.60 | +0.42 | +0.61 | 1 |
| +2.54 | +0.56 | +0.65 | +0.53 | +0.47 | +0.44 | +0.52 | 2 |
| +2.97 | +0.47 | +0.36 | +0.64 | +0.57 | +0.33 | +0.48 | 1 |
| +3.56 | +0.69 | +0.63 | +0.65 | +0.62 | +0.43 | +0.58 | 2 |
| +3.86 | +1.07 | +0.82 | +1.06 | +0.77 | +0.81 | +0.87 | 2 |
| +4.44 | +0.45 | +0.88 | +0.48 | +0.68 | +0.61 | +0.66 | 1 |
| +4.95 | +0.20 | +0.50 | +0.38 | -0.15 | -0.22 | +0.14 | 1 |
| +5.25 | 0.00 | +0.08 | -0.07 | -0.20 | -0.36 | -0.17 | 3 |
| +5.29 | -0.03 | -0.01 | -0.14 | -0.20 | -0.41 | -0.19 | 2 |

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 április 27. én tartott üléséről.)

VIZSGÁLATOK AZ ABSOLUT SUMMABILIS SOROKRÓL, ALKALMAZÁSSAL A DIRICHLET- ÉS FOURIER-SOROKRA.

FEKETE MIHÁLY-tól.

Bevezetés.

«A széttartó végtelen sorok elméletéhez» czimű dolgozatomban ¹ ismerttettem a CESÀRO-féle közepekkel összegezzhető, «absolut summabilis» sorok fogalmát és megmutattam, hogy e sorok több szempontból az absolut konvergens sorok általánosításainak tekinthetők.² Bebizonyítottam, hogy minden absolut konvergens sor egyben bárminő rendben absolut summabilis és megmutattam, hogy két absolut summabilis, illetőleg egy absolut és egy nem absolut summabilis sor szorzatára általánosíthatók CAUCHY és MERTENS-nek az összetartó sorok szorzatára vonatkozó klasszikus tételei.

Ez eredmények publikálása óta megkíséreltem az absolut summabilitás alkalmazását a közönséges DIRICHLET-sorokra, és mivel vizsgálataim azt mutatták, hogy egyes kérdések megoldása egyszerűbb, ha a számtani közepek képzésének HÖLDER-féle

¹ Math. és Természettud. Értesítő. 1911. XXIX. kötet. 719—726. II.

² Az «absolut summabilitás» fogalma a számtani közepekkel összegezzhető soroknál FEJÉR úrtól származik. Szóbeli közlés alapján — melyért őszinte köszönettel tartozom — vettem róla tudomást, mintán «Sur un théorème de M. Landau» cz. cikkemben (C. R. 1910) olyan összegezzhető sorokkal már foglalkoztam, melyek a FEJÉR-féle definíció értelmében absolut summabilisnek nevezett sorok körében ugyanolyan alosztályt alkotnak, a minőt az összetartó pozitív tagú sorok az absolut konvergens sorok körében.

definícióját veszem alapul, megalkottam a «HÖLDER közepeivel abszolút summabilis» sor fogalmát.

Hogy a sorok szorzatára vonatkozólag korábban nyert eredményeket a HÖLDER módszerével való abszolút summabilitás esetére és viszont a DIRICHLET-sorokat illető újabb eredményeket a CESÀRO közepeivel való abszolút summabilitás esetére kimutassam, de önmagáért is kíváncsúnak látszott, hogy megállapítsam: a HÖLDER-féle közepekkel r -ed rendben abszolút summabilis sorok egyben CESÀRO közepeivel is r -ed rendben abszolút summabilisek és *vice versa*.

E tény bizonyítása alkotja a jelen dolgozat I. részének fő-tárgyát. Ugyanitt, az előbbivel párhuzamosan, új bizonyítást adom WALTER SCHNEE ama tételének,¹ a mely szerint CESÀRO és HÖLDER összegező módszerei koextenzívek, azaz az r -ed rendű HÖLDER-közepek limesének létezése involválja a CESÀRO-féle r -ed rendű közepek limesének létezését és viszont.

A II. részben megmutatom, hogy egy úgynevezett közönséges DIRICHLET-sor különböző rendű, abszolút és nem abszolút summabilitási tartományai — miként az abszolút és nem abszolút összetartásai — félsíkok, melyek balról a reális tengelyre merőleges egyenesekkel vannak határolva; vizsgálom e határegyenesek kölcsönös helyzetét és meghatározom a reális tengellyel való metszéspontjaiknak: a summabilitási abszcissáknak értékeit a soregyütthatóknak függvényeképen; végül vizsgálom a sor által definiált analitikai függvény nagyságrendjét a különböző rendű, abszolút és nem abszolút summabilitási tartományokba eső, az imaginarius tengellyel párhuzamos egyeneseken. (Minde vizsgálataimnak a *nem abszolút* summabilitásra vonatkozó részében nem adok újat eredményekben, csak ismert eredményeknek új bizonyítását.)

Dolgozatom III., befejező részében FOURIER-sorok abszolút summabilitását vizsgálom. FEJÉR úr szíves volt velem közölni, hogy a valós változós, 2π periodusú, korlátos függvények egy nevezetes osztályának FOURIER-sora: azoké, melyek — végesszámú

¹ «Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes.» Math. Ann. B. 67. (1909) p. 110.

helytől eltekintve — a $(0, 2\pi)$ intervallumban mindenütt létező, véges és RIEMANN szerint integrabilis differenciálhányadossal bírnak, mindenütt I. rendben abszolút summabilis. FEJÉR úr eredményének közlése után felvetem a kérdést, vajjon a függvénynek valamely helyen való folytonossága elegendő-e arra, hogy az illető helyen a FOURIER-sor I-rendű abszolút summabilitását biztosítsa és megmutatom, hogy létezik olyan, a $(0, 2\pi)$ közben mindenütt folytonos függvény, melynek FOURIER-sora a 0 helyen bármily magas rendben sem abszolút summabilis.

I. rész.

1. §. A CESÀRO- és HÖLDER-közeppekkel való summabilitás és absolut summabilitás definíciója.

Legyen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1)$$

egy tetszésszerinti végtelen sor és legyen

$$\begin{aligned} s_n^{(0)} &= a_0 + a_1 + \dots + a_n, \\ s_n^{(1)} &= \frac{s_0^{(0)} + s_1^{(0)} + \dots + s_n^{(0)}}{n+1}, \\ s_n^{(2)} &= \frac{s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \dots + s_n^{(1)}}{n+1}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ &\vdots \\ s_n^{(r)} &= \frac{s_0^{(r-1)} + s_1^{(r-1)} + \dots + s_n^{(r-1)}}{n+1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} A_n^{(0)} &= a + a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ A_n^{(1)} &= A_0^{(0)} + A_1^{(0)} + \cdots + A_n^{(0)}, \\ A_n^{(2)} &= A_0^{(1)} + A_1^{(1)} + \cdots + A_n^{(1)}, \\ &\vdots \\ A_n^{(r)} &= A_0^{(r-1)} + A_1^{(r-1)} + \cdots + A_n^{(r-1)}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

végül

$$S_n^{(0)} = A_n^{(0)}, \quad S_n^{(1)} = \frac{A_n^{(1)}}{\binom{n+1}{1}}, \dots, \quad S_n^{(r)} = \frac{A_n^{(r)}}{\binom{n+r}{r}}, \dots$$

($n=0, 1, 2, \dots$).

Definíció:

1° a) Ha az $s_n^{(r)}$ r -ed rendű HÖLDER-közepek sorozata limeshez tart, a mikor $n \rightarrow \infty$, vagyis ha az

$$s_0^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n^{(r)} - s_{n-1}^{(r)}) \quad (2)$$

sor konvergens, akkor az (1) sorról azt mondjuk, hogy «*summabilis* HÖLDER r -ed rendű közepeivel» vagy röviden «*summabilis* (Hr)». ¹

1° b) Ha az $S_n^{(r)}$ r -ed rendű CESÀRO-közepek sorozata limeshez tart, a mikor $n \rightarrow \infty$, vagyis ha az

$$S_0^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} (S_n^{(r)} - S_{n-1}^{(r)}) \quad (3)$$

sor konvergens, akkor az (1) sorról azt mondjuk, hogy «*summabilis* CESÀRO r -ed rendű közepeivel» vagy röviden «*summabilis* (Cr)».

2° a, b) Ha (2), illetőleg (3) nemcsak konvergens, de egyben abszolút konvergens, akkor az (1) sorról azt mondjuk, hogy «*absolut summabilis* HÖLDER r -ed rendű közepeivel», illetőleg «*absolut summabilis* CESÀRO r -ed rendű közepeivel» vagy röviden «*absolut summabilis* (Hr)», illetőleg «*absolut summabilis* (Cr)».

Ismeretes, hogy ha (1) *summabilis* (Hr), akkor egyben *summabilis* ($Hr+1$) és épen így: ha (1) *summabilis* (Cr), akkor egyben *summabilis* ($Cr+1$).

«A széttartó végtelen sorok elméletéhez» című dolgozatomban ² megmutattam, hogy ha (1) *absolut summabilis* (Cr), akkor egyben *absolut summabilis* ($Cr+1$). Azt állítom, hogy az analog tény a HÖLDER-féle közepek esetében is igaz. Vegyük ugyanis figyelembe, hogy ha

¹ (Hr) és (Cr) HARDY által bevezetett jelölések.

² Idézett helyen.

$$s_n^{(r)} - s_{n-1}^{(r)} = b_n \quad (n \geq 1); \quad b_0 = s_0^{(r)},$$

továbbá ha $T_n^{(0)}$, $T_n^{(1)}$ jelentik a Σb_n sorhoz tartozó 0-ad és első rendű CÉSÁRO közepeket, akkor

$$\begin{aligned} T_n^{(0)} &= s_n^{(r)}, \\ T_n^{(1)} &= s_n^{(r+1)}, \end{aligned}$$

és így

$$s_n^{(r+1)} - s_{n-1}^{(r+1)} = T_n^{(1)} - T_{n-1}^{(1)}.$$

Tehát állításunk, miszerint (1) *absolut summabilitása* (Hr) *involválja* (1) *absolut summabilitását* $(Hr+1)$, æquivalens azzal, hogy a $\sum_0^\infty b_n$ absolut konvergenciájából következik ugyane sornak absolut summabilitása $(C1)$; de ez az imént idézett tétel szerint igaz és így állításunk be van bizonyítva.

2. §. Néhány segéd-tétel.

SCHNEE vizsgálataiból¹ ismeretes, hogy ha (1) *summabilis* (Hr) , akkor egyben *summabilis* (Cr) és *vice versa*. Hogy ez eredményt, illetőleg párhuzamban az analog tényt az absolut summabilitás esetére bebizonyíthassuk, néhány segéd-tételre lesz szükségünk.

I. Ha

$$\sum_0^\infty a_n \text{ summabilis abs. summabilis } (Hr),$$

akkor

$$\sum_0^\infty c_n \equiv \sum_0^\infty J(na_n) \text{ summabilis abs. summabilis } (Hr+1).^2$$

Bizonyítás: Jelölje a $\sum_0^\infty c_n$ sor 0, 1, ... rendű HÖLDER közepeit: $z_n^{(0)}$, $z_n^{(1)}$, ..., akkor

$$\begin{aligned} z_n^{(0)} &= na_n, \\ z_n^{(1)} &= \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n+1} = s_n^{(0)} - s_n^{(1)}, \\ z_n^{(2)} &= s_n^{(1)} - s_n^{(2)}, \\ &\dots \\ z_n^{(r)} &= s_n^{(r-1)} - s_n^{(r)}, \end{aligned}$$

¹ Idézett helyen.

² $\Delta u_n \equiv u_n - u_{n-1}$ ($n \geq 1$), $\Delta u_0 = u_0$.

végül

$$z_n^{(r+1)} = s_n^{(r)} - s_n^{(r+1)},$$

a mi állításunk igazságát mutatja, mert egyrészt — miként az előző §-ban láttuk, egy sornak $\frac{\text{summabilitása}}{\text{abs. summabilitása}} (Hr)$ involválja ugyane sornak ugyanolyan fajta $(r+1)$ -ed rendű summabilitását, másrészt pedig két sor különbsége $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr+1)$, ha maguk a sorok ilyen karakterrel bírtak.

I₂. Ha

$$\sum_0^\infty a_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Cr),$$

akkor

$$\sum_0^\infty c_n \equiv \sum_0^\infty \Delta(na_n) \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Cr+1).$$

Bizonyítás: Legyenek a $\sum_0^\infty c_n$ sor 0, 1, ... rendű CESÀRO közepei: $Z_n^{(0)}, Z_n^{(1)}, \dots$ és CESÀRO-fele összegei (azaz $\sum_{v=0}^n c_v, \sum_{v=0}^n \sum_{q=0}^v c_q, \dots$): $C_n^{(0)}, C_n^{(1)}, \dots$, akkor

$$\begin{aligned} C_n^{(0)} &= na_n \\ C_n^{(1)} &= a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = (n+1)A_n^{(0)} - A_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} &= (n+2)A_n^{(1)} - 2A_n^{(2)} \\ C_n^{(3)} &= (n+3)A_n^{(2)} - 3A_n^{(3)} \\ &\dots \dots \dots \\ C_n^{(r)} &= (n+r)A_n^{(r-1)} - rA_n^{(r)} \\ C_n^{(r+1)} &= (n+r+1)A_n^{(r)} - (r+1)A_n^{(r+1)}, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} Z_n^{(r+1)} &= (n+r+1) \frac{A_n^{(r)}}{\binom{n+r+1}{r+1}} - (r+1) \frac{A_n^{(r+1)}}{\binom{n+r+1}{r+1}} = \\ &= (r+1) \{S_n^{(r)} - S_n^{(r+1)}\}, \end{aligned}$$

miből a fentebbiekhez hasonlóan következtethetjük $\sum_0^\infty \Delta(na_n) \frac{\text{summabilitását}}{\text{abs. summabilitását}} (Cr+1)$.

Megjegyzés: $z_n^{(r)}$ és $Z_n^{(r)}$ alakjából következtethetjük, hogy ha $\sum_0^\infty a_n$ legkorábban az r -ed rendű közepekkel $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$,

akkor $\sum_0^\infty A(na_n)$ legkorábban az $(r+1)$ -ed rendű közepekkel $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$. (Hogy ezekkel valóban összegezhető, azt I_1 és I_2 -ből tudjuk.) Ugyancsak $z_n^{(r)}$ és $Z_n^{(r)}$ alakja mutatja, hogy Σc_n summája = 0.

II₁. Ha $\sum_0^\infty a_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr)$ és b_n az $a_n \equiv b_n + A(nb_n)$ relációval van definiálva, akkor $\sum_0^\infty b_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr-1)$.

Bizonyítás: jelölje a $\sum_0^\infty b_n$ sorhoz tartozó HÖLDER közepeket $t_n^{(0)}, t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \dots$. Akkor

$$s_n = t_n^{(0)} + nb_n = t_n^{(0)} + n(t_n^{(0)} - t_{n-1}^{(0)}),$$

azaz

$$s_n = (n+1)t_n^{(0)} - nt_{n-1}^{(0)},$$

tehát

$$s_n^{(1)} = t_n^{(0)},$$

$$s_n^{(2)} = t_n^{(1)},$$

$$\dots \dots$$

$$s_n^{(r)} = t_n^{(r-1)},$$

a miből állításunk igazsága evidenten következik.

III. Ha $\sum_0^\infty a_n$ r -ed rendű CESÀRO-összegei $A_0^{(r)}, A_1^{(r)}, \dots, A_n^{(r)}, \dots$ és r -ed rendű CESÀRO közepei $S_0^{(r)}, S_1^{(r)}, \dots, S_n^{(r)}, \dots$ továbbá, ha

$$a_n = S_{n-r}^{(r)} - S_{n-r-1}^{(r)}; \quad S_i^{(r)} = 0, \quad i < 0,$$

akkor fennáll¹ az identitás:²

$$a_n = a_n - \mathcal{P} \left[\binom{n}{1} a_n \right] + \mathcal{P}^{(2)} \left[\binom{n}{2} a_n \right] - \dots + (-1)^r \mathcal{P}^{(r)} \left[\binom{n}{r} a_n \right].$$

Bizonyítás: Ismeretes, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} \sum_0^\infty a_n x^n \equiv \sum_0^\infty A_n^{(r)} x^n$$

¹ $\mathcal{P}u_n \equiv u_n - u_{n+1}$, $\mathcal{P}^{(2)}u_n \equiv \mathcal{P}(\mathcal{P}u_n) = u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2}, \dots$,
 $\mathcal{P}^{(k)}(u_n) \equiv \mathcal{P}(\mathcal{P}^{(k-1)}(u_n)) \equiv u_n - \binom{k}{1}u_{n+1} + \binom{k}{2}u_{n+2} - \dots + \binom{k}{k}(-1)^k u_{n+k}$.

² »A széttartó végtelen sorok elméletéhez« cz. dolgozatomban ez az identitás hibásan van felírva, (a belőle vont következtetések helytállók).

tehát

$$\frac{r!}{(1-x)^{r+1}} \sum_0^{\infty} a_n x^n \equiv \frac{dr}{dx^r} \sum_0^{\infty} \frac{A_n^{(r)}}{\binom{n+r}{r}} x^{n+r} \equiv \frac{dr}{dx^r} \left\{ \sum_0^{\infty} S_n^{(r)} x^{n+r} \right\}$$

és így

$$\frac{r!}{(1-x)^{r+1}} \sum_0^{\infty} a_n x^n \equiv \frac{dr}{dx^r} \left\{ \frac{1}{1-x} \sum_0^{\infty} a_{n+r} x^{n+r} \right\},$$

következésképp

$$\begin{aligned} \frac{r!}{(1-x)^{r+1}} \sum_0^{\infty} a_n x^n &\equiv \frac{r!}{(1-x)^{r+1}} \sum_0^{\infty} a_{n+r} x^{n+r} + \\ &+ \frac{(r-1)! \binom{r}{1}}{(1-x)^r} \sum_0^{\infty} a_{n+r} (n+r) x^{n+r-1} + \\ &+ \frac{(r-2)! \binom{r}{2}}{(1-x)^{r-1}} \sum_0^{\infty} a_{n+r} (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + \\ &+ \dots + \frac{1}{1-x} \sum_0^{\infty} a_{n+r} (n+r)(n+r-1) \dots (n+1) x^n, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} a_n x^n &\equiv \sum_0^{\infty} a_{n+r} x^{n+r} + (1-x) \sum_0^{\infty} \binom{n+r}{1} a_{n+r} x^{n+r-1} + \\ &+ (1-x)^2 \sum_0^{\infty} \binom{n+r}{2} a_{n+r} x^{n+r-2} + \dots + (1-x)^r \sum_0^{\infty} \binom{n+r}{r} a_{n+r} x^n, \end{aligned}$$

a miből a bizonyítandó állítás igazságát rögtön beláthatjuk, ha tekintetbe vesszük, hogy általában

$$\begin{aligned} (1-x)^k \sum_0^{\infty} u_{n+k} x^n &\equiv \\ &\equiv \sum_0^{\infty} \left\{ u_{n+k} - \binom{k}{1} u_{n+k-1} + \binom{k}{2} u_{n+k-2} - \dots + (-1)^k u_n \right\} x^n \\ &\equiv (-1)^k \sum_0^{\infty} \Gamma^{(k)}(u_n) x^n. \quad (u_0 = u_1 = \dots = u_{k-1} = 0) \end{aligned}$$

IV. Ha $\sum_0^\infty v_n \frac{\text{konvergens}}{\text{abs. konvergens}}$, akkor $\sum_0^\infty \mathcal{F}^{(k)} \left[\binom{n}{k} v_n \right] \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Ck)$.

Állításunk $k=1$ esetében következik I_2 -ből; tekintsük igaznak, ha a \mathcal{P} differenzia rendszáma $(k-1)$ -et meg nem haladja és vegyük tekintetbe a következő identitást:

$$\mathcal{F}^{(k)} \left[\binom{n}{k} v_n \right] = \frac{1-k}{k} \mathcal{F}^{(k-1)} \left[\binom{n}{k-1} v_n \right] + \frac{1}{k} \mathcal{P} \left\{ n \mathcal{F}^{(k-1)} \left[\binom{n}{k-1} v_n \right] \right\}$$

(Lásd a 3. §. B) pontját.) $(k-1)$ -re igaznak vett állításunk és I_2 szerint a jobboldal első és második tagja olyan sorok általános tagjai, melyek $\frac{\text{summabilisek}}{\text{abs. summabilisek}} (Ck-1)$, illetőleg (Ck) ; már pedig ily sorok összege $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Ck)$.

Qu. e. d.

IV-ből következik már most:

V. Ha $\sum a_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Cr)$ és

$$a_n = a_n - \mathcal{F} \left[\binom{n}{1} a_n \right] + \mathcal{F}^{(2)} \left[\binom{n}{2} a_n \right] - \dots + (-1)^r \mathcal{P}^{(r)} \left[\binom{n}{r} a_n \right],$$

[hol a_n a fentebb jelzett módon van értelmezve] akkor

$$\sum a_n, \sum \mathcal{F} \left[\binom{n}{1} a_n \right], \sum \mathcal{F}^2 \left[\binom{n}{2} a_n \right], \dots$$

rendre $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (C0), (C1), (C2), \dots$

3. §. CESÀRO és HÖLDER módszereinek koextenzivitása.

A) Ha $\sum a_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr)$, akkor egyben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Cr)$. $r \geq 1$.

A tétel nyilvánvaló $r=1$ esetében, hiszen

$$s_n^{(1)} \equiv S_n^{(1)};$$

teljes indukcióval bizonyítandó, vegyük igaznak, ha a $\frac{\text{summabilitás}}{\text{abs. summabilitás}}$ rendszáma $(r-1)$ -et meg nem haladja. Legyen

$$a_n = b_n + \mathcal{A}(nb_n).$$

II_1 szerint $\sum_0^\infty a_n \frac{\text{summabilitása}}{\text{abs. summabilitása}} (Hr)$ involválja, hogy $\sum_0^\infty b_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr-1)$, de akkor $(r-1)$ -re igaznak vett té-

telünk szerint $\sum_0^\infty b_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Cr-1)$, a mikor aztán I_2 szerint $\sum_0^\infty A(nb_n) \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Cr)$ és így $\sum_0^\infty a_n$, mint egy $(r-1)$ -ed és egy r -ed rendben CESÀRO közepeivel $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ sor összege, maga is $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Cr)$.

B) Ha $\sum_0^\infty a_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Cr)$, akkor egyben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr)$. Tételünket megint csakis $r \geq 2$ esetére kell bebizonyítanunk és e végből újból a teljes indukció módszeréhez folyamodunk. Vegyük tehát igaznak, ha a $\frac{\text{summabilitás}}{\text{abs. summabilitás}}$ rendszáma nem nagyobb $(r-1)$ -nél és tegyük

$$a_n = a_n - P \left[\binom{n}{1} a_n \right] + P^{(2)} \left[\binom{n}{2} a_n \right] - \dots + (-1)^r P^{(r)} \left[\binom{n}{r} a_n \right];$$

akkor V. szerint

$$\sum a_n, \sum P \left[\binom{n}{1} a_n \right], \sum P^{(2)} \left[\binom{n}{2} a_n \right], \dots, \sum P^{(r-1)} \left[\binom{n}{r-1} a_n \right]$$

rendre

$$\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (C0), (C1), (C2), \dots, (Cr-1)$$

és így feltevés szerint egyben rendre

$$\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (H0), (H1), \dots, (Hr-1).$$

Hogy végül még megmutassuk, hogy $\sum P^{(r)} \left[\binom{n}{r} a_n \right]$, mely V. tanítása szerint $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Cr)$, egyben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr)$, vegyük tekintetbe a következő identitást:¹

¹ Alkalmazzuk ugyanis a

$$P^{(k)}(x_n y_n) = x_n P^{(k)} y_n + \binom{k}{1} P x_n P^{(k-1)} y_{n+1} + \binom{k}{2} P^{(2)} x_n P^{(k-2)} y_{n+2} + \dots + y_{n+k} P^{(k)} x_n$$

relációt az esetben, midőn

$$k = r - 1, \quad x = \binom{n}{r-1} a_n, \quad y_n = \frac{n-r+1}{r}.$$

$$\begin{aligned} r^{(r)} \left[\binom{n}{r} a_n \right] &= r \left\{ r^{(r-1)} \left[\binom{n}{r-1} a_n \cdot \frac{n+1-r}{r} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{r} r \left\{ n r^{(r-1)} \left[\binom{n}{r-1} a_n \right] \right\} + \frac{1-r}{r} r^{(r-1)} \left[\binom{n}{r-1} a_n \right]. \end{aligned}$$

A

$$\sum r^{(r-1)} \left[\binom{n}{r-1} a_n \right]$$

sor az előbbiek szerint $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr-1)$. Másrészt I_1 szerint e tény involválja, hogy

$$\sum r \left\{ n r^{(r-1)} \left[\binom{n}{r-1} a_n \right] \right\} \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr),$$

tehát

$$\sum r^{(r)} \left[\binom{n}{r} a_n \right] \text{ maga is } \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr).$$

Eredményeinket összegyűjtve látjuk, hogy $\sum a_n$ oly sorok összege, melyeknek $\frac{\text{summabilitási}}{\text{abs. summabilitási}}$ rendje, (HÖLDER módszerére vonatkoztatva azt.) r -et meg nem haladja, tehát

$$\sum_0^\infty a_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Hr).$$

Qu. e. d.

B) és A) alapján kimondjuk még a következő tételt, mint II_1 pendansát:

II_2 . Ha

$$\sum_0^\infty a_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Gr)$$

és

$$a_n = b_n + A(nb_n)$$

tétetik, akkor

$$\sum_0^\infty b_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} (Gr-1).$$

4. §. A CESÀRO és HÖLDER-féle summák egyenlősége.

Ismeretes, hogy ha egy sor $\frac{\text{CESÀRO}}{\text{HÖLDER}}$ r -ed rendű közepeivel összegezzhető, akkor minden r -nél magasabb rendű $\frac{\text{CESÀRO}}{\text{HÖLDER}}$ közép-pel is összegezzhető és az r -ed, $(r+1)$ -ed, $(r+2)$ -ed, ... rendű közepek közös limeshez tartanak: a sor $\frac{\text{CESÀRO}}{\text{HÖLDER}}$ -féle summájához.

Az előző §-ban láttuk, hogy egy sor CESÀRO és HÖLDER ugyanazon rendű közepeivel egy időben összegezzhető vagy nem. A teljesség kedvéért bebizonyítjuk még a következőkben azt az ismeretes tényt, miszerint *egy, a számtani közepek segítségével összegezzhető sornak CESÀRO és HÖLDER-féle summái egyenlők.*

Legyen tehát Σa_n egy olyan sor, mely CESÀRO és HÖLDER közepeivel összegezzhető, mihelyt ezek rendszáma: $r \geq r_0$. Legyenek, miként eddig, a sor r -ed rendű CESÀRO és HÖLDER-közepei $S_n^{(r)}$ és $s_n^{(r)}$. Mivel

$$\lim S_n^{(r_0)} = \lim S_n^{(r_0+1)} = \lim S_n^{(r_0+2)} = \dots$$

és

$$\lim s_n^{(r_0)} = \lim s_n^{(r_0+1)} = \lim s_n^{(r_0+2)} = \dots,$$

a CESÀRO és HÖLDER-féle summák egyenlőségének bebizonyítása végett csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$\lim s_n^{(r_0)} = \lim S_n^{(r_0)}. \quad (4)$$

Tudvalevő, hogy $s_n^{(0)} = S_n^{(0)}$, $s_n^{(1)} = S_n^{(1)}$, tehát a summák egyenlőségének bizonyításakor csak arra az esetre kell szorítkoznunk, a midőn $r_0 \geq 2$. Teljes indukciót alkalmazunk. Vegyük igaznak a (4) relációt, ha a legkisebb rendszám, a mely mellett az adott sor összegezzhető, $(r_0 - 1)$ -et meg nem haladja és tegyük:

$$a_n = b_n + J(nb_n).$$

Jelölje Σb_n , illetőleg $\Sigma J(nb_n)$ HÖLDER és CESÀRO közepeit $t_n^{(r)}$, $T_n^{(r)}$, illetőleg $z_n^{(r)}$, $Z_n^{(r)}$; akkor, mint I_1 és I_2 bizonyításánál láttuk:

$$z_n^{(r_0)} = t_n^{(r_0-1)} - t_n^{(r_0)}$$

$$Z_n^{(r_0)} = r_0 [T_n^{(r_0-1)} - T_n^{(r_0)}],$$

tehát

$$s_n^{(r_0)} = t_n^{(r_0)} + z_n^{(r_0)} = t_n^{(r_0-1)}$$

$$S_n^{(r_0)} = T_n^{(r_0)} + Z_n^{(r_0)} = T_n^{(r_0)} + r_0 [T_n^{(r_0-1)} - T_n^{(r_0)}] =$$

$$= T_n^{(r_0-1)} + (r_0 - 1) [T_n^{(r_0-1)} - T_n^{(r_0)}].$$



Vegyük most tekintetbe, hogy Π_2 szerint $\lim T_n^{(r_0-1)}$ létezik, tehát

$$\lim (T_n^{(r_0-1)} - T_n^{(r_0)}) = 0$$

és így

$$\lim s_n^{(r_0)} = \lim t_n^{(r_0-1)},$$

$$\lim S_n^{(r_0)} = \lim T_n^{(r_0-1)}.$$

Ámde az (r_0-1) -re igaznak vett (4) reláció szerint

$$\lim t_n^{(r_0-1)} = \lim T_n^{(r_0-1)}$$

tehát

$$\lim s_n^{(r_0)} = \lim S_n^{(r_0)}.$$

Qu. e. d.

II. rész.

1. §. DIRICHLET-sorok r -ed rendű summabilitási és absolut summabilitási tartományának megállapítása.¹

DIRICHLET-sorok alatta következő alakú végtelen sorokat értjük:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^s} = \frac{a_0}{1^s} + \frac{a_1}{2^s} + \frac{a_2}{3^s} + \dots + \frac{a_n}{(n+1)^s} + \dots$$

Az a_0, a_1, a_2, \dots mennyiségek, a sor együtthatói tetszésszerűen reális vagy komplex számok és $n^s = e^{s \log n}$, hol $\log n$ az n pozitív egész szám logaritmusának főértéke, míg $s = \sigma + it$ a független komplex változó.

Ismeretes, hogy ha

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^s} \quad \begin{array}{l} \text{összetartó} \\ \text{absolut összetartó} \end{array}$$

$$s = s_0 = \sigma_0 + it_0 - ra,$$

¹ A nem absolut summabilitásra vonatkozó összes eredményeket vesd össze H. BOHR következő dolgozatainak eredményeivel: 1^o. Über die Summabilität Dirichletscher Reihen (Göttinger Nachrichten 1909). 2^o. Bidrag til de Dirichlet'ske Raekkers Theori. (Dissertatio). Lásd még RIESZ M.: Sur les séries de Dirichlet (C. R. 1909) cz. dolgozatát.

akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^s} \quad \frac{\text{összetartó}}{\text{absolut összetartó}}$$

minden $s = \sigma + it$ értékre, melynél $\frac{\sigma > \sigma_0}{\sigma \geq \sigma_0}$. Ebből következik, hogy ha egy DIRICHLET-sor nem minden s -re szét tartó, akkor létezik olyan $\frac{\sigma = \lambda_0}{\sigma = l_0}$ egyenes, (mely a reális tengelyre merőleges,) melytől jobbra a sor $\frac{\text{összetartó}}{\text{absolut összetartó}}$, balra pedig nem $\frac{\text{összetartó}}{\text{absolut összetartó}}$. (Ha a sor az egész síkon összetartó, illetőleg absolut összetartó, akkor λ_0 , illetőleg l_0 gyanánt $-\infty$ veendő). Az absolut összetartás tartományának határegyenesén magán a sor vagy mindenütt vagy seholsem absolut összetartó.

A jelen §-ban meg akarjuk mutatni, hogy miként a $\frac{\text{konvergenzia}}{\text{abs. konvergenzia}}$, azaz a 0-ad rendű $\frac{\text{summabilitás}}{\text{abs. summabilitás}}$, úgy az r -ed rendű $\frac{\text{summabilitás}}{\text{abs. summabilitás}}$ tartománya is ($r \geq 1$) félsík, melyet balról egy, a reális tengelyre merőleges egyenes határol. Ugyanis igaz a következő tétel:

VI. Ha a ,

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^s}$ sor $s = s_0 = \sigma_0 + it_0$ -ra r -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, akkor ugyanilyen rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ minden $s = \sigma + it$ értékre, mely a $\frac{\sigma > \sigma_0}{\sigma \geq \sigma_0}$ feltételt kielégíti.

[Megjegyezzük, hogy úgy ennek a tételnek, mint a következőknek fogalmazásánál és bizonyításánál nem teszünk különbséget a HÖLDER- és CESÀRO-féle summabilitások között, miután a dolgozat előző részében láttuk, hogy a két módszer koextenzív és egyenlő summákra vezet.]

VI. bebizonyításához néhány segédtételre lesz szükségünk. Ezek a következők:

VII. Bármely komplex számot jelentsen is s és bármely pozitív egész számot k , fennáll az identitás:

$$\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} = -\frac{s}{n^{s+1}} +$$

$$+ \frac{s(s+1)}{2!} \frac{1}{n^{s+2}} - \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} \frac{1}{n^{s+3}} + \dots +$$

$$+ (-1)^k \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!} \frac{1}{n^{s+k}} + \varrho_k^{(n)}$$

hol

$$\varrho_k^{(n)} = (-1)^{k+1} s(s+1)(s+2) \dots$$

$$\dots (s+k) \int_n^{n+1} dx_1 \int_n^{x_1} dx_2 \int_n^{x_2} dx_3 \dots \int_n^{x_{k-1}} dx_k \int_n^{x_k} \frac{dx_{k+1}}{x_{k+1}^{s+k+1}}$$

és n egész szám.

Bizonyítás: teljes indukcióval.

VIII. Az előbbi relációban szereplő $\varrho_k^{(n)}$ mennyiség abszolút értékére fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$|\varrho_k^{(n)}| \leq \frac{|s||s+1|\dots|s+k|}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{n^{\sigma+k+1}},$$

hol $\sigma = R(s)$ {azaz az s reális része}.

IX. Ha

$$\sum_0^\infty a_n \text{ } r\text{-ed rendben } \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}, \text{ akkor } \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} \text{ } (r-1)\text{-ed}$$

$$\text{rendben } \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}.$$

Bizonyítsuk be e tételt először $r=1$ esetében. Legyen

$$a_n = b_n + \Delta(nb_n),$$

vagyis

$$a_n = (n+1)b_n - (n-1)b_{n-1} = (n+1)(b_{n-1} - b_{n-1}) + 2b_{n-1},$$

tehát

$$\frac{a_n}{n+1} = b_n - b_{n-1} + 2 \frac{b_{n-1}}{n+1},$$

hol Π_1 és Π_2 szerint b_n egy $\frac{\text{konvergens}}{\text{abs. konvergens}}$ sor általános tagja; de akkor

$$\sum_1^\infty (b_n - b_{n-1}), \quad \sum_1^\infty \frac{b_{n-1}}{n+1} \frac{\text{konvergens}}{\text{abs. konvergens}}$$

sorok, tehát Σa_n is az.

Tételünket tetszésszerinti rendszám esetére bizonyítandó, tekintsük azt igaznak, a mikor a rendszám $(r-1)$ -et meg nem haladja. Ha már most Σa_n r -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, legyenismét

$$a_n = b_n + 1 (nb_n),$$

tehát
$$\frac{a_n}{n+1} = b_n - b_{n-1} + 2 \frac{b_{n-1}}{n+1}.$$

Σb_n Π_1 és Π_2 szerint $(r-1)$ -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, de akkor Σb_{n-1} is az, tehát $\sum \frac{b_{n-1}}{n+1}$ feltevésünk értelmében $(r-2)$ -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$. Következésképp $\sum \frac{a_n}{n+1}$ mint $(r-1)$ -ed és $(r-2)$ -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ sorok összege maga is $(r-1)$ -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$.

Qu. e. d.

X. Ha $\sum_0^\infty \frac{b_n}{(n+1)^s}$ r -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, akkor

$$\sum_1^\infty (n-1) b_{n-1} \Delta \left(\frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

szintén $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ r -ed rendben.

Bizonyítás: VII. szerint

$$\begin{aligned} (n-1) b_{n-1} \Delta \left(\frac{1}{(n+1)^s} \right) &= - \frac{s b_{n-1}}{n^s} + \frac{s(s+1)}{2!} \frac{b_{n-1}}{n^{s+1}} - \\ &- \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} \frac{b_{n-1}}{n^{s+2}} + \dots + (-1)^r \frac{s(s+1) \dots (s+r+1)}{(r+2)!} \frac{b_{n-1}}{n^{s+r+1}} + \\ &+ \frac{s b_{n-1}}{n^{s+1}} - \frac{s(s+1)}{2!} \frac{b_{n-1}}{n^{s+2}} + \dots + (-1)^{r+1} \frac{s(s+1) \dots (s+r+1)}{(r+2)!} \frac{b_{n-1}}{n^{s+r+2}} + \\ &+ \varrho_{r+2}^{(n)} n b_{n-1} - \varrho_{r+2}^{(n)} b_{n-1}. \end{aligned}$$

Mivel $\sum \frac{b_n}{(n+1)^s}$ feltétel szerint r -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$

IX. szerint

$$\sum \frac{b_{n-1}}{n^s}, \quad \sum \frac{b_{n-1}}{n^{s+1}}, \dots, \quad \sum \frac{b_{n-1}}{n^{s+r}}$$

r -ed, $(r-1)$ -ed, ..., 0 -ad rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ sorok, miből következik, hogy

$$\Sigma (n-1) b_{n-1} \Delta \left(\frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

tényleg r -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, ha még megmutatjuk, hogy

$$\sum \frac{b_{n-1}}{n^{s+r+2}}, \quad \sum n b_{n-1} \varrho_{r+2}^{(n)}, \quad \sum \varrho_{r+2}^{(n)} b_{n-1}$$

absolut konvergens sorok. Ez rögtön evidenciába lép, ha megjegyezzük, hogy $\frac{b_{n-1}}{n^{s+r}}$ limese 0 és hogy VIII. szerint

$$|\varrho_{r+2}^{(n)}| \leq \frac{|s| |s+1| \cdots |s+r+2|}{(r+3)!} \cdot \left| \frac{1}{n^{s+r+3}} \right|.$$

Ezek előrebocsátása után VI. bizonyítása minden nehézség nélkül elvégezhető teljes indukcióval. (Hogy $r=0$ -ra igaz, e § elején láttuk.) Az egyszerűség kedvéért, az általánosság megszorítása nélkül, feltehetjük, hogy $s_0 = 0$, azaz a $\sum \frac{a_n}{(n+1)^s}$ sor az $s=0$ helyen $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ r -ed rendben. Hogy e feltevés mellett megmutassuk:

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^s} \quad \text{minden, az} \quad \frac{R(s) > 0}{R(s) \geq 0}$$

feltételnek megfelelő helyen is $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ r -ed rendben, vegyük ezt az állítást igaznak, ha a $\frac{\text{summabilitás}}{\text{abs. summabilitás}}$ rendje $(r-1)$ -et meg nem haladja és tegyük

$$a_n = b_n + \Delta(n b_n);$$

akkor

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{(n+1)^s} &= \frac{b_n}{(n+1)^s} + \frac{\Delta(n b_n)}{(n+1)^s} = \\ &= \frac{b_n}{(n+1)^s} + \Delta \left(n \frac{b_n}{(n+1)^s} \right) - (n-1) b_{n-1} \Delta \left(\frac{1}{(n+1)^s} \right). \end{aligned}$$

II_1 , II_2 alapján és $r-1$ esetére igaznak vett állításunk szerint $\sum \frac{b_n}{(n+1)^s}$ $(r-1)$ -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, mihelyt $\frac{R(s) > 0}{R(s) \geq 0}$,

de akkor ugyane feltétel mellett ugyanilyen karakterű

$$\sum_0^{\infty} (n-1) b_{n-1} \Delta \left(\frac{1}{(n+1)^s} \right),$$

miként ezt X. tanítja, végül ugyanekkor I_1 és I_2 szerint $\sum_0^{\infty} \Delta \left(n \frac{b_n}{(n+1)^s} \right)$ r -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, tehát $\sum \frac{a_n}{(n+1)^s}$ is az, miként állítottuk.

VI.-ból következik oly

$$R(s) = \lambda_r$$

illetőleg

$$R(s) = l_r$$

egyenes existenciája, melytől jobbra a DIRICHLET-sor r -ed rendben summabilis, illetőleg absolut summabilis, balra pedig nem. Magán az $R(s) = l_r$ egyenesen vagy mindenütt absolut summabilis r -ed rendben a sor, vagy sehol sem.

A summabilitás az r -ed rendű összegezhetőség félsíkjának minden belső véges tartományában egyenletes, mint ezt $r=0$ esetére CAHEN és $r \geq 1$ esetére BOHR megmutatta, a sor r -ed rendű summája ($r \geq 1$) tehát egy analitikus függvényt definiál, mely a sor összege, a 0-ad rendű summa által definiált függvénynek folytatását adja, ha az r -edik summabilitási félsík a konvergencia félsíknál tovább terjed.

2. §. A summabilitási abszcissák eloszlása.

A DIRICHLET-sor $\frac{\text{summabilitási}}{\text{abs. summabilitási}}$ abszcissái alatt a különböző rendű $\frac{\text{summabilitási}}{\text{abs. summabilitási}}$ tartományok határegyeneseinek a reális tengellyel való metszéspontjait értjük, tehát az előbbi §-ban λ_r és l_r -rel jelölt mennyiségeket. Mivel egy r -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ sor mindig $(r+1)$ -ed rendben is $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, evidens, hogy egyfelől

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \lambda_{r+1} \geq \dots,$$

másfelől

$$l_0 \geq l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_r \geq l_{r+1} \geq \dots$$

IX.-ből könnyen következik, hogy

$$\lambda_0 - \lambda_1 \leq 1, \quad \lambda_1 - \lambda_2 \leq 1, \dots, \quad \lambda_r - \lambda_{r+1} \leq 1, \\ l_0 - l_1 \leq 1, \quad l_1 - l_2 \leq 1, \dots, \quad l_r - l_{r+1} \leq 1.$$

Mindezek a relációk csak egyfajta, azaz abs. summabilitási abszcissák vagy nem abs. summabilitási abszcissák közötti összefüggést mutatnak. Azt állítjuk már most, hogy

$$l_0 \geq \lambda_0 \geq l_1, \dots, \quad l_r \geq \lambda_r \geq l_{r+1}, \dots$$

A mi az egyenlőtlenség első felét, az

$$l_r \geq \lambda_r$$

relációt illeti, ez evidens az abs. summabilitás definíciójából; hogy pedig

$$\lambda_r \geq l_{r+1},$$

következik az alábbi tételből:

XI. Ha $\sum_0^\infty a_n$ summabilis r -ed rendben, akkor $\sum_1^\infty \frac{a_n}{(n+1)^{\varepsilon}}$ abs. summabilis $(r+1)$ -ed rendben, hacsak $\varepsilon > 0$.

Bizonyítsuk be ezt az állítást először $r = 0$ esetében. Ekkor tehát azt kell megmutatnunk, hogy ha $\sum_0^\infty a_n$ konvergens, akkor $\sum_1^\infty \frac{a_n}{(n+1)^{\varepsilon}}$ abs. summabilis első rendben, azaz

$$\sum_1^\infty \frac{a_1 2^{-\varepsilon} + 2a_2 3^{-\varepsilon} + \dots + na_n (n+1)^{-\varepsilon}}{n(n+1)}$$

abs. konvergens. Ámde VII. szerint

$$(n+1)^{-\varepsilon} - n^{-\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{n^{\varepsilon+1}} + \varrho_1^{(n)},$$

hol

$$|\varrho_1^{(n)}| \leq \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{2n^{2+\varepsilon}},$$

tehát

$$\begin{aligned} & |a_1 2^{-\varepsilon} + 2a_2 3^{-\varepsilon} + \dots + na_n (n+1)^{-\varepsilon}| \leq \\ & \leq |a_1 + 2^{1-\varepsilon} a_2 + \dots + n^{1-\varepsilon} a_n| + \varepsilon \left| \frac{a_1}{1^{\varepsilon}} + \frac{a_2}{2^{\varepsilon}} + \dots + \frac{a_n}{n^{\varepsilon}} \right| + \\ & + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{2} \left\{ \left| \frac{a_1}{1^{1+\varepsilon}} \right| + \left| \frac{a_2}{2^{1+\varepsilon}} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Ha már most tekintetbe vesszük, hogy

$$\sum \frac{a_n}{n^\varepsilon} \text{ konvergens, } \sum \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

pedig abs. konvergens, ha $\varepsilon > 0$; továbbá, hogy KRONECKER egy tétele szerint¹ konvergens $\sum a_n$ sor esetében

$$\lim \frac{a_1 + 2^{1-\varepsilon}a_2 + \dots + n^{1-\varepsilon}a_n}{n^{1-\varepsilon}} = 0$$

amíg $\varepsilon < 1$, tehát, hogy a

$$\begin{aligned} & \sum \left| \frac{a_1 + 2^{1-\varepsilon}a_2 + \dots + n^{1-\varepsilon}a_n}{n(n+1)} \right| < \\ & < \sum \left| \frac{a_1 + 2^{1-\varepsilon}a_2 + \dots + n^{1-\varepsilon}a_n}{n^{1-\varepsilon}} \right| \cdot \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < K \sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

(hol K alkalmasan választott konstáns) relációinak eleget tevő

$$\sum \frac{a_1 + 2^{1-\varepsilon}a_2 + \dots + n^{1-\varepsilon}a_n}{n(n+1)}$$

sor szintén abs. konvergens, nyilvánvalóvá lesz $\sum \frac{a_n}{(n+1)^\varepsilon}$ első rendű absolut summabilitása.

Tételünk teljes indukcióval így bizonyítható: Vegyük igaznak, ha a summabilitási rendszám $(r-1)$ -et meg nem haladja. Ha már most $\sum a_n$ r -ed rendben summabilis, tegyük

$$a_n = b_n + \Delta(nb_n);$$

akkor $\sum b_n$ Π_1 és Π_2 szerint $(r-1)$ -rendben summabilis; de

$$\frac{a_n}{(n+1)^\varepsilon} = \frac{b_n}{(n+1)^\varepsilon} + \Delta \left(n \frac{b_n}{(n+1)^\varepsilon} \right) - (n-1) b_{n-1} \Delta \left(\frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \right)$$

¹ Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens sor és $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ monoton a végtelenhez tartó pozitív számok, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_n} = 0.$$

és itt $\sum \frac{b_n}{(n+1)^\varepsilon}$ feltevésünkéből eredőleg r -ed rendben absolut summabilis, ha $\varepsilon > 0$; de akkor $\sum \mathcal{A}\left(n \frac{b_n}{(n+1)^\varepsilon}\right)$ $(r+1)$ -ed rendben (I_1, I_2) , $\sum (n-1) b_{n-1} \mathcal{A}\left(\frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\right)$ r -ed rendben abs. summabilis (X), miből következik az állítás a $\sum \frac{a_n}{(n+1)^\varepsilon}$ sorra.

Megjegyezzük még, hogy az

$$l_r \geq \lambda_r \geq l_{r+1},$$

$$l_r - l_{r+1} \leq 1,$$

egyenlőtlenségekből folyik, hogy

$$l_r - \lambda_r \leq 1,$$

tehát az r -edik «feltételes» (nem absolut) summabilitás sávjának szélessége 1-nél nagyobb nem lehet.¹

3. §. Az r -ed rendű summabilitási és absolut summabilitási abszcissák meghatározása az együtthatók függvényeként.

CAHEN² megmutatta, hogy ha a $\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^s}$ DIRICHLET-sor konvergencia-abszcissája $\lambda_0 \geq 0$, akkor

$$\lambda_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\log \left| \sum_{v=0}^n a_v \right|}{\log n}.$$

SCHNEE³ meghatározta a konvergencia abszcissát az esetre, mikor negatív:

Ha $\lambda_0 < 0$, akkor

$$\lambda_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\log \left| \sum_{v=n+1}^\infty a_v \right|}{\log n}.$$

¹ 0-ad rendű summabilitás (konvergencia) esetében lásd CAHEN i. h.

² I. h. p. 85.

³ Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen. (Göttinger Nachrichten 1910.)

Végül KNOPP¹ olyan formulát talált, mely λ_0 értékét minden esetre megadja; megmutatta ugyanis, hogy *legyen bár a λ_0 konvergencia-abszcissa pozitív, 0, vagy negatív:*

$$\lambda_0 = \limsup_{x=\infty} \frac{\log \sum_{v=e^{\lfloor x \rfloor}}^{e^x} |a_v|}{x}, \quad (\lfloor x \rfloor = x \text{ egész része})$$

ha x folytonos értékalmazon át nő a végtelenbe.²

Mivel $\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^s}$ abszolút konvergencziatartománya azonos $\sum_0^\infty \frac{|a_n|}{(n+1)^s}$ konvergencziatartományával, következik a mondatból, hogy

$$\text{ha } l_0 \geq 0, \text{ akkor } l_0 = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \sum_0^n |a_v|}{\log n},$$

$$\text{ha } l_0 < 0, \text{ akkor } l_0 = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \sum_{n+1}^\infty |a_v|}{\log n},$$

$$\text{ha } l_0 \leq 0, \text{ akkor } l_0 = \limsup_{x=\infty} \frac{\log \sum_{v=e^{\lfloor x \rfloor}}^{e^x} |a_v|}{x};$$

KNOPP kimutatta,³ hogy

$$\text{ha } l_0 \leq 0, \text{ akkor az } l_0 = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \sum_{v=e^n}^{e^{n+1}} |a_v|}{n}$$

formula is megadja az abszolút konvergencia-abszcissát.

CAHEN, SCHNEE és KNOPP eredményei már most a következőkép általánosíthatók az r -ed rendű summabilitás és abs.

summabilitás esetére: Ha a $\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^s}$ DIRICHLET-sor r -ed

¹ Über die Abscisse der Grenzgraden einer Dirichletschen Reihe. (Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 1910.)

² A summázási betű, itt és a következőkben, valahányszor az összegezés határai nem egész számok, a közéjük eső egész számok sorozatát futja be.

³ I. h.

rendű summabilitási, illetőleg abszolút summabilitási abszcisszáját λ_r , illetőleg l_r jelöli, ha továbbá a $\sum_0^\infty a_n$ sor r -ed rendű HÖLDER közepei $s_0^{(r)}, s_1^{(r)}, \dots, s_n^{(r)}, \dots$, akkor:

$$\text{ha } \lambda_r \geq 0, \text{ akkor } \lambda_r = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |s_n^{(r)}|}{\log n},$$

$$\text{ha } -1 \leq \lambda_r < 0, \text{ akkor } \lambda_r = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \left| \sum_{v=n+1}^\infty (s_v^{(r)} - s_{v-1}^{(r)}) \right|}{\log n},$$

$$\text{ha } \lambda_r \geq -1, \text{ akkor } \lambda_r = \limsup_{x=\infty} \frac{\log \left| \sum_{v=\lfloor x \rfloor}^\infty (s_v^{(r)} - s_{v-1}^{(r)}) \right|}{x};$$

$$\text{ha } l_r \geq 0, \text{ akkor } l_r = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \left\{ |s_0^{(r)}| + \sum_1^n |s_v^{(r)} - s_{v-1}^{(r)}| \right\}}{\log n},$$

$$\text{ha } -1 \leq l_r < 0, \text{ akkor } l_r = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \sum_{v=n+1}^\infty |s_v^{(r)} - s_{v-1}^{(r)}|}{\log n},$$

$$\text{ha } l_r \geq -1, \text{ akkor } l_r = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \sum_{v=e^n}^{e^{n+1}} |s_v^{(r)} - s_{v-1}^{(r)}|}{n}.$$

A λ_r és l_r értékét a sor együtthatóinak függvényeiként megadó eme formulák $r=0$ esetében CAHEN, SCHNEE és KNOPP fentebb idézett formuláiból következnek. Helyes voltukat $r>0$ esetére teljes indukcióval bizonyíthatjuk be a következő tétel alapján:

XII. Ha

$$a_n = b_n + J(nb_n),$$

akkor a

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^s} \quad (5)$$

sor r -ed rendű $\frac{\text{summabilitási}}{\text{abs. summabilitási}}$ tartománya összeesik a

$$\sum_0^\infty \frac{b_n}{(n+1)^s} \quad (6)$$

sor $(r-1)$ -ed rendű $\frac{\text{summabilitási}}{\text{abs. summabilitási}}$ tartományával, ha csak az első tartomány a $R(s) \geq -1$ félsíkon túl nem terjed.

Ha ugyanis valamely $s=s_0$ értékre $\sum_0^\infty \frac{b_n}{(n+1)^{s_0}}$ $(r-1)$ -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, akkor $\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^{s_0}}$ r -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$.

Mert az

$$a_n = b_n + \Delta(nb_n)$$

identitásból következik, hogy

$$\frac{a_n}{(n+1)^{s_0}} = \frac{b_n}{(n+1)^{s_0}} + \Delta\left(n \frac{b_n}{(n+1)^{s_0}}\right) - (n-1) b_{n-1} \Delta\left(\frac{1}{(n+1)^{s_0}}\right).$$

Már most, ha

$\sum_0^\infty \frac{b_n}{(n+1)^{s_0}}$ $(r-1)$ -ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, akkor I_1, I_2 szerint $\sum_0^\infty \Delta\left(n \frac{b_n}{(n+1)^{s_0}}\right)$ r -ed rendben és X. szerint

$$\sum_1^\infty (n-1) b_{n-1} \Delta\left(\frac{1}{(n+1)^{s_0}}\right)$$

$(r-1)$ ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, tehát

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^{s_0}} \frac{\text{summabilitásának}}{\text{abs. summabilitásának}}$$

rendje r .

A mondottakból következik, hogy (5) r -ed rendű $\frac{\text{summabilitásának}}{\text{abs. summabilitásának}}$ tartománya legalább is akkora, mint (6) $(r-1)$ -ed rendű $\frac{\text{summabilitásának}}{\text{abs. summabilitásának}}$ tartománya. Tételünk igazolása céljából még meg kell mutatnunk, hogy ha az első tartomány az $R(s) = -1$ egyenestől jobbra terül el, akkor a második nem lehet nálánál kisebb.

Ez következik abból, hogy ha $\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^{s_0}}$ $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ r -ed rendben, akkor $\sum_0^\infty \frac{b_n}{(n+1)^{s_1}}$ $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ $(r-1)$ -ed rendben, ha csak $R(s_1) > R(s_0) > -1$.

Állításunk a könnyen igazolható

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n(n+1)}$$

reláció alapján nyilvánvalóan æquivalens a következővel:

Ha $\sum_0^\infty a_n \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ r -ed rendben, akkor

$$\sum_0^\infty \frac{a_1 2^{s_0} + 2a_2 3^{s_0} + \dots + na_n (n+1)^{s_0}}{n(n+1)^{s_1+1}} \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}} \quad (r-1)\text{-ed}$$

rendben, ha csak $R(s_1) > R(s_0) > -1$.

Ez az állítás $r=1$ esetében így igazolható: Legyen

$$a_n = \beta_n + \Delta(n\beta_n);$$

akkor Π_1 és Π_2 szerint $\sum_0^\infty \beta_n \frac{\text{konvergens}}{\text{abs. konvergens}}$. Ámde akkor

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\beta_1 2^{s_0} + \dots + n\beta_n (n+1)^{s_0}}{n(n+1)^{s_1+1}} \text{ abs. konvergens, mert}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_1 2^{s_0+1} + \beta_2 3^{s_0+1} + \dots + \beta_n (n+1)^{s_0+1}}{(n+1)^{s_0+1}} = 0, \text{ ha } R(s_0+1) > 0,$$

továbbá $\sum \frac{1}{n(n+1)^{s_1-s_0}}$ abs. konvergens, ha $R(s_1-s_0) > 0$.

Már most e tény és $\sum_0^\infty \beta_n \frac{\text{összetartása}}{\text{abs. összetartása}}$ involválja, hogy

$$\sum_0^\infty \frac{\Delta(\beta_1) 2^{s_0} + 2\Delta(2\beta_2) 3^{s_0} + \dots + n\Delta(n\beta_n) (n+1)^{s_0}}{n(n+1)^{s_1+1}} \frac{\text{konvergens}}{\text{abs. konvergens}}.$$

Ugyanis parciális összegezés mutatja, hogy

$$\frac{\sum_{v=1}^n \Delta(v\beta_v) (v+1)^{s_0+1}}{n(n+1)^{s_1+1}} = \frac{\beta_n}{(n+1)^{s_1-s_0}} - \frac{\sum_{v=1}^n (v-1) \beta_{v-1} \Delta[(v+1)^{s_0+1}]}{n(n+1)^{s_1+1}},$$

de a jobb oldal első tagja VI. szerint egy $\frac{\text{konvergens}}{\text{abs. konvergens}}$ sornak, a második pedig VII. és VIII. alapján egy abs. konvergens sornak általános tagja, ha $R(s_1-s_0) > 0$.

$r=1$ esetre bebizonyított állításunk általános érvényessége az $a_n = \beta_n + \Delta(n\beta_n)$ felbontás segítségével teljes indukcióval bizonyítható, a minek elvégzésével XII. teljes egészében igazolást nyer.

XII. szerint a $\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^s}$ sor r -ed rendű $\frac{\text{summabilitási}}{\text{abszolút summabilitási}}$ abszcisszája egyenlő a $\sum_0^\infty \frac{b_n}{(n+1)^s}$ sor $(r-1)$ -ed rendű $\frac{\text{summabilitási}}{\text{abszolút summabilitási}}$ abszcisszájával, ha az első abszcissa ≥ -1 . Ha tehát az első sor abszcisszái $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots$, illetőleg $l_0, l_1, \dots, l_r, \dots$, a másodikéi pedig $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r, \dots$, illetőleg $m_0, m_1, \dots, m_r, \dots$ (és $\lambda_r \geq -1, l_r \geq -1$), akkor

$$\lambda_r = \mu_{r-1}, \quad l_r = m_{r-1}.$$

Ha már most az abszcisszákat megadó formulák általános érvényét bizonyítandó, e formulákat igaznak vesszük az esetre, midőn a $\frac{\text{summabilitás}}{\text{abs. summabilitás}}$ rendszáma $(r-1)$ -nél nem nagyobb, mondhatjuk, hogy a $\sum_0^\infty \frac{b_n}{(n+1)^s}$ $(r-1)$ -ik $\frac{\text{summabilitási}}{\text{abszolút summabilitási}}$ abszcisszáit a következő formulák adják meg:

$$\text{ha } \mu_{r-1} \geq 0, \text{ akkor } \mu_{r-1} = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |t_n^{(r-1)}|}{\log n},$$

$$\text{ha } m_{r-1} \geq 0, \text{ akkor } m_{r-1} = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \{ |t_0^{(r-1)}| + \sum_1^n |t_v^{(r-1)} - t_{v-1}^{(r-1)}| \}}{\log n}$$

és így tovább, hol $t_n^{(r-1)}$ a $\sum_0^\infty b_n$ sorhoz tartozó, $(r-1)$ -ed rendű HÖLDER-közép.

De, mikép II₁ bizonyításánál láttuk,

$$t_n^{(r-1)} = s_n^{(r)}$$

tehát, ha

$$\lambda_r = \mu_{r-1} \geq 0, \text{ akkor } \lambda = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |s_n^{(r)}|}{\log n},$$

ha

$$l_r = m_{r-1} \geq 0, \text{ akkor } l_r = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \{ |s_0^{(r)}| + \sum_1^n |s_v^{(r)} - s_{v-1}^{(r)}| \}}{\log n}$$

és így tovább.

Íne az $r-1$ esetére helyesnek vett formulák r esetében is igaznak bizonyultak.¹

4. §. A DIRICHLET-sor által definiált analitikus függvény nagyságrendje az r -edik summabilitási és absolut summabilitási tartományokban.

Már említettük, hogy egy DIRICHLET-sor summabilitása az r -ed rendű ($r \geq 1$) összegezhetség felsíkjának minden belső véges tartományában egyenletes és így a sor summája egy analitikus függvényt definiál, mely a sor összege által definiált függvényt a konvergencia tartományban összeesvén, ez utóbbinak folytatását adja, ha az r -edik summabilitás tartománya a konvergencia tartományon túlterjed.

A jelen §-ban a sor definiálta függvény nagyságrendjét akarjuk vizsgálni az r -edik summabilitási, illetőleg absolut summabilitási tartományban, a mikor a t ordinata végtelen nagygyá válik.

Legyen a $\sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^s}$ sor által értelmezett függvény $f(s)$.

Idézzük a DIRICHLET-sorok elméletének következő két ismeretes és igen egyszerűen nyerhető eredményét:

1°. Ha az $f(s) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^s}$ DIRICHLET-sor absolut konvergencia-abszisszája $l_0 > -\infty$ és konvergencia-abszisszája $\lambda_0 < l_0$, akkor bármely kis pozitív szám legyen is az ε , az

$$l_0 + \varepsilon \geq \sigma \geq \lambda_0 + \varepsilon$$

¹ Az r -ed rendű summabilitási abszissa értékét az együttthatók segítségével először BOHR határozta meg. (I. h. 2^o p. 85.) BOHR vizsgálataiban a CESÀRO-féle közepekkel való összegezést használja és az idézett helyen megmutatja, hogy

$$\lambda_r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |S_n^{(r)}|}{\log n},$$

hacsak

$$\lambda_r \geq 0, \quad \text{hol} \quad S_n^{(r)} \quad \text{a} \quad \sum_0^\infty a_n$$

sor r -edik CESÀRO-közepe.

feltételnek megfelelő $s = \sigma + it$ értékekre ¹

$$f(s) = f(\sigma + it) = O(|t|).$$

2°. Ha az $f(s) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^s}$ DIRICHLET-sor konvergencia-abszcissája $l_0 > -\infty$, akkor ε tetszésszerűen kis pozitív értéke mellett a

$$\sigma \geq l_0 + \varepsilon$$

tartományban $f(s) = f(\sigma + it) = O(1)$.

Ez eredmények a következőkép általánosíthatók:

XIII. Ha az $l_0 (> -\infty)$ abszolút konvergencia-abszcissával bíró

$$f(s) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^s}$$

DIRICHLET sor r -edik summabilitási abszcissája $\lambda_r > l_0$, akkor, bármely kis pozitív számot jelentsen is ε , az

$$l_0 + \varepsilon \leq \sigma \leq \lambda_r + \varepsilon$$

tartományban

$$f(s) = f(\sigma + it) = O(|t|^{r+1}).$$

XIV. Ha az $l_0 (> -\infty)$ abszolút konvergencia abszcissával bíró

$$f(s) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^s}$$

DIRICHLET-sor r -edik abszolút summabilitási abszcissája λ_r , akkor, ε tetszésszerűen kis pozitív számot jelentvén, a

¹ Ha $g(x)$ egy bizonyos helytől kezdve minden reális x értékre definiált pozitív függvény és ha az $f(x)$ valós vagy komplex függvény hasonlóképen definiálva van egy bizonyos helytől kezdve minden reális x értékre, akkor a LANDAU által bevezetett

$$f(x) = O(g(x))$$

jelölés azt jelenti, hogy

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = \text{véges szám.}$$

$$\sigma \geq l_r + \varepsilon$$

feltételnek megfelelő s értékekre nézve áll:

$$f(s) = f(\sigma + it) = 0 \quad (|t|^r).$$

XIII. bizonyítása: teljes indukcióval. ($l_0 > -\infty$ lévén, az adott sor $s = s' + s_0$ transformációval átvihető olyanba, melynél az r -ik summabilitási abszcissa pozitív. XIII. bizonyításánál elegendő tehát a $\lambda_r \geq 0$ esetre szorítkozni).

$r = 0$ -ra igaz a tétel 1^0 szerint. Vegyük igaznak, ha a summabilitás rendje $(r-1)$ -et meg nem haladja [$r-1 \geq 0$] és tegyük

$$a_n = b_n + J(n b_n).$$

Ekkor

$$\frac{a_n}{(n+1)^s} = \frac{b_n}{(n+1)^s} + J\left(n \frac{b_n}{(n+1)^s}\right) - (n-1) b_{n-1} J\left(\frac{1}{(n+1)^s}\right).$$

Jelölje a $\sum_0^\infty \frac{b_n}{(n+1)^s}$ DIRICHLET-sor summabilitási abszcissáit: $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r, \dots$, illetőleg $m_0, m_1, \dots, m_r, \dots$ és a sor definiálta függvényt $g(s)$. Az $(r-1)$ -re igaznak vett tétel szerint az

$$m_0 + \varepsilon \geq \sigma \geq \mu_{r-1} + \varepsilon$$

tartományban

$$g(s) = 0 \quad (|t|^r),$$

de, $\lambda_r \geq 0$ lévén, XII. szerint $\mu_{r-1} = \lambda_r$, $m_0 = l_1$ tehát az

$$l_1 + \varepsilon \geq \sigma \geq \lambda_r + \varepsilon$$

feltételt teljesítő s -ekre nézve áll:

$$g(s) = g(\sigma + it) = 0 \quad (|t|^r).$$

Másrészt 2^0 szerint a $\sigma \geq m_0 + \varepsilon = l_1 + \varepsilon$ félsíkon, tehát a fortiori az $l_0 + \varepsilon \geq \sigma \geq l_1 + \varepsilon$ sávban $g(s) = g(\sigma + it) = 0$ (1); e szerint, $r \geq 1$ lévén, az egész $l_0 + \varepsilon \geq \sigma \geq \lambda_r + \varepsilon$ tartományban $g(s) = g(\sigma + it) = 0$ ($|t|^r$).

Továbbá, ha $R(s) \geq \mu_{r-1} + \varepsilon$, akkor I_1 és I_2 szerint

$$\sum_1^\infty J\left(n \frac{b_n}{(n+1)^s}\right)$$

r -ed rendben summabilis és e summa $= 0$.

Végül, ha $R(s) \geq \mu_{r-1} + \varepsilon$, akkor X. szerint a

$$\sum_1^{\infty} (n-1) b_{n-1} \Delta \left(\frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

függvénysor $(r-1)$ -ed rendben summabilis. Hozzátehetjük, hogy, mint ez X. bizonyításából kiviláglik, e summabilitás egyenletes az $R(s) \geq \mu_{r-1} + \varepsilon$ félsík minden belső véges tartományában, a sor summája tehát e félsíkon analitikus függvényt definiál. Jelölje ezt $h(s)$.

Állítom, hogy az $l_0 + \varepsilon \geq \sigma \geq \lambda_r + \varepsilon$ sávban

$$h(s) = h(\sigma + it) = 0 \quad (|t|^{r+1}).$$

Ugyanis VII. alapján

$$\begin{aligned} h(s) &\equiv \sum_1^{\infty} (n-1) b_{n-1} \Delta \left(\frac{1}{(n+1)^s} \right) = \\ &= -s \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^s} + \frac{s(s+1)}{2!} \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+1}} - \dots + \\ &+ (-1)^r \frac{s(s+1) \dots (s+r-1)}{r!} \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+r-1}} + \\ &+ s \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+1}} - \frac{s(s+1)}{2!} \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+2}} + \dots + \\ &+ (-1)^{r+1} \frac{s(s+1) \dots (s+r-1)}{r!} \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+r}} + \\ &+ \sum_1^{\infty} n \varrho_r^{(n)} b_{n-1} - \sum_1^{\infty} \varrho_r^{(n)} b_{n-1}, \end{aligned}$$

hol VIII szerint

$$|\varrho_r^{(n)}| \leq \left| \frac{s(s+1) \dots (s+r)}{(r+1)!} \right| \frac{1}{n^{\sigma+r+1}},$$

tehát, ha

$$\sigma = R(s) \geq \lambda_r + \varepsilon = \mu_{r-1} + \varepsilon,$$

akkor IX alapján

$$\sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^s}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+1}}, \dots, \quad \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+r-1}}$$

rendre $(r-1)$ -ed, $(r-2)$ -ed, ..., 0 -ad rendben summabilisek, míg

$$\sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+r}}, \quad \sum_1^{\infty} n \varrho_r^{(n)} b_{n-1}, \quad \sum_1^{\infty} \varrho_r^{(n)} b_{n-1}$$

abszolút konvergensek.

Ha már most $\lambda_r + \varepsilon \leq \sigma \leq l_0 + \varepsilon$, akkor $r-1$ -ig igaznak vett tételünk és 2° szerint:

$$\sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^s} = O(|t|^r), \quad \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+1}} = O(|t|^{r-1}), \dots,$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+r-1}} = O(|t|), \quad \sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{s+r}} = O(1);$$

továbbá

$$\frac{s(s+1)\dots(s+k)}{(k+1)!} = O(|t|^{k+1}) \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Végül

$$\left| \sum_1^{\infty} n \varrho_r^{(n)} b_{n-1} \right| \leq \left| \frac{s(s+1)\dots(s+r)}{r!} \right| \sum_1^{\infty} \frac{|b_{n-1}|}{n^{\sigma+r-1-\frac{\varepsilon}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

hol a jobboldali sor konvergens, mert

$$\sum_1^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n^{\sigma+r-1-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

konvergens lévén,

$$\lim \frac{b_{n-1}}{n^{\sigma+r-1-\frac{\varepsilon}{2}}} = 0,$$

tehát

$$\sum n \varrho_r^{(n)} b_{n-1} = O(|t|^{r+1}).$$

Ugyanígy

$$\sum \varrho_r^{(n)} b_{n-1} = O(|t|^{r+1}).$$

A mondottakból következik, hogy az

$$l_0 + \varepsilon \geq \sigma \geq \lambda_r + \varepsilon$$

sávban

$$h(s) = h(\sigma + it) = O(|t|^{r+1}).$$

De, mint korábban láttuk:

$$g(s) = g(\sigma + it) = O(|t|^r),$$

tehát

$$\begin{aligned} f(s) &= g(s) - h(s) = O(|t|^r) + O(|t|^{r+1}) \\ &= O(|t|^{r+1}). \end{aligned} \quad \text{Qu. e. d.}$$

XIV bizonyítása a XIII-éhoz hasonlóan megtörténhetik teljes indukcióval. $r = 0$ -ra 2^0 szerint igaz a tétel. Ha $(r-1)$ -re igaznak vesszük és

$$a_n = b_n + \Delta(n b_n)$$

egyenlőségnek megfelelőleg megint a

$$\sum \frac{a_n}{(n+1)^s} = \sum \frac{b_n}{(n+1)^s} - \sum (n-1) b_{n-1} \Delta \left(\frac{1}{(n+1)^s} \right),$$

azaz az

$$f(s) = g(s) - h(s)$$

felbontást alkalmazzuk, az előzőkhöz hasonlóan meg lehet mutatni, hogy $R(s) \geq l_r + \varepsilon$ -ra

$$g(s) = O(|t|^{r-1}), \quad h(s) = O(|t|^r),$$

tehát

$$f(s) = O(|t|^r).$$

III. rész.

1. §. *Első rendben absolut summabilis* FOURIER-sorok egy nevezetes osztálya.

Legyen $f(x)$ egy, a $(0, 2\pi)$ intervallumban értelmezett, 2π periodusú, korlátos függvény, melynek első differenciálhányadosa a $(0, 2\pi)$ közben, — ennek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (véges számú) belső helyétől eltekintve — mindenütt létezik, véges és RIEMANN szerint integrabilis. A differenciálhányadosra szabott

feltétel involválja, hogy $f(x)$ a $(0, 2\pi)$ intervallum minden helyén folytonos, kivéve esetleg az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ helyeket, hol első fajú szakadást mutathat.

FEJÉR úr szíves szóbeli közléséből tudom, hogy a fentebb részletezett feltételeket kielégítő $f(x)$ függvény FOURIER-sora a $(0, 2\pi)$ intervallum minden helyén első rendben abszolút summabilis.

Ezt a nevezetes eredményt a következőkép nyerhetni:

Legyenek az $f(x)$, illetőleg $f'(x)$ -hez tartozó FOURIER-konstansok a_n, b_n , illetőleg a'_n, b'_n , vagyis

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx;$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx dx, \quad b'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx dx,$$

és jelölje az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ helyeken fellépő ugrást

$$D_1, D_2, \dots, D_k,$$

azaz

$$D_1 = f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0), \quad D_2 = f(\alpha_2 + 0) - f(\alpha_2 - 0), \dots,$$

$$D_k = f(\alpha_k + 0) - f(\alpha_k - 0).$$

Mivel

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_0^{\alpha_1-\varepsilon} f(x) \cos nx dx + \right. \\ \left. + \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{\alpha_2-\varepsilon} f(x) \cos nx dx + \int_{\alpha_2+\varepsilon}^{\alpha_3-\varepsilon} f(x) \cos nx dx + \dots + \int_{\alpha_k+\varepsilon}^{2\pi} f(x) \cos nx dx \right\}$$

és

$$\int_0^{\alpha_1-\varepsilon} f(x) \cos nx dx = \left[\frac{f(x) \sin nx}{n} \right]_0^{\alpha_1-\varepsilon} - \frac{1}{n} \int_0^{\alpha_1-\varepsilon} f'(x) \sin nx dx \\ \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{\alpha_2-\varepsilon} f(x) \cos nx dx = \left[\frac{f(x) \sin nx}{n} \right]_{\alpha_1+\varepsilon}^{\alpha_2-\varepsilon} - \frac{1}{n} \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{\alpha_2-\varepsilon} f'(x) \sin nx dx \\ \vdots \\ \int_{\alpha_k+\varepsilon}^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \left[\frac{f(x) \sin nx}{n} \right]_{\alpha_k+\varepsilon}^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_{\alpha_k+\varepsilon}^{2\pi} f'(x) \sin nx dx,$$

következik, hogy

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left\{ [f(x) \sin nx]_0^{a_1-0} + [f(x) \sin nx]_{a_1+0}^{a_1-0} + \dots + \right. \\ \left. + [f(x) \sin nx]_{a_k+0}^{2\pi} \right\} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx dx,$$

tehát

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \{D_1 \sin na_1 + D_2 \sin na_2 + \dots + D_k \sin na_k\} - \frac{b'_n}{n}.$$

Hasonlóképp nyerjük, hogy

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \{D_1 \cos na_1 + D_2 \cos na_2 + \dots + D_k \cos na_k\} + \frac{a'_n}{n},$$

tehát

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{n\pi} \{D_1 \sin n(x-a_1) + \\ + D_2 \sin n(x-a_2) + \dots + D_k \sin n(x-a_k)\} + \frac{a'_n \sin nx - b'_n \cos nx}{n}.$$

Az $\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ FOURIER-sor tehát abszolút summabilis első rendben minden olyan x helyen, a hol a

$$\sum \frac{\sin n(x-a)}{n}$$

tipusú sorok és a

$$\sum \frac{a'_n \sin nx - b'_n \cos nx}{n}$$

sor első rendben abszolút summabilis. Ez utóbbi sor abszolút konvergens; ugyanis $f'(x)$ véges és integrabilis volta involválja, hogy $\sum a'_n$, $\sum b'_n$ konvergens, ebből pedig a SCHWARZ-féle egyenlőtlenség alapján következik $\sum \frac{|a'_n|}{n}$, $\sum \frac{|b'_n|}{n}$ konvergenciája, miből állításunk igazsága evidens.

Mielőtt $\sum_1^{\infty} \frac{\sin n(x-a)}{n}$ abszolút summabilitásának bizonyítására rátérnénk, jegyezzük meg, hogy egy $\sum_0^{\infty} u_n$ sor első rendű abszolút summabilitása annyit jelent, hogy a

$$\sum_1^{\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n(n+1)}$$

sor abszolút konvergens; ugyanis, ha a $\sum_0^{\infty} u_n$ sor első rendű közepeinek sorozata $s_0^{(1)}, s_1^{(1)}, \dots, s_n^{(1)}, \dots$, akkor fennáll az azonosság

$$s_n^{(1)} - s_{n-1}^{(1)} \equiv \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n(n+1)}.$$

Ha már most

$$u_n = \frac{\sin n(x-a)}{n}, \quad (n \geq 1); \quad u_0 = 0,$$

akkor

$$u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n = \sin(x-a) + \sin 2(x-a) + \dots + \sin n(x-a),$$

vagyis $\sum_1^{\infty} \frac{\sin n(x-a)}{n}$ abszolút summabilis minden oly x helyen, hol

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^n \sin \nu(x-a)}{n(n+1)}$$

abszolút konvergens.

Ámde ismeretes, hogy: bárminő, 2π -nél kisebb, pozitív számot jelentsen is ε , az

$$\varepsilon \leq x - a \leq 2\pi - \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kielégítő x értékek mellett és minden pozitív n -re nézve az

$$\left| \sum_{\nu=1}^n \sin \nu(x-a) \right|$$

egy, csupán ε -től függő pozitív korláton alul marad. Ebből következik, hogy

$$\left| \sum_1^{\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^n \sin \nu(x-a)}{n(n+1)} \right|$$

abszolút konvergens a $(0, 2\pi)$ intervallumnak az a -tól különböző bármely helyén. De az $x = a$ helyen szintén az, tehát kivétel nél-

kül minden x helyen abszolút konvergens és így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-a)}{n}$

kivétel nélkül minden x helyen abszolút summabilis első rendben. A fentebbieket összefoglalva, látjuk, hogy $f(x)$ FOURIER-sora, mint abszolút konvergens és első rendben abszolút summabilis sorok összege maga is abszolút summabilis első rendben.

2. §. *Folytonossági helyen nem abszolút summabilis FOURIER-sor existenciája.*

FEJÉR úrnak egyik, immár klasszikussá vált tétele szerint egy korlátos, 2π periódusú és RIEMANN szerint integrabilis függvény FOURIER-sora a függvény minden folytonossági helyén elsőrendű számtani közepekkel összegezhető. Felvettem a kérdést, vajjon ez a summabilitás abszolút summabilitás-e szükségképpen, azaz a függvénynek valamely helyen való folytonossága elegendő-e arra, hogy a FOURIER-sor e helyen való abszolút summabilitását biztosítsa? Azt találtam, hogy nem: *Létezik olyan trigonometrikus sor, mely a $(0, 2\pi)$ intervallumban egyenletesen konvergens, a nélkül, hogy az $x = 0$ helyen bárminő rendben abszolút summabilis volna.* Már pedig ismeretes, hogy egy uniformisan összetartó trigonometrikus sor egy mindenütt folytonos függvénynek (a sor összege által definiálnak) a FOURIER-sora.

Az imént jelzett trigonometrikus sor létezését a következőképpen bizonyíthatjuk be:

HARDY megmutatta, hogy, ha α reális és 0-tól különböző érték, akkor a

$$\sum \frac{z^n}{n^{1+\alpha i} \log n}$$

hatványsor az egységkörön egyenletesen konvergens;¹ de akkor a

$$\sum \frac{e^{inx}}{n^{1+\alpha i} \log n}$$

sornak úgy valós és képzetes része ugyanilyen karakterű, azaz egyenletesen konvergens trigonometrikus sor és összege által

¹ A Theorem concerning Taylor's Series. (Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.) (1913) (p. 157.)

az x valós változónak egy-egy, 2π szerint periodikus és minde-
nütt folytonos függvényét definiálja (a melynek FOURIER-sorát
szolgáltatja). Azt állítom már most: nem lehetséges, hogy e trigo-
nometrikus (FOURIER)-sorok:

$$\sum \frac{\cos(a \log n) \cos nx + \sin(a \log n) \sin nx}{n \log n}, \quad (7)$$

$$\sum \frac{-\sin(a \log n) \cos nx + \cos(a \log n) \sin nx}{n \log n} \quad (8)$$

mindketteje az $x = 0$ helyen, bármily magas rend mellett is,
absolut summabilis legyen. Ha ugyanis ez egy bizonyos summa-
bilitási rend mellett bekövetkeznék, akkor ugyanilyen rendben a

$$\sum \frac{1}{n^{1+ai} \log n}$$

sor és így VI. szerint

$$\sum \frac{n^{ai}}{n^{1+ai} \log n} = \sum \frac{1}{n \log n}$$

sor is absolut summabilis volna, holott e (legutoljára felírt) sor a
szó szorosabb értelmében divergens, tehát semmiféle rendben
sem összegezhető számtani közepekkel.

A (7) és (8) alatt felírt trigonometrikus (FOURIER)-sorok
közül tehát legalább is az egyik az $x = 0$ helyen *nem* absolut
summabilis, bár $x = 0$ a sorhoz tartozó függvénynek folytonos-
sági helye.

A HŐMÉRSÉKLET SZAKASZOS INGÁSA A PSEUDOISOTROP TALAJBAN.

H. ANDERKÓ AURÉL-től.

Bevezető.

A talaj felső rétegeiben a hőmérsékletnek napi és évi szakaszos ingását a FOURIER-féle melegvezetési másodrendű parciális differenciális egyenlet integrálfüggvényével leírhatjuk, ha felteszszük, 1. hogy az egész talajréteg, melyben a hőmérséklet ingását még észlelhetjük, homogén és isotrop; 2., hogy a hőmérsékleti ingást a talaj felszínén egyszerű ingamozgáshoz hasonló szinus-vonallal előállíthatjuk. Ekkor az egyenletben előforduló thermometrikus hővezetési együttható az isotrop talaj egyik geofizikai állandója gyanánt szerepel.

E megfigyelések mellett a talaj hőmérsékletének tényleges ingását tehát szabályos ingással helyettesítjük. A talaj hőmérsékleti ingását a valóságban ábrázolhatjuk a különböző mélységekben elhelyezett hőmérők rendszeres leolvasásából nyert átlagos értékekkel. Az ábrázolást feltűntethetjük *a)* oszcillációs görbékkel, *b)* geothermákkal, vagy *c)* thermikus tautochronákkal. E görberendszerekkel ábrázolt *tényleges* hőmérsékleti ingások azonban nem mindenütt mutatnak teljes szabályosságot, sőt az elméletileg előállított és a tényleges hőmérsékleti ingás között gyakran élesen feltűntethető eltéréseket is találhatunk. Az eltérések részint a talaj geofizikai tulajdonságaira, részint a talaj felületére működő meteorológiai hatásokra vezethetők vissza.

A thermometrikus hővezetési együttható az isotrop talajban mindenütt állandó és a vizsgált talajnak egyik geofizikai tulajdonságát jellemzi. Ha azonban a valóságban a talajt réte-

gekre bontottnak képzeljük és minden rétegnek külön-külön kiszámítjuk a hővezetési együtthatóját az egyenes hőmérsékleti megfigyelések alapul vételével: azok között oly eltéréseket találunk, melyeket a talaj felületére működő meteorológiai hatások következményeképpen értelmezhetünk.

Ugyanis a meteorológiai tényezők (lecsett csapadék, nap-sütés tartama, felhőzet, szél, fagy, stb.) hatása következtében az eredetileg homogén és isotrop talaj bizonyos mélységig eredeti isotrop tulajdonságától kisebb-nagyobb mértékben eltér. Például a vízátbocsátó talaj felületére esett csapadék a talajba szivárog, miközben a talaj hővezetési képessége módosul. A felületre esett csapadék azonban teljes egészében nem kerül az állandó talajviz felületéig, mert a mint az eső megszűnik és a felület száradni kezd, a talaj nedvessége csökken, a mennyiben a talajba szivárgott esővíz a szárazabb felső réteg felé húzódik és a felületen elpárolog. Ily módon a talajnak isotrop állapotától való eltérése folytonosan változik és ezzel együtt változik az egyes rétegek hővezetési együtthatója is. A függvény, mely a hővezetési együtthatók és a felületre ható meteorológiai tényezők között fennáll, alig volna megszerkeszthető, mert a meteorológiai tényezőket a mai észlelések mellett csak a legelső közelítésekkel vehetjük számításba. Ha azonban nem tartunk igényt a teljes szigorúságra, akkor bizonyos közelítéssel megállapíthatjuk a talajnak isotrop állapotától való eltérését és azt számbelileg is kifejezhetjük.

Hővezetés tekintetében az anyag általában isotrop vagy anisotrop. Az első esetben vezetés útján minden irányban egyenlően terjed a meleg az anyagban, az utóbbiban a különböző irányokban különbözően. Ezek mellett az olyan anyagot, mely a meteorológiai tényezők hatása alatt isotrop tulajdonságától eltér ugyan, de a meteorológiai tényezők kiküszöbölése után ismét visszanyeri isotrop állapotát, *pseudoisotrop*-nak nevezhetjük. *A homogén és vízátbocsátó talaj a valóságban tehát pseudoisotrop tulajdonsággal bír.*

A talajrétegek pseudoisotrop tulajdonságát a hővezetési együtthatókkal fejezhetjük ki, ha azokat minden rétegre külön-külön kiszámítjuk. A talajrétegek isotrop és pseudoisotrop álla-

potára vonatkoztatott hővezetési együtthatók különbségei pedig az isotrop állapotától való *eltérést* állítják elő, melyet a talaj pseudoisotrop állapotát jellemző függvényének tekinthetünk. (I. 1. §.)

A talaj isotrop és pseudoisotrop tulajdonságára vonatkozó kritériumok megszerkesztése, valamint az isotrop állapottól való eltérésnek — az *isotrop deviatió*nak — fizikai és geometriai értelmezése után lehetséges volt a talaj pseudoisotrop tulajdonságát jellemző hővezetési együttható és az isotrop deviatio között közelítő értékű összefüggést találni. (I. 2. §. III. e.)

A pseudoisotrop talajban az egymás alatti rétegeken áthaladó geothermák a rétegek érintkezési felületein hirtelen irányváltozást mutatnak; ezt az eltérést avval a szöggel mérhetjük, melyet a geothermák a különböző hővezetési együtthatóval bíró rétegek közös érintkezési felületéhez vont normálissal alkotnak. Ezt a szöget «a *geothermák hajlási, illetve törési szögének*» nevezzük. A geotherma törési szöge pedig azzal a tulajdonsággal bír, hogy bármely talajrétegben a hővezetési együtthatóból és a geotherma törési szöge tangensének négyzetéből alkotott szorzat állandó. Ez a tétel az isotrop talajra is érvényes, azonban ott csak hajlási szögek lépnek fel; úgy hogy a talaj isotrop és pseudoisotrop tulajdonságát jellemző hővezetési együtthatókat közvetlenül arányba is állíthatjuk egymással. Ez általános érvényű tétel segítségével tisztán geometriai úton lehetséges az egyes rétegekben a tényleges hővezetési együttható meghatározása, ha előzetesen kalorimetrikus úton a talaj isotrop állapotára vonatkoztatott hővezetési koefficiensét már meghatároztuk. (I. f. 3. §. IV. e.)

A pseudoisotrop talaj geothermáinak törési szöge és az isotrop deviatio között összefüggést állapítottunk meg, és pedig a valóságot kielégítő közelítéssel, úgy, hogy a deviatios szögnek a meghatározását a valóságban elég könnyen végezhetjük. (I. f. 4. §. V. e.)

A meleg terjedési sebességét a hőmérsékletnek időben és értékben bekövetkezett változásából meghatározhatjuk, miután megszerkesztettük azokat a képleteket, melyek a meleg terjedési sebessége és a geothermák törési szöge, illetve az isotrop deviatio között fennállanak. (I. f. 5. §.)

A talaj isotrop és pseudoisotrop tulajdonságára vonatkoztatott hővezetési együtthatók különbségeivel definiáltuk a talaj *karakterisztikus* függvényét.

Ha felvesszük, hogy a hővezetési együtthatók közötti különbség arányosan növekszik a hőterjedési sebesség csökkenésével, akkor a karakterisztikus függvénynek a valóságot megközelítő egyszerű alakját nyerjük, amennyiben a karakterisztikus függvény az isotrop deviatiós szög tangensének a négyzetgyökével arányosnak adódik. (I. f. 6. §.)

Ismeretes, hogy a talaj felszínének meleg-ingása a környező levegő hőmérsékleti ingását nagy mértékben befolyásolja, mert a talaj felszínétől 1—2 m magasságban észlelt hőmérsékleti átlagos értékek közel azonos fázist mutatnak. A talaj felszínének hőmérsékleti ingását pedig megelőzi a felszínen áthatolt, a talajban jelenlévő melegmennyiségnek, melegkészletnek ingása fázisra nézve. Az isotrop talajban állandóan $\frac{\pi}{4}$ -et tesz ki ez a fáziskülönbség, a pseudoisotrop talajban a fáziskülönbség az isotropdeviációval változik. (I. 7. §.)

Az általános fejtegetéseket a II. fejezet alatt összefoglalt tényleges észlelési adatokkal törekedtünk igazolni. Röviden összefoglaltuk a *tiflisi* és *pawlowszki* talaj hőmérsékleti amplitudóit és fázisait. (II. 8. §.)

Ezután az általános részben ismertetett képletekkel a jellemző számításokat végeztük és az eredményeket a II. 9. §-ának táblázatában tüntettük fel. E táblázat deviatiós szögének rovata tulajdonképpen a homokréteg nedvességi ingadozását is feltünteti és azt a sajátosságát mutatja, hogy a homok nedvessége az évi periodusban a felszíntől az állandó talajvíz felszínéig nem egyenletes eloszlású, hanem a felületre működő meteorológiai hatások következtében kettős maximummal bír.

A II. 10. §. alatt tiflisi és pawlowszki homokban az év folyamán felhalmozódott meleg-hullámra és a hőmérsékleti hullámra vonatkozó néhány adatot közöltünk, melyekkel a két hullám fázisának elmaradására vonhattunk következtetést.

A továbbiakban rámutattunk a talaj isotrop deviációjának szerepére az északi félgömb klímájában. Ugyanis ismeretes,

hogy az északi félgömbön a klíma jellemző hőmérsékletének maximuma az évi periodusban nem esik egybe a nyári solstitiummal, a napi periodusban pedig a Nap delelésének idejével, hanem jóval később áll be. A sugárzás következtében a talajban feltározódott melegnek ingásából, tekintetbe véve a felszín isotrop deviatióját, meg lehetett állapítani a levegő hőmérsékleti maximumának megjelenési idejét. (II. 11. §.)

ÁLTALÁNOS RÉSZ.

A talaj pseudoisotrop tulajdonsága.

1. §. A hővezetési együttható általános alakja.

A teljesen isotrop talajban bármely réteg felső és alsó lapjának hőmérsékleti adatai ugyanazt a hővezetési koefficienset szolgáltatják. A pseudoisotrop talajban azonban a hővezetési koefficiens változik és függ a talaj isotrop állapotától való eltérésétől. Ha a pseudoisotrop talajt párhuzamos, sík rétegekre bontva képzeljük, akkor minden rétegnek megvan a jellemző hővezetési koefficiense, melyet a rétegek felső és alsó felületén észlelt hőmérsékleti adatokból meghatározhatunk, amennyiben felvesszük, hogy a rétegekben a hőmérséklet tartozik eleget tenni a FOURIER-féle melegvezetési egyenletnek, azaz a

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = K \frac{d^2\vartheta_x}{dx^2} \quad (1)$$

egyenletnek, hol ϑ_x a talaj hőmérsékletét az x mélységben, K a talajréteg hővezetési együtthatóját és t a folyó időt jelenti.

A talaj hőmérsékletét jellemző függvényt, mely a fenti melegvezetési egyenletnek integrálfüggvénye tartozik lenni, a kezdő állapotra vonatkoztatott feltételekből megszerkeszthetjük.

Ugyanis a megfigyelésekre támaszkodva, felvehetjük, hogy:

- a) a hőmérséklet a földfelületen periodikusan ingadozik és
- b) hogy ez az ingadozás a mélységgel változik. Minthogy az a mélység, melyben a hőmérsékletnek periodusos ingását még észlelhetjük, a földsugarhoz viszonyítva igen kicsiny mennyiség, a földsugárt végtelen nagynak tekinthetjük és ennél fogva a hő-

mérsékletet a derékszögű rendszer y és z koordinátáitól függetlennek vehetjük.

A hőmérsékletnek periodikus ingását általában a FOURIER-féle trigonometrikus sorokkal következően állíthatjuk elő:

$$\vartheta(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[k_{0,m} \sin \left(m \frac{2\pi}{T} t \right) + l_{0,m} \cos \left(m \frac{2\pi}{T} t \right) \right],$$

melyet $k_{0,m}$ és $l_{0,m}$ alkalmas választása által következően egyszerűsíthetünk:

$$\vartheta(t) = \sum a_{0,m} \sin \left[A_{0,m} + m \frac{2\pi}{T} t \right].$$

A következőkben csupán a legegyszerűbb, $m = 1$ esettel kívánunk foglalkozni, tehát lesz

$$\vartheta(t) = a_0 \sin \left[A_0 + \frac{2\pi}{T} t \right].$$

a) Már most tegyük fel, hogy $t = 0$ kezdő időpontban mindenütt 1. $\vartheta = 0$; 2. hogy $x = 0$ mélységben, azaz a felületen, bármely időben

$$\vartheta_0 = a_0 \sin \left[A_0 + \frac{2\pi}{T} t \right],$$

akkor az a ϑ függvény, mely az adott feltételek mellett a hővezetés egyenletét akkor kielégíti, a mikor azóta a kezdő állapot óta, melyben a test minden pontjának ϑ hőmérséklete zérus volt, igen hosszú idő múlt el, következő lesz:

$$\vartheta_x = a_0 e^{-x \sqrt{\frac{\pi}{kT}}} \sin \left[A_0 - x \sqrt{\frac{\pi}{kT}} + \frac{2\pi}{T} t \right].$$

b) A valóságban azonban az időszámítás kezdetén, $t = 0$ időpillanatban a talaj kezdő hőmérséklete általában nem zérus, hanem a mélységnek valamely függvénye, azaz $\vartheta_x = \vartheta(x)$, úgy hogy a talaj hőmérsékletét jellemző függvényt úgy kell felfogni, mintha annak egy része a t időnek, más része pedig az x mélységnek volna a függvénye.

Ennélfogva a ϑ -nak utolsó kifejezéséhez még egy tagot kell adni, mely az (1) alatti egyenletnek integrál függvénye tartozik lenni a következő feltétel teljesülésénél: t. i. hogy $t = 0$ kezdő

időpontban az egész testben $\vartheta_x = \vartheta(x)$ és az $x=0$ határfelületen minden időben $\vartheta = \vartheta_0$ értékű. Akkor a keresett tag lesz:

$$-\frac{1}{2\sqrt{K\pi t}} \int_0^{\infty} \vartheta(\alpha) \left[e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4Kt}} - e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4Kt}} \right] d\alpha.$$

Ha már most $\vartheta(\alpha)$ -nak középértékét M -el jelöljük, továbbá $\frac{(x-\alpha)^2}{4Kt}$ -t, illetve $\frac{(x+\alpha)^2}{4Kt}$ -t β^2 -nal jelöljük, akkor az utóbbit, mivel a zárójeles kifejezés pozitív mennyiséget jelent, a következő alakban írhatjuk:

$$M \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Kt}}} e^{-\beta^2} d\beta.$$

Ez a tag tehát a növekedő idővel folyton kisebbedik, a $t=\infty$ értéknél az integrál felső határa zérus és ezzel együtt az integrál is zérus lesz, úgy hogy a talaj hőmérsékletét jellemző függvényben az utóbbi tagot zérus értékűnek vehetjük.¹

Ennélfogva a homogén és isotrop talaj hőmérsékleti ingását

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{Kt}}} \sin \left[\left(\vartheta_0 - \vartheta \right) \sqrt{\frac{\pi}{Kt}} + \frac{2\pi}{T} t \right] \quad (1)$$

függvénnyel állíthatjuk elő, mely *érvényes*, ha az $x=0$ határfelületen a periodusos változás attól a $t=0$ időponttól kezdve, mikor az egész testnek hőmérséklete $\vartheta_x = \vartheta(x)$ már igen régen van jelen és folyton tovább tart.

Az egyenlet érvényes oly talajrétegben, melyben a felülettel párhuzamos rétegek isotherma-rétegek és a felületre esett csapadék a vízszintes síkban mindenütt egyenlően szivárog, vagyis a vízszintes síkban a hőmérséklet és a nedvesség mindenütt, egy-egy meghatározott időpontban ugyanaz és változás csak a mélység irányában mutatkozik.

Ha az isotrop és homogén talaj sűrűségét ρ_0 -sal, fajhőjét c_0 -sal és a kalorimetrikus hővezetési együtthatóját k_0 -sal jelöljük, akkor ily homogén, isotrop talaj thermikus hővezetési állandója:

¹ V. ö. például B. RIEMANN: Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. II. Aufl. pg. 125—143.

$$K_0 = \frac{k_0}{c_0 \varrho_0}.$$

A homogén, isotrop talaj felületére ható meteorológiai tényezők következtében a talaj pseudoisotroppá lesz, melyben a sűrűség ϱ , a fajhő c és a kalorimetrikus hővezetési együttható k eltér az isotrop talajt jellemző mennyiségektől. A pseudoisotrop talajrétegek közepes értékű termometrikus hővezetési együtthatójának általános formája lesz tehát:

$$K = \frac{k}{c\varrho},$$

ahol

$$\left. \begin{aligned} k &= k_0 (1 - \varepsilon_1) \\ \varrho &= \varrho_0 (1 + \varepsilon_2) \\ c &= c_0 (1 + \varepsilon_3) \end{aligned} \right\};$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ kicsiny mennyiségek, melyek a talaj pseudoisotrop állapota szerint változnak. Ezeket felhasználva, első megközelítésben:

$$K = \frac{k_0}{c_0 \varrho_0} (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2) (1 - \varepsilon_3) = \frac{k_0}{c_0 \varrho_0} [1 - \varphi(\delta)].$$

Ez egyenletben a $\varphi(\delta)$ függvény az isotrop állapottól való eltérésnek függvénye, melyet a hőmérsékleti adatokból meghatározhatunk. Ezek után az utolsó egyenletet következő alakban írhatjuk:

$$K = K_0 - f(\delta), \quad (2)$$

hol K_0 az isotrop talaj hővezetési konstansát, $f(\delta)$ pedig a pseudoisotrop állapot *karakterisztikus* függvényét jelenti, mely egyenlő a talaj isotrop és pseudoisotrop állapotát jellemző hővezetési együtthatók különbségével és avval a tulajdonsággal bír, hogy ha $\delta = 0$, vagyis a talaj a pseudoisotrop állapotból visszatért az isotrop állapotba, akkor $f(0) = 0$.

2. §. Az isotrop deviációról.

A következőkben megszerkesztjük a kriteriumokat, melyek a talaj isotrop és pseudoisotrop tulajdonságát jellemzik. Az (1') alatti függvény az isotrop talaj hőmérsékletének ingását

állítja elő, mely lényegében változatlan marad, ha a talaj x mélységére vonatkoztatott közép hőmérsékletét, mint a periodusra nézve állandó mennyiséget hozzáteszszük. Legyen az x mélységben a középhőmérséklet θ_x -szel jelölve, megjegyezvén, hogy a valóságban a θ_x -et, némi elhanyagolható változást nem tekintve, állandónak vehetjük az egész talajban. Jelölje továbbá az x mélységben a hőmérséklet amplitudóját:

$$a_x = a_0 e^{-x \sqrt{\frac{\pi}{KT}}}$$

és fázisa

$$A_x = A_0 - x \sqrt{\frac{\pi}{KT}},$$

akkor a homogén és isotrop talaj x mélységében a hőmérséklet tényleges menete az (1') alatti szerint lesz:

$$\vartheta_x = \theta_x + a_x \sin \left[A_x + \frac{2\pi}{T} t \right]. \quad (3)$$

A (3) alatti kifejezés egyfelől az (1) alatti hővezetési egyenletnek integrál függvényét alkotja, a mennyiben θ^x állandó jellegével bír, másfelől pedig a talajhőmérsékletnek olyan függvényét tűnteti fel, a melyet a valóságban a talaj különböző mélységeiben végzett hőmérsékleti megfigyelésekből is előállíthatunk, ha a hőmérsékletnek napi vagy havi átlagait a harmonikus analysis módszerével periodusos sorba fejtjük és azután a sornak csupán a két első tagjára leszünk tekintettel. Megjegyezzük, hogy a tényleges hőmérsékleti ingás a szabályos jelleget annál inkább megközelíti, minél inkább hatolunk lefelé a homogén talajban.

A (3) alatti egyenlettel a talaj periodusos hőmérsékletét jellemző görberendszereket igen egyszerűen előállíthatjuk, mivel θ_x -et, támaszkodva a tapasztalásra, első közelítésben állandónak tekinthetjük. Ugyanis a (3) alattiban

1. ha $x =$ állandó, ellenben ϑ_x , meg t változó mennyiség, akkor az egyenlet a talajhőmérsékletnek *időbeli oszcillációs* görbét definiálja az x mélységben;

2. ha $\vartheta_x =$ állandó, ellenben x meg t változó mennyiségek, akkor az egyenlet a talaj $\vartheta_x = \text{const.}$ *geothermáját*¹ szolgáltatja;

¹ Tulajdonképen : *geo-isothermá-ját*.

3. ha $t = \text{állandó}$, ellenben x meg ∂_x változó mennyiségek, akkor az egyenlet a talaj $t = \text{const.}$ vagy *thermikus tautochroná-*ját jellemzi.

Láttuk, hogy az isotrop talajban a hőmérsékleti hullámnak fázisa és amplitudója csupán az x mélységnek a függvénye. Ha már most az (1') alatti egyenletet $x = x_1$ és $x = x_2$ mélységekre alkalmazzuk, a hol legyen $x_2 > x_1$, akkor az x_1 és x_2 mélységekben a hőmérsékleti hullám fázisai és amplitúdói a következők lesznek:

$$A_{x_1} = A_0 - x_1 \sqrt{\frac{\pi}{K_0 T}} \quad \text{és} \quad a_{x_1} = a_0 e^{-x_1 \sqrt{\frac{\pi}{K_0 T}}}$$

$$A_{x_2} = A_0 - x_2 \sqrt{\frac{\pi}{K_0 T}}; \quad a_{x_2} = a_0 e^{-x_2 \sqrt{\frac{\pi}{K_0 T}}}.$$

Ezekből aztán kivonással, illetve osztással nyerjük, hogy

$$A_{x_2} = A_{x_1} - (x_2 - x_1) \sqrt{\frac{\pi}{K_0 T}}$$

$$\lg a_{x_2} = \lg a_{x_1} - (x_2 - x_1) \sqrt{\frac{\pi}{K_0 T}}.$$

Mivel pedig az utolsó tagokban az $(x_2 - x_1)$ mélységkülönbséget jellemző mennyiségnek a szorzója az izotrop talaj Poisson-féle parameterét jelenti, melyet p_0 -sal jelölünk, az utolsó egyenleteket még a következően is írhatjuk:

$$A_{x_2} = A_{x_1} - p_0 (x_2 - x_1) \quad (\alpha)$$

$$\lg a_{x_2} = \lg a_{x_1} - p_0 (x_2 - x_1), \quad (\beta)$$

hol a p_0 és K_0 között az előbbiek szerint a következő összefüggés áll fenn:

$$K_0 = \frac{\pi}{T} \frac{1}{p_0^2}. \quad (4)$$

Ezek után az (α) és (β) alatti egyenletekből kiküszöböljük az $(x_2 - x_1)$ -et, mely a talajréteg vastagságát jelenti; lesz:

$$\lg \frac{a_{x_1}}{a_{x_2}} = A_{x_1} - A_{x_2},$$

vagyis az isotrop talajban, bármely rétegben, a hőmérsékleti amplitudóknak logaritmusos dekrementuma a megfelelő fázis-elmuradással tartozik egyenlőnek lenni. Ez a talaj isotrop tulajdonságának kriteriumát szolgáltatja.

A valóságban ezt a kriteriumot csak némely talajban találjuk beigazolva, de azt is legtöbbször a felülettől egy bizonyos mélységen alól. Különösen lényeges eltérést találunk az amplitudók log. dekrementuma és a fáziselmuradás között a vízátbocsájtó talajrétegekben, vagyis általában a pseudoisotrop talajokban.

Az (α) és (β) alatti általános két egyenletnek az isotrop talajban jogosultsága van akkor is, ha $x_1 = 0$ és $x_2 = x$, vagyis az egész réteg vastagsága a felülettől x mélységig terjed. Ha most az (α) és (β) alattiakat a valóságban alkalmazzuk, csakhamar meggyőződünk, hogy az észlelt adatok az (α) és (β) alattiakat nem elégítik ki, sőt ha A_x -et és $\lg a_x$ -et a legkisebb négyzetekkel állítjuk elő, akkor az

$$A_x = A_0 - \mu x - \nu x^2$$

$$\lg a_x = \lg a_0 - \lambda x - \chi x^2$$

egyenletekben a μ , ν , λ , χ egymástól lényegesen eltérnek. Így pl. a tífisi talaj hőmérsékleti adataiból nyerjük, hogy

$$A_x = A_0 - 0,3763x - 0,0074x^2$$

$$\lg a_x = \lg a_0 - 0,5944x + 0,0212x^2,$$

hol x méterekben van kifejezve. A talaj, melyre az egyenletek vonatkoznak, kvarczos homok volt, tehát vízátbocsájtó, vagyis általában pseudoisotrop.

A homokot mint isotrop talajt jellemző Poisson-féle parameter FORBES meghatározása szerint $p_0 = 0,3393$, melyet az A_x -ben az x -nek együtthatója eléggé megközelít, de lényegesen eltér a $\lg a_x$ -ben az x együtthatójától. Ebből aztán következik, hogy ha bizonyos közelítéssel az A_x -et és $\lg a_x$ -et a valóságban a mélység lineáris függvényéül tekintjük is, az isotropia feltétele nincs kielégítve. A valóságban tehát a fázisok és amplitudók függvényeiben a Poisson-féle paraméterek különböző értékűek lesznek, megjegyezvén, hogy a fázis függvényében csekély hibá-

val p_0 -nak vehetjük ugyan, de a logaritmusos dekrementumban $p = p_0 + z$, hol z az isotrop állapottól való eltérésnek a következménye. A $z = p - p_0$ különbséget *isotrop deviatió* elnevezéssel akarjuk bevezetni.

Ha most feltesszük, hogy a pseudoisotrop talajt rétegekre bontjuk, melyeknek isotrop deviatiója változik és feltesszük, hogy a rétegek hővezetés tekintetében egyenként úgy viselkednek, mint isotrop talajrétegek, melyekhez más és más p parameter tartozik, akkor valamely $x_2 - x_1$ rétegre nézve a Poisson-féle egyenlet a következő lesz:

$$\lg a'_{x_2} = \lg a'_{x_1} - p (x_2 - x_1). \quad (\text{I})$$

Ebből

$$p = \frac{1}{x_2 - x_1} \lg \frac{a'_{x_1}}{a'_{x_2}}$$

és

$$K = \frac{\pi}{T} \frac{1}{p^2}. \quad (\text{II})$$

Ha már most az $(x_2 - x_1)$ rétegre nézve az isotrop állapotra vonatkozó hőmérsékleti amplitudókat a_{x_1} és a_{x_2} -vel jelöljük, akkor a talaj pseudoisotrop és isotrop állapotára vonatkozólag két jellemző relációt szerkeszthetünk. Ugyanis a rétegek pseudoisotrop állapotára vonatkozó hőmérsékleti amplitudók logaritmusos dekrementumai arányosak az isotrop állapotra vonatkozó hőmérsékleti amplitudók logaritmusos dekrementumaival, azaz a (β) -ból és az (I)-ből:

$$\lg \frac{a'_{x_1}}{a'_{x_2}} = \frac{p}{p_0} \lg \frac{a_{x_1}}{a_{x_2}}.$$

Ámde isotrop állapotnál $\lg \frac{a_{x_1}}{a_{x_2}} = A_{x_1} - A_{x_2}$.

Ha már most J_1 és J_2 -vel jelöljük a pseudoisotrop és isotrop állapotra vonatkoztatott fáziskülönbségeket az x_1 és x_2 mélységben, akkor

$$A_{x_1} - A_{x_2} = (A'_{x_1} - A'_{x_2}) - (J_1 - J_2).$$

Ennélfogva a pseudoisotrop talajban

$$\lg \frac{a'_{x_1}}{a'_{x_2}} = \frac{p}{p_0} (A'_{x_1} - A'_{x_2}) - \frac{p}{p_0} (J_1 - J_2).$$

Mivel a valóságban az észleletek szerint az utolsó tag a megelőzőhöz képest elhanyagolható, nyerjük, hogy *első közelítésben*:

$$\lg \frac{a'_{x_1}}{a_{x_1}} = \frac{p}{p_0} (A'_{x_1} - A'_{x_2}).$$

Vagyis a pseudoisotrop állapotot jellemző kritériumot első közelítésben nyerjük, mely szerint a *pseudoisotrop talajrétegekben a hőmérsékleti amplitudók log. dekrementumai arányosak lesznek a megfelelő fáziselmaradásokkal.*

Továbbá az $(x_2 - x_1)$ rétegnek pseudoisotrop állapotát jellemző isotrop deviációját, $z = p - p_0$ -t a következően fejezhetjük ki:

$$z = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\lg \frac{a'_{x_1}}{a_{x_1}} - \lg \frac{a'_{x_2}}{a_{x_2}} \right],$$

azaz valamely talajrétegnek isotrop deviációját úgyis definiálhatjuk, mint a talajrétegnek pseudoisotrop és isotrop állapotára vonatkozó hőmérsékleti amplitudóinak logaritmikus dekrementumaiból alkotott különbségek középértékét.

Legyen ε egy alkalmasan választott faktor, amellyel szorozzuk meg (I) alattit, akkor lesz

$$\varepsilon \lg \frac{a'_{x_1}}{a'_{x_2}} = \varepsilon p (x_2 - x_1),$$

ahol $\varepsilon \lg \frac{a'_{x_1}}{a'_{x_2}}$ -t és $(x_2 - x_1)$ -et valamely koordinata-rendszerre rajzolhatjuk, melyek oly egyenest határoznak meg, melynek iránytangense $= \varepsilon p$.

Legyen az egyenesnek a mélységgel, azaz az x iránynyal alkotott irányszöge α , akkor $\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon p$.

Legyen a talajréteg izotrop állapotára vonatkozó egyenesnek a mélység irányával alkotott irányszöge α_0 , akkor $\operatorname{tg} \alpha_0 = \varepsilon p_0$.

És akkor a két egyenes által alkotott szög $\delta = \alpha - \alpha_0$ és

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_0}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_0} = \varepsilon \frac{p - p_0}{1 + \varepsilon^2 p p_0} = \frac{\varepsilon z}{1 + \varepsilon^2 p p_0}. \quad (5)$$

Mivel p és p_0 megválasztott mértékrendszerünkben általában a hosszegység reciprok egységéhez képest kicsiny mennyiségek, ε^2 pedig a hosszegység négyzetét fogja jelenteni, ennél fogva az $\varepsilon^2 p p_0$ szorzatot az egység számhoz képest elhanyagolhatjuk. És ekkor az első közelítésben

$$z = \operatorname{tg} \delta, \quad (5_a)$$

vagyis a talajréteg isotrop deviatiója egyenlő a *deviatiós szög* trigonometrikus tangensével.

Alkalmazzuk az (5) alattit a pseudoisotrop talajnak két egymás alatti rétegeire. Legyen a felső rétegben az isotrop deviatió z_1 , az isotrop deviatiós szög δ_1 , a közepes hővezetési együttható K_1 , a Poisson-féle parameter p_1 és az alsó rétegben legyenek ezek a mennyiségek $_2$ -es indexszel ellátva, akkor

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\varepsilon z_1}{1 + \varepsilon^2 p_1 p_0}$$

és

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\varepsilon z_2}{1 + \varepsilon^2 p_2 p_0}.$$

Az ezekből alkotott hányados pedig:

$$\frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_2} = \frac{z_1}{z_2} \frac{1 + \varepsilon^2 p_2 p_0}{1 + \varepsilon^2 p_1 p_0}.$$

Ha most a tapasztalásra támaszkodunk, akkor megállapíthatjuk, hogy ha a jobboldalt $\frac{p_2^2}{p_1^2}$ törttel szorozzuk, akkor a jobboldal megközelíti az egységet, azaz, a tapasztalat szerint megközelítésben áll, hogy

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \frac{z_1}{z_2} \frac{1 + \varepsilon^2 p_2 p_0}{1 + \varepsilon^2 p_1 p_0} = 1.$$

Ekkor azonban

$$\frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2}.$$

Ha már most a jobboldal számlálóját és nevezőjét $\frac{\pi}{T}$ -vel szorozzuk, akkor, tekintettel a (II) alattira, nyerjük a következő kifejezést:

$$\frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_2} = \frac{K_2}{K_1}. \quad (6)$$

Ebből pedig egész általánosan

$$K \operatorname{tg} \delta = C \quad (\text{III})$$

hol C állandót jelent. Tehát a pseudoisotrop talajban bármely rétegben a termometrikus hővezetési együtthatóból és az isotrop deviatiós szög tangenséből alkotott szorzat állandó.

Ez a pseudoisotrop talajt jellemző reláció inkább tapasztalati, mint általános jellegű és kicsiny δ mennyiséget nem számítva, vagyis midőn a talaj közel van az isotrop állapothoz, a homokban teljes igazolásra talál, úgy hogy a (III) alattit felhasználhatjuk még más következtetésekre is. Mielőtt azonban ezt tesszük, a geothermák sajátságaiból a (III) alattihoz hasonló, de egészen általános érvényű (isotrop és pseudoisotrop talajban érvényes) törvényt vezetünk le.

3. §. A geothermák törési szöge.

Ha bevezetjük a geothermák «törési szögeit», melyekkel a talajrétegeknek az isotrop állapottól való eltérését, vagyis az isotrop deviatióját előállítjuk, akkor megállapíthatjuk az összefüggést a pseudoisotrop talajban az isotrop deviatiós szög és a geothermák törési szögei között.

Ugyanis a geothermák a homogén és isotrop talajban folytonosak és irányváltozásuk folytonos, ellenben a nem isotrop (anisotrop és pseudoisotrop) talajban a különböző hővezetési koefficienssel bíró rétegek határfelületein hirtelen irányt változtatnak, azaz megtörnek. Ezt az irányváltozást pedig a rétegek határfelületeihez vont normális és a geotherma érintője által alkotott hajlási szögekkel, illetve törési szögekkel kifejezhetjük.

Ha a valóságban a pseudoisotrop talajban a geothermákat a szokásos módon megrajzoljuk, akkor azok a rétegek határfelületein megtörnek és a törési szögeket — φ -t — lemérhetjük.

Láttuk, hogy a hőmérséklet ingását a talajban, bármely x mélységben

$$\vartheta_x = \theta_x + a_x \sin \left(A_x + \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (3)$$

függvénynyel állíthatjuk elő.

Ha már most x és t folytonos változása mellett $\vartheta_x = \vartheta$ -t állandónak tekintjük, akkor a geothermák általános egyenlete következő:

$$\theta_x + a_x \sin \left(A_x + \frac{2\pi}{T} t \right) = \text{állandó}.$$

Vagyis, mivel a valóságban az észlelések szerint a θ_x -nek az x mélységgel való *változásától* első megközelítésben eltekinthetünk a geothermák egyenlete lesz:

$$\vartheta = a_x \sin \left(A_x + \frac{2\pi}{T} t \right) = \text{const.},$$

melyet a homogén, isotrop talajban az (1') alatti szerint a következően is írhatunk:

$$\vartheta = a_0 e^{-p_0 x} \sin \left(A_0 - p_0 x + \frac{2\pi}{T} t \right) = \text{const.} \quad (6_a)$$

Legyen a geotherma és a talajfelszínének normálisa (a mélység iránya) által alkotott hajlási szög φ_0 , akkor $\text{tg } \varphi_0 = \frac{dt}{dx}$. Ámde a geotherma $\vartheta(x, t) = \text{const.}$ egyenletéből differenciálással nyerjük, hogy

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt = 0,$$

a honnan

$$\frac{dt}{dx} = \text{tg } \varphi_0 = - \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial x} : \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right].$$

Tekintettel a geothermákat jellemző utolsó egyenletre, némi számítás után lesz

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} : \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = - p_0 \frac{T}{2\pi} \left[\text{tg} \left(A_0 - p_0 x + \frac{2\pi}{T} t \right) + 1 \right],$$

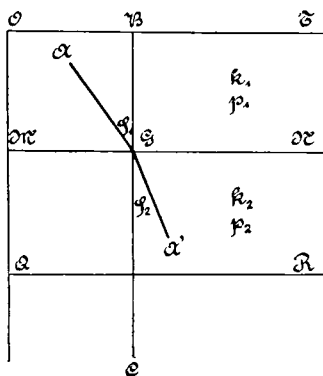
$$\text{vagy röviden írva: } A_0 - \rho_0 x + \frac{2\pi}{T} t = \phi_0, \quad (6b)$$

és

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = + \rho_0 \frac{T}{2\pi} [\operatorname{tg} \phi_0 + 1].$$

Ha a talaj pseudoisotrop, akkor az egyes, különböző rétegekben, melyek a közepes hővezetési együtthatóra nézve úgy viselkednek, mintha isotrop állapotban volnának, csupán a Poisson-féle parameterük változik, hasonló eredményhez jutunk.

Legyenek az 1. ábrán OT és MN annak a talajrétegnek a határai, melyben a hővezetési együttható K_1 és a Poisson-féle parameter p_1 ; a réteg valamely geothermájának iránya \overline{AG} , mely



1. ábra.

a felület normálisával \overline{CB} -vel a G pontban φ_1 szöget alkot. Legyen továbbá \overline{QR} az a határ, mely felett az $MNQR$ talajrétegnek hővezetési együtthatója K_2 , Poisson-féle parametere p_2 ; a rétegen átvonuló geotherma a felület normálisával φ_2 szöget alkot.

Ekkor mindkét rétegre külön-külön a következő egyenleteket írhatjuk:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = + p_1 \frac{T}{2\pi} [\operatorname{tg} \phi_1 + 1]$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = + p_2 \frac{T}{2\pi} [\operatorname{tg} \phi_2 + 1].$$

Ámde az érintkezési felületen (\overline{MN}) az x ugyanaz lévén, a (6_a) egyenlet szerint a (6_b) értelmében a $\varphi_1 = \varphi_2$, úgy, hogy

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Mivel p_1 és p_2 a Poisson-féle egyenlet értelmében az egy-
ségnyi mélységkülönbségre vonatkoztatott hőmérsékleti amplitudók logaritmikus dekrementumait jelenti, azt mondhatjuk, hogy *a pseudoisotrop talajban az egymás alatti rétegek geothermáinak törési szögeinek trigonometriai tangensei arányosak a rétegek hőmérsékleti amplitudóinak logaritmikus dekrementumaival.*

Ha pedig a p helyett 2. §. (II) alattival bevezetjük a rétegek hővezetési koefficienseit, akkor lesz

$$\frac{\tilde{K}_1}{\tilde{K}_2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}.$$

Hasonló eredményhez jutunk akkor is, ha a talaj isotrop és pseudoisotrop rétegeinek érintkezési felületére vonatkoztatjuk a viszonyokat. Legyenek az isotroprétegben a hajlási szög φ_0 , a hővezetési együttható K_0 és a Poisson-féle parameter p_0 , ugyanennek a talajnak a meteorológiai hatások következtében pseudoisotrop rétegét jellemző mennyiségek pedig φ , \tilde{K} , p , akkor

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{p}{p_0}, \quad (7)$$

vagy

$$\frac{\tilde{K}}{K_0} = \frac{\operatorname{tg}^3 \varphi_0}{\operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Egész általánosságban tehát, míg θ_x állandónak tekinthető

$$K \operatorname{tg}^2 \varphi = C', \quad (IV)$$

hol C' állandót jelent.

Ennélfogva mondhatjuk, hogy általában a talajrétegek hővezetési együtthatóiból és a geothermák, mely a felszínhez vont normális által bezárt hajlási, illetve törési szög tangenseinek négyzeteiből alkotott szorzat állandó.

Ezt a tételt felhasználhatjuk a rétegek közepes hővezetési

együtthatóinak meghatározására. Ha a geothermákat megszerkesztjük és minden réteg felületén lemérjük azoknak törési szögeit, akkor ezeknek átlagai szolgáltatják a T periodusra vonatkozó közepes törésszögeket a különböző rétegek felületein, úgy hogy ezek segítségével a rétegek közepes hővezetési együtthatóit meghatározhatjuk.

A valóságban például a következően is határozhatjuk meg a különböző rétegekhez tartozó geothermáknak közép törési szögeit: A 2. §. (3) alatti egyenletet minden rétegre külön-külön megszerkesztjük, melyekkel $\vartheta_x = \text{constans}$ -hoz tartozó t -ket kiszámítjuk, úgy, hogy a (3) által jellemzett geothermákat megszerkeszthetjük. Ezután a geothermák érintőinek a mélység irányába vont normálissal alkotott φ törési szögét lemérjük; vagy mellőzve a szerkesztést, a φ -ket számítással is meghatározhatjuk, amennyiben ugyanahhoz a geothermához tartozó t -ket már kiszámítottuk, a rétegek vastagságát pedig ismerjük. Ekkor lesz

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}.$$

A különböző geothermák törési szögei ugyanazon réteg felületén változnak, úgy hogy czélszerű ezekből a T periodusra vonatkozó közepes törési szögeket kiszámítani és ezekkel a K -t meghatározni.

Ilyen eljárással számítottam a tífisi és pawlowszki talajhőmérsékleti adatokból a különböző rétegek közepes törési szögeit, melyek a későbbi táblázatokban foglaltatnak. (9. §.)

4. §. A geothermák törési szögei és az isotrop deviatió között fennálló összefüggés.

Hogy a pseudoisotrop talajban a különböző rétegek deviatója és a geothermák törési szöge közötti összefüggést megállapítsuk, képzeljük a rétegeket, mintha azok mindegyike isotrop talajréteggel érintkeznék és határozzuk meg a talaj isotrop és pseudoisotrop állapotához tartozó geothermák eltérési szögeit.

Legyen a pseudoisotrop talajban valamely réteghez tartozó közép geothermás törési szög φ , és az isotrop talaj közép geo-

termás törési szöge φ_0 , akkor 3. §. (7) alatti szerint, ha ε valamely szorzót jelent, írhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \varphi = \varepsilon p \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \varepsilon p_0.$$

Ha most alkotjuk

$$\operatorname{tg} (\varphi - \varphi_0) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_0}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_0},$$

akkor nyerjük, hogy

$$\operatorname{tg} (\varphi - \varphi_0) = \varepsilon \frac{p - p_0}{1 + \varepsilon^2 p p_0}.$$

Tekintettel az (5) alattira

$$\operatorname{tg} (\varphi - \varphi_0) = \operatorname{tg} \delta,$$

azaz

$$\delta = \varphi - \varphi_0. \quad (\text{V})$$

A pseudoisotrop talajban tehát az isotrop derivációs szög egyenlő a talaj isotrop és pseudoisotrop állapotához tartozó geothermák törési szögének különbségével.

A δ szöget könnyen lehet megszerkeszteni. Legyen $\varepsilon = 1$ alkalmasan választott egység, akkor p és p_0 a φ illetve φ_0 szögeknek trigonometrikus tangenseit jelentik, úgy hogy

$$a = p \quad \text{és} \quad a_0 = p_0.$$

Ha már most az \overline{OA} tetszés szerint választott egyenes O pontjához megrajzoljuk az \overline{OB} és \overline{OC} egyenest, úgy, hogy

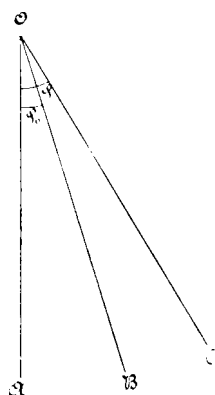
$$\angle AOB = \varphi_0$$

és

$$\angle AOC = \varphi,$$

akkor

$$\angle BOC = \delta\text{-val.} \quad (2. \text{ ábra.})$$



2. ábra.

5. §. A meleg terjedési sebességének meghatározása.

A pseudoisotrop talajban a rétegek isotrop deviációja és a meleg terjedési sebessége között fennálló összefüggést a tautochronák sajátosságából megállapíthatjuk. Ugyanis a 2. §. (3) alatti egyenlet általánosságban thermikus tautochronát képvisel, ha az egyenletben t -t állandónak tekintjük. Ekkor az egyenlet az x -nek és ϑ_x -nek lesz a függvénye, úgy hogy a t tautochrona (x, ϑ_x) pontjához húzott érintő az xx' tengellyel α szöget alkot, ennél fogva $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\vartheta_x}{dx}$. Tekintettel az (1') alattira $\operatorname{tg} \alpha$ az izotrop talajban következően van meghatározva:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\vartheta_x}{dx} = \rho_0 \sqrt{2e^{-\rho_0 x} \sin \left(A_0 - \rho_0 x + \frac{2\pi}{T} t - \frac{3\pi}{4} \right)}.$$

Válasszunk most az isotrop talajban két: $x = x_1$ és $x = x_2$ mélységű, a felülettel párhuzamos síkot és legyen az x_1 -hez tartozó tautochrona $t = t_1$, az x_2 -höz tartozó $t = t_2$ oly tulajdonságú, hogy az (x_1, ϑ_{x_1}) és (x_2, ϑ_{x_2}) pontokhoz húzott érintők irányszögeihez, azaz $\operatorname{tg} \alpha_1$ és $\operatorname{tg} \alpha_2$ -höz tartozó szinusok argumentumai egyenlők, vagyis legyen a két görbe pontjaiban a talaj hőmérsékleti állapota hasonló, akkor

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = e^{\rho_0(x_2 - x_1)}$$

és

$$\rho_0 (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{T} (t_2 - t_1),$$

azaz

$$\lg \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right) = \frac{2\pi}{T} (t_2 - t_1).$$

A szinus-függvény sajátosságából következik, hogy T periódusban minden mélységben két olyan tautochrona van, melyek között ez a reláció érvényes és az érintők irányszögei π -vel különböznek, vagyis a tautochronák teljesen szimmetrikusan helyezkednek el a szakaszban. Midőn az x mélységben a hőmérsékletnek maximuma, illetve minimuma van, a tautochronához húzott érintők a felületre merőlegesek, mert

$\frac{d\vartheta_x}{dx} = 0$ és így $\alpha = 0$, ez pedig akkor következik be, ha a szinus függvényben az argumentum π , vagy 0 al lesz egyenlő.

Az isotrop talaj felületére merőleges tautochronák, vagyis főtautochronák időpontjai pedig a periodusban

$$t_1 = \left[\frac{7}{8} - \frac{A_0}{2\pi} \right] T$$

és

$$t_2 = \left[\frac{3}{8} - \frac{A_0}{2\pi} \right] T$$

által vannak meghatározva, hol A_0 az $x = 0$ felszín hőmérsékletében a hullám fázisát jelenti.

Mivel az isotrop talajréteget jellemző Poisson-féle parameter

$$\nu_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}$$

által meg van határozva, bevezetjük a *melegterjedési sebességet*. Ugyanis ez a reláció érvényben marad, bármilyen vékony-nak is képzeljük a talajréteget, úgy hogy írhatjuk

$$p_0 = \frac{2\pi}{T} : \frac{dx}{dt},$$

hol a jobboldalon az osztó a meleg terjedési sebességét jelenti:

$$\frac{dx}{dt} = V_0.$$

Tehát

$$\nu_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{V_0}.$$

Vagy ha p_0 helyett K_0 hővezetési együtthatót vezetjük be, akkor, mivel (4) szerint $K_0 = \frac{\pi}{T} \frac{1}{p_0^2}$, tehát

$$V_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{1}{p_0^2} = \frac{4\pi}{T} \frac{\pi}{T} \frac{1}{p_0^2} = \frac{4\pi}{T} K_0 = V_0^2.$$

Mivel pedig a λ_0 hullámhossz, a V_0 terjedési sebesség és a T periodus között a

$$V_0 = \frac{\lambda_0}{T}$$

összefüggés áll fenn, a hullámhosszat nyerjük, ha V_0 ez értékét a fentibe behelyettesítjük, azaz

$$\lambda_0 = 2\sqrt{\pi K_0 T}. \quad (a)$$

A *pseudoisotrop talajban bármely rétegben hasonló eredményt nyerünk*. Legyen az $(x_2 - x_1)$ rétegben a parameter p , akkor ennek értéke

$$p = \frac{2\pi}{T} \frac{t'' - t'}{x_2 - x_1}$$

és

$$\lg\left(\frac{tga'}{tga''}\right) = p(x_2 - x_1),$$

hol t'' és t' különbözik az előzőekben bevezetett t_2 és t_1 -től. Ha a rétegben a meleg terjedési sebességét V -vel jelöljük, akkor

$$p = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{V}. \quad (8)$$

Ha pedig bevezetjük p helyett a réteg hővezetési együtthatóját, K -t, akkor

$$V^2 = \frac{4\pi}{T} K. \quad (9)$$

Tehát az isotrop és pseudoisotrop talajban a POISSON-féle parameter a melegterjedési sebességgel fordítva arányos és a melegterjedési sebességek négyzetei arányosak a talajrétegek hővezetési együtthatóival.

Ha pedig (9) alattiba a K helyett a geothermák törési szögét [3. §. (IV)], illetve a pseudoisotrop talaj isotrop deviatóját jellemző δ szöget [2. §. (III)] bevezetjük, akkor a melegterjedési sebességre két egyszerű egyenletet nyerünk:

$$V = \frac{2}{tga} \sqrt{\frac{\pi C'}{T}}$$

és

$$V^2 = \frac{4\pi}{T} \frac{C}{\operatorname{tg} \delta}.$$

Ezek hányadosa

$$V = A \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \delta},$$

ahol A = állandót jelent.

Tehát a pseudoisotrop talajban a meleg terjedési sebessége arányos a geothermák törési szögének és az isotrop deviatiós szögnek tangenseiből alkotott hányadossal.

Az isotrop deviatiót melegterjedési sebességgel kifejezve, lesz

$$p - p_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{V_0 - V}{V_0 V}.$$

A pseudoisotrop talajban tehát a meleg terjedési sebessége annál kisebb, minél nagyobb a réteg isotrop deviatiója.

6. §. A pseudoisotrop talaj karakterisztikus függvénye.

A következőkben bemutatjuk a talaj pseudoisotrop állapotát jellemző függvénynek közelítő alakjait, kifejezve az isotrop deviatióval. Ugyanis a karakterisztikus függvény általános alakja 1. §. 2.) szerint

$$f(\delta) = K_0 - K.$$

Ha most a K_0 és K értékeit [3. §. (IV)] alapján a törésszögek szinusaival fejezzük ki, akkor

$$f(\delta) = C' \frac{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi_0}.$$

Vagy mivel

$$\varphi - \varphi_0 = \delta,$$

tehát

$$f(\delta) = C' \frac{\sin^2(\varphi_0 + \delta) - \sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi_0 \sin^2(\varphi_0 + \delta)},$$

hol $f(0) = 0$, ha $\delta = 0$, vagyis ekkor a talaj isotrop. Továbbá, miként könnyű meggyőződni:

$$f(\delta') = C',$$

ha

$$\sin(\varphi_0 + \delta') = \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Vagyis C' állandó a talaj isotrop hővezetési együtthatója és azon réteg pseudoisotrop hővezetési együtthatója közötti eltérést jelenti, a mely rétegben a deviatio δ' és ezenutolsó kifejezésnek tesz eleget. Az isotrop homokban pl. $\varphi_0 = 18^\circ 7'$, úgy hogy $\delta' = 1^\circ 1'$; e deviatióval bíró rétegre nézve pedig a tényleges hővezetési együttható az isotrop állapotú hővezetési együtthatónál $0.059 \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$ -val kisebb.

A valóságot megközelítjük a karakterisztikus függvénynek egy egyszerűbb formájával, melyet *avval a feltevéssel szerkesztünk, hogy legyen a függvény változása a meleg terjedési sebességének csökkenésével arányos, azaz*

$$df = -\beta dV,$$

hol β arányossági tényezőt jelent.

Ámde az előzők szerint

$$p - p_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{V_0 - V}{V_0 V},$$

amiből elemi változások esetén következik, lévén 2. §. (5) szerint $p - p_0 = z$, hogy

$$dz = \frac{2\pi}{T} \frac{dV}{V_0 V},$$

innen

$$dV = \frac{V_0 T}{2\pi} V dz,$$

úgy, hogy

$$df = -\beta \frac{V_0 T}{2\pi} V dz.$$

Vagy a következő jelölést hozva be:

$$-\beta \frac{V_0 T}{2\pi} = a,$$

lesz

$$df = a V dz.$$

Ebből

$$f(\delta) = a \int V dz + D.$$

Az azonban könnyen kifejezhető a δ által. Ugyanis az (5) alatti szerint, ha $\varepsilon = 1$,

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{z}{1 + pp_0}.$$

Ha már most csak közelítéssel akarjuk a függvényt előállítani, akkor pp_0 -t az 1-hez képest elhanyagolhatjuk, úgy hogy lesz

$$dz = \frac{d\delta}{\cos^2 \delta}.$$

Ha most meg V -t is a δ -val fejezzük ki, akkor, mivel

$$V^2 = \frac{4\pi}{T} \frac{C}{\operatorname{tg} \delta},$$

lesz

$$f(\delta) = a \sqrt{\frac{4\pi C}{T}} \int \frac{d\delta}{\cos^2 \delta \sqrt{\operatorname{tg} \delta}} + D.$$

Legyen rövidebb jelölés céljából

$$a \sqrt{\frac{4\pi}{T} C} = \frac{r}{2},$$

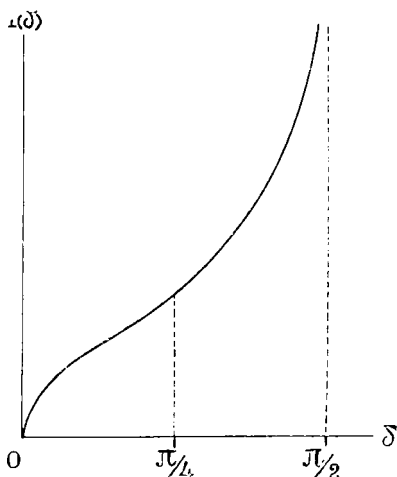
akkor

$$f(\delta) = r \sqrt{\operatorname{tg} \delta} + D.$$

A D állandót a kezdő feltételekből meghatározhatjuk. Ugyanis $f(\delta)$ függvénynek az előzőekben adott definíciója szerint a $\delta = 0$ mellett $f(\delta)$ elenyészik, vagyis ekkor a talaj isotrop állapotú lesz, ennél fogva $D = 0$, úgy hogy a talaj pseudoisotrop állapotát jellemző függvény lesz

$$f(\delta) = r \sqrt{\operatorname{tg} \delta}, \quad (10)$$

azaz a bevezetett egyszerűsítés szerint: a pseudoiso-



3. ábra.

troptalaj karakterisztikus függvénye az isotropdeviatiós szög tangensének négyzetgyökével arányos.

Az $f(\delta)$ függvényt a 3. ábrán állítottuk elő.

7. §. A talaj melegmennyiségi hullámának és hőmérsékleti hullámának fáziseltérése.

A klimatológiában rendes körülmények között a felszíntől 1—2 m magasságban levegőben elhelyezett hőmérő adatait szokták a klíma hőmérsékletének a jellemzésére használni. A légkör alsó határán a talaj közvetlen közelségében a hőmérséklet periodos ingása pedig átlagokban, miként a tapasztalás mutatja, a talaj felszínén a hőmérséklet ingását követi, úgy hogy a talaj felszínén a hőmérséklet szélső értékeinek megjelenési ideje — elhanyagolható eltéréssel — egybeesik aközvetlen közelségében levő levegő hőmérséklete szélső értékeinek megjelenési idejével.

Azonban a talaj felszínének a hőmérsékleti ingása mindenkör függ a talajba áramlott melegmennyiség ingásától, úgy hogy a meleghullám fázisa és az általa létesített hőmérsékleti hullám fázisa között időbeli eltérésnek kell lennie. Ez az időbeli eltérés pedig abban nyilvánlik meg, hogy a meleg hullám a hőmérsékleti hullámot megelőzi, mert a meleg a talajban a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb hőmérsékletű hely felé vezetéssel terjed. Ez a fáziseltérés az isotrop talajban állandó, a pseudoisotrop talajban — ügylátszik — változó mennyiség és szoros összefüggésben áll a talaj isotrop deviatiójával.

Ugyanis legyen az egységnyi keresztmetszetű, ρ sűrűségű és dx vastagságú talajtömegelemnek a fajhője c , hőmérséklete ϑ_x által megadva, akkor a tömegelem melegmennyisége

$$dQ_x = c\rho\vartheta_x dx$$

egyenlettel meg van határozva.

Ha a talajt isotrofnak tekintjük, akkor tekintettel, hogy 2. §. (3) szerint

$$\vartheta_x = \theta + a_x \sin \left(A_x + \frac{2\pi}{T} t \right) = \theta + a_0 e^{-p_0 x} \sin \left(A_0 - p_0 x + \frac{2\pi}{T} t \right),$$

és hogy az egyenlet a felszíntől x mélységig érvényes, következő integrálfüggvényt szolgáltatja:

$$Q = Q_0 - Q_x = c_0 \varrho_0 a_0 \sqrt{\frac{K_0 T}{2\pi}} \left[\sin \left(A_0 + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4} \right) - e^{-p_0 x} \sin \left(A_0 - p_0 x + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4} \right) \right] + E.$$

A jobb oldalon a E const. kivételével minden mennyiségnek a jelentését az előzőkből már ismerjük. A E állandót jelent, mely a középhőtartalomra és így a középhőmérsékletre is vonatkozik és a talajba felhalmozódott azt a meleget jelenti, mely a periodus alatt állandó marad.

A Q hőtartalom, ha az x némileg jelentékeny, és p_0 nem igen kicsiny, első megközelítésben e kifejezés első tagjára egyszerűsödik, melynek fázisa:

$$A_0 + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4}.$$

A fenti integrálfüggvény szerkezetéből következik tehát, hogy az *isotrop talaj* tetszés szerinti x mélységében a melegnek e mélységtől függő *periodusos* ingását a következő függvénnyel állíthatjuk elő:

$$c_0 \varrho_0 a_0 \sqrt{\frac{K_0 T}{2\pi}} e^{-p_0 x} \sin \left(A_0 - p_0 x + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4} \right),$$

hol

$$c_0 \varrho_0 a_0 \sqrt{\frac{K_0 T}{2\pi}} e^{-p_0 x} = \text{az amplitudóval és} \\ \left(A_0 - p_0 x + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4} \right) = \text{a fázissal.}$$

A fent jelzett megközelítés alapúlvételével keressük most az isotroptalajban azt a mélységet, melyben a hőmérsékleti hullámnak, a Q_x -nek fázisa a talaj felszínén áthaladt Q meleghullám fázisával egyenlő, vagyis, ha $x = h_0$ a keresett mélységet jelenti, akkor felírhatjuk a következő összefüggést:

$$A_0 + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4} = A_0 - p_0 h_0 + \frac{2\pi}{T} t,$$

ebből

$$h_0 = \frac{\pi}{4} \frac{1}{p_0},$$

vagyis bevezetvén p_0 -nak értékét [I. 2. §. (II)],

$$h_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\pi K_0 T} = \frac{\lambda_0}{8}, \quad [\text{5. §. (a)}]$$

vagyis a meleg hullám a hőmérsékleti hullámot a hullámbossz 8-ad részével előzi meg, a minnek a periodusban $\frac{T}{8}$ idő- vagy $\frac{\pi}{4}$ fáziskülönbség felel meg.

A pseudoisotrop talajban, — ha a különböző rétegek átlagos értékeivel számolunk — hasonló eredményhez jutunk, vagyis a két hullám egymáshoz képest való elmaradása

$$h = \frac{\pi}{4} \frac{1}{p} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi K T} = \frac{\lambda}{8}.$$

A h_0 és h azonban egymástól különböző hosszúság és $h_0 - h = \Delta h$ az a hosszkülönbség, mellyel a hullám késik a pseudoisotrop talajban az isotrop állapothoz képest. A meleg a Δh réteget az isotrop állapotra vonatkoztatott V_0 sebességgel

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{V_0}$$

idő alatt átáramolná, úgy, hogy a pseudoisotrop állapot következtében a hőmérsékleti hullámot a meleghullám a felületen $\left(\frac{T}{8} - \Delta t\right)$ idővel előzi meg, vagyis $\left(\frac{\pi}{4} - \eta\right)$ fázissal.

A valóságban az η csak lényegtelenül tér el a talaj felső rétegének isotrop deviatiójától (z -től), úgy hogy a talaj felületén a meleghullám a hőmérsékleti hullámot isotrop állapotnál $\frac{\pi}{4}$ -vel, pseudoisotrop állapotnál $\left(\frac{\pi}{4} - z\right)$ -vel előzi meg.

II. FEJEZET.

A homok pseudoisotrop tulajdonsága.

8. §. A tífisi és pawlowszki talajhőmérsékletek.

Alkalmazás. Az előzőkben tárgyaltak igazolására a tífisi és a pawlowszki talajhőmérsékleteket használtam fel. A talaj-

megfigyelések *mesterségesen előkészített homokban* a legnagyobb körültekintéssel végeztettek. A tífisi observatoriumnak 1895—1904-ig terjedő *évkönyveiből* a tízéves hőmérsékleti átlagokat kiszámítottam; miután pedig ezekből az átlagokból kielégítő eredményeket kaptam, számításaimat alkalmaztam azokra az *amplitudókra és fázisokra*, melyeket J. v. HANN számított és «Lehrbuch der Meteorologie» nagy munkájában közzétett. A sorozatot kiegészítettem még a 10 cm mélységben végzett észlelésekből nyert amplitudóval és fázissal.¹

A pawlowszki observatoriumban végzett megfigyelésekből pedig felhasználtam az E. LEYST által számított (1879—88) évi átlagokat, melyeket a szerző «Über die Bodentemperatur in Pawlowszk» című értekezésében tett közzé.² Ezebből az adatokból számítottam a *hőmérsékleti amplitudókat és fázisokat*. Megjegyzem, hogy LEYST összeállításában a 3·2 m mélységben észlelt adatok csak *hat* évi átlagot jelentenek, úgy hogy észszerűnek mutatkozott a *hat* évből nyert átlagos amplitudót és fázist tíz évre redukálni, mi által a periodusos hullám amplitudója 0·30-dal, fázisa pedig 3°0-kal kisebbedett.

Az alábbi táblázatokban összefoglaltam a tífisi és a pawlowszki talaj (homok) hőmérsékletének ingását jellemző hullám amplitudóit és fázisait, valamint a két észlelő helyen a levegő alsó rétegére vonatkozó hőmérsékleti ingás amplitudóit és fázisait. A levegő és talajfelszínhőmérsékletnek amplitudóiból és fázisaiból alkotott különbségek azt mutatják, hogy a levegő alsó rétegének hőmérsékleti évi ingására a talaj hőmérsékleti évi ingása döntő befolyással bír, a mennyiben a levegő hőmérsékleti amplitudója csak valamivel kisebb, mint a talaj felszínének hőmérsékleti amplitudója és a levegő hőmérsékleti fázisa csak kevéssel késik a talaj felszínének hőmérsékleti fázisától, vagyis a levegő alsó rétegének hőmérsékleti ingása a talaj felszínének hőmérsékleti ingását követi.

¹ 580. oldal

² Repertorium für Meteorologie (Band XIII). St. Petersburg, 1890.

Tiflis.

Geogr. szélesség = $41^{\circ} 43'$, geogr. hosszúság (Gr. keletre) $44^{\circ} 48'$.

| Levegő | Talaj | | | | | | | | | |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 1·3 m | 0,00 m | 0,10 m | 0,20 m | 0,40 m | 0,84 m | 1,65 m | 3,26 m | 3,99 m | 6,47 m | (x) |
| a_x : 12,11 | 15,83 | 14,85 | 14,10 | 12,53 | 10,00 | 6,94 | 2,90 | 2,02 | 0,75 | |
| A_x : 263°,5 | 266°,6 | 264°,6 | 262°,4 | 257°,4 | 248°,2 | 228°,8 | 191°,1 | 170°,8 | 114°,8 | |

Pawlowszk.

Geogr. szélesség: $59^{\circ} 41'$, geogr. hosszúság (Gr. keletre) $30^{\circ} 29'$.

| Levegő | Talaj | | | | | | | |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 1·3 m | 0,00 m | 0,10 m | 0,20 m | 0,40 m | 0,80 m | 1,60 m | 3,20 m | (x) |
| a_x : 12,70 | 14,48 | 13,38 | 12,66 | 11,03 | 8,14 | 5,58 | 2,74 | |
| A_x : 265°,4 | 270°,0 | 265°,8 | 263°,2 | 257°,8 | 245°,7 | 223°,6 | 185°,5 | |

9. §. A homok isotrop deviatiójának menete.

Hogy ezeket az adatokat az előzőekben tárgyalt egyenletek igazolására használhassuk, szükséges volt a homogén homok isotrop tulajdonságát jellemző mennyiségeket meghatározni. Kezdetben a Duna medréből vett homoknak vizértékét, $c_0\rho_0$ -t kalorimetrikus mérésekkel igyekeztem meghatározni. A méréseket két különböző időszakban végeztem és úgy találtam, hogy az 0,285 és 0,314 között ingadozott. Ezek oly számadatok voltak, melyek a FORBES által meghatározott $c_0\rho_0 = 0,3006$ -del jól megegyeztek, úgy hogy a homogén, isotrop homok hővezetési együtthatója gyanánt a $K_0 = 0,519 \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$ -t vehetjük, melyet FORBES oly feltétel mellett határozott meg, hogy a homokréteg hőmérsékleti amplitudójának logaritmikus dekrementuma a fázis-elmaradással egyenlő.

Ennélfogva kiszámítottam a Poisson-féle állandót

$$p_0 = 0,3393 \text{ m}^{-1},$$

a sebességet

$$v_0 = 5,0712 \frac{\text{cm}}{d},$$

és a geothermák törési szögét

$$\varphi_0 = 18^{\circ},7.$$

Ezek után lehetővé vált a δ kiszámítása minden rétegben a δ -t a geothermák törési szögeiből nyert $\varphi - \varphi_0 = \delta$ -val összehasonlítván, csak lényegtelen eltérést találtam, úgy hogy tekintettel a φ közepes értékére, megengedhetőnek véltem φ -t akképen korrigálni, hogy az a $\varphi - \varphi_0 = \delta$ egyenletnek tegyen eleget.

Az előzőekben tárgyalt egyenletekkel számított mennyiségek az alábbi táblázatokban foglaltatnak, hol a függőleges irányban a talajrétegek vastagságai és a vízszintes irányban a hozzájuk tartozó számított mennyiségek vannak feltüntetve.

| Δx (m) | p (m ⁻¹) | $p : p_0$ | $K \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$ | $V \frac{\text{cm}}{h}$ | δ° | φ° | Ktg δ | Ktg φ | $\gamma \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$ |
|------------------|------------------------|-----------|------------------------------------|-------------------------|----------------|-----------------|--------------|---------------|---|
| <i>Tiflis</i> | | | | | | | | | |
| 0·00—0·10 | 0·639 | 1·883 | 0·146 | 0·112 | 13·8 | 32·5 | 0·036 | 0·0595 | 0·752 |
| 0·10—0·20 | 0·518 | 1·527 | 0·222 | 0·138 | 8·7 | 27·4 | 0·034 | 0·0596 | 0·758 |
| 0·20—0·40 | 0·590 | 1·740 | 0·171 | 0·121 | 11·8 | 30·5 | 0·036 | 0·0593 | 0·761 |
| 0·40—0·84 | 0·513 | 1·511 | 0·227 | 0·130 | 8·4 | 27·1 | 0·034 | 0·0594 | 0·759 |
| 0·84—1·65 | 0·451 | 1·329 | 0·294 | 0·159 | 5·5 | 24·2 | 0·029 | 0·0594 | 0·726 |
| 1·65—3·26 | 0·542 | 1·597 | 0·203 | 0·132 | 9·7 | 28·4 | 0·035 | 0·0596 | 0·763 |
| 3·26—3·99 | 0·495 | 1·460 | 0·243 | 0·145 | 7·6 | 26·3 | 0·033 | 0·0594 | 0·755 |
| 3·99—6·47 | 0·400 | 1·777 | 0·374 | 0·179 | [3·0] | 21·7 | [0·020] | 0·0592 | [0·633] |
| Közép: | 0·5185 | 1·5280 | 0·2350 | 0·1395 | 9·4 | 27·3 | 0·0340 | 0·0593 | 0·7549 |
| <i>Pawłowszk</i> | | | | | | | | | |
| 0·00—0·10 | 0·790 | 2·328 | 0·096 | 0·091 | 19·6 | 38·3 | 0·034 | 0·0599 | 0·709 |
| 0·10—0·20 | 0·561 | 1·654 | 0·190 | 0·128 | 10·6 | 29·3 | 0·036 | 0·0598 | 0·761 |
| 0·20—0·40 | 0·685 | 2·019 | 0·128 | 0·105 | 15·7 | 34·4 | 0·036 | 0·0600 | 0·738 |
| 0·40—0·80 | 0·760 | 2·239 | 0·104 | 0·094 | 18·5 | 37·2 | 0·035 | 0·0599 | 0·718 |
| 0·80—1·60 | 0·472 | 1·392 | 0·268 | 0·152 | 6·5 | 25·2 | 0·031 | 0·0593 | 0·743 |
| 1·60—3·20 | 0·446 | 1·313 | 0·301 | 0·161 | 5·3 | 24·0 | 0·028 | 0·0597 | 0·716 |
| Közép: | 0·6190 | 1·824 | 0·1809 | 0·1217 | 12·7 | 31·4 | 0·0333 | 0·0598 | 0·7308 |

A táblázatokban foglalt δ deviatio értékeinek összehasonlításából tapasztaljuk, hogy az legnagyobb a legfelsőbb rétegben és Pawłowszkban körülbelül 6°-kal nagyobb, mint Tiflisben, továbbá van még a deviatiónak egy másodlagos maximuma, és pedig a tiflisi talajban a 20—40 cm-es, a pawłowszkiban pedig a 40—80 cm-es rétegben. Ez azt mutatja, hogy a talaj a felső

rétegben nedvesedik át a legnagyobb mértékben, honnan a csapadék lefelé szívódik folytonosan, a mint azonban az eső megszűnik, a felület száradni kezd, a talajba szívárgott víz a réteg kapillaritása miatt felfelé is szívódik, hol aztán addig párolog, míg ismét eső esik a felületre. A másodlagos deviatiós maximum tehát onnan származik, hogy a felületre esett csapadék a periódusban nem folytonos mennyiség. Hogy ez a másodlagos maximum Pawlowszokban nagyobb mélységben lép fel, mint Tiflisben, annak az okát egyrészt a csapadékmennyiség különböző eloszlásában, de főleg a felületnek gyorsabb kiszáradásában kell keresni, a mennyiben Tiflisnek geogr. szélessége körülbelül 18° -kal kisebb, mint Pawlowszké. A tífisi talajban 1,65 – 3,26 m-es rétegben még egy harmadik maximumot is találunk, azonban nem lehet eldönteni, vajjon valóságos maximum-e, vagy csak látszólagos.

A pawlowszki talajra vonatkozó γ sorozatban fellépő eltérés inkább a talajhőmérők kezelésével járó nehézségekben találja magyarázatát. Ugyanis LEYST értekezéséből kitűnik, hogy a hőmérők adatai nem szigorúan egyöntetűek és azoknak korrekciói meglehetősen széles határok között ingadoztak, úgy hogy az átlagokból számított hőmérsékleti ingás amplitúdói némi bizonytalanságot mutathatnak.

E megjegyzések után megállapíthatjuk, hogy a homok pseudoisotrop tulajdonságának karakterisztikus függvényében az állandót nagy közelítésben $\frac{3}{4}$ -nek vehetjük,¹ úgy hogy a homok karakterisztikus függvénye a 6. §. (10) alatti szerint a következő lesz:

$$f(\delta) = \frac{3}{4} \sqrt{\operatorname{tg} \delta}.$$

A meteorológiai hatásoknak kitett homok hővezetési együtthatóját tehát a

$$K = 0,519 - \frac{3}{4} \sqrt{\operatorname{tg} \delta} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{min}} \right]$$

egyenlet szolgáltatja, mely szerint K pozitív valós mennyiség csak akkor lehet, ha δ kisebb $25^\circ,5$ -nél, vagyis normális viszonyok mellett a homok isotrop deviatiós szöge $25^\circ,5$ -nél kisebb.

¹ L. a táblázatokat.

10. §. A meleg hullám fáziskorrekciója.

Az I. fejezet 7. §-ában egészen általánosan ismertettük a talaj isotrop és pseudoisotrop állapotára vonatkoztatott h_0 és h mélységek meghatározását, valamint az isotrop deviatio által létesített hőmérsékleti hullám fáziskorrekcióját.

Az erre vonatkozó adatok a következők:

Isotrop homokban: $h_0 = 231,52$ cm $\lambda_0 = 18,52$ m $t = 45,65$ d
 tífisi " $h = 155,79$ " $\lambda = 12,66$ " $t = 46,53$ "
 pawlowszki " $h = 136,68$ " $\lambda = 10,93$ " $t = 46,80$ "

Tehát az isotrop állapottól való eltérés következtében a hőmérsékleti hullám késett a tífisi talajban

$$\Delta h = h_0 - h = 75,73 \text{ cm-t,}$$

a pawlowszki talajban pedig

$$\Delta h = h_0 - h = 94,84 \text{ cm-t.}$$

Ezeknek az útkülönbségeknek megfelel a tífisi talajban

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{V} = 14,9 \text{ d,}$$

a pawlowszki talajban pedig

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{V_0} = 18,7 \text{ d,}$$

vagyis a tífisi pseudoisotrop állapotú homok az isotrop állapotú homokhoz képest a meleget körülbelül 15 nappal, a pawlowszki homok pedig 19 nappal késlelteti.

Ezek az eredmények pedig jól egyeznek a tífisi és pawlowszki pseudoisotrop homok felületét jellemző isotrop deviatióval, $tg\varphi$ -val. A deviatiónak Tiflisben ($tg 13^\circ,8$) körülbelül 14 nap, Pawlowszkban ($tg 19^\circ,6$) körülbelül 20 nap felel meg.

11. §. Az isotrop deviatio, mint klimatikus korrekció.

Az előzőekben tárgyaltak után általános érvényű klimatológiai következtetést tehetünk. Ugyanis említettük, hogy a talaj

felszínéhez közel fekvő légrétegnek hőmérséklete hasonló ingást mutat, mint a talaj felszínének hőmérséklete, úgy hogy a levegő hőmérsékletének szélső értékei körülbelül ugyanabban az időben jelentkeznek, mint a talaj felszínének hőmérsékleti szélső értékei.

Az északi félgömbön a talaj felszíne a legnagyobb meleget az évi periodusban június 21. és 22.-én, a napi periodusban pedig délben nyeri a Naptól. Ha már most a talajt isotropnak tekintjük, akkor e meleg hullámot a hőmérsékleti hullám csak $\frac{\pi}{4}$ -del fogja követni, vagyis az északi félgömbön az évi periodusban augusztus 4–5.-e körül, a napi periodusban pedig d. u. 3 óra-kor kellene a legmagasabb hőmérsékletnek lenni. A valóságban ez nincs így. Ugyanis a talaj felszíne pseudoisotrop, ennél fogva felső rétegeinek isotrop deviatiója z , minek következtében a meleg hullámot csak $\left(\frac{\pi}{4} - z\right)$ -vel fogja a hőmérsékleti hullám követni. Ha már most a tífisi és pawlowszki talajra elfogadjuk (megengedhető hibával) az előzőekben számított és a legfelső rétegre vonatkoztatott $z = tg\delta$ deviatiót a tífisi, illetve a pawlowszki talaj felső rétegének közepes deviatiója gyanánt, akkor a hőmérsékleti hullám a meleg hullámot Tiflisben $45 - 14 = 31$ nappal, Pawlowszkban pedig $45 - 20 = 25$ nappal fogja követni, vagyis az első esetben június 21.-től számítva július 22.-én, a második esetben július 14.-én. Az előző táblázat szerint a levegő hőmérséklete a talajfelszín hőmérsékletéhez képest Tiflisben 3, Pawlowszkban 4 nappal elkésik,¹ úgy hogy a valóságban legmelegebbnek kellene lenni Tiflisben július 25.-e körül, Pawlowszkban pedig július 18.-a körül. Ez a tényleges hőmérsékleti észlelésekből számított középértékeknek meg is felel. A januári hőmérsékleti minimumot hasonlóan kiszámíthatjuk, azonban tekintetbe kell venni a talajt borító hóréteg hatását is, mely gyakran jelentékenyen zavarja a szabályosságot.

A napi periodusban a tífisi meleg hullámot a hőmérsékleti hullám $\frac{\pi}{4} - z \doteq 2^h$ -val később követi, a pawlowszki talajban

¹ L. II. fejezet 8. §. táblázatait.

pedig $\frac{\pi}{4} - z \doteq 2^h$ -val, vagyis a tiflisi talajban nem egészen két órai, a pawlowszki talajban pedig két óránál valamivel több az az időköz, a melylyel a déli meleg hullám a hőmérsékleti hullámot megelőzi.

A deviatio fogalmából egészen általánosan azt is mondhatjuk, hogy valamely helyen a talaj legfelső rétegének közepes évi deviatiója arányosnak látszik az évi csapadékmennyiséggel és fordítva arányosnak a napsütés tartalmával. Ez természetesen a valóságot csak igen durván közelíti meg, de elégséges, hogy a két hely csapadékmennyiségére következtetést vonhassunk.

Ha már most a Magyar Alföld hőmérsékleti ingását az oroszországi viszonyokkal vonatkozásba hozzuk — a mi megengedhetőnek látszik, mert az Alföld nagy része homokos és évi csapadéka nem tér el lényegesen a két orosz állomás évi csapadékmennyiségétől —, akkor az Alföld legfelsőbb rétegének közepes évi deviatiója körülbelül 18° , ennél fogva az Alföld felett a levegő hőmérsékletének az évi átlagban $45 - 18 = 27$ nappal később, vagyis július 18.-a körül kell a maximálisnak lennie. Ez a valóságnak megfelelel.¹ A januári minimum azonban nem mutat szigorú egyezést a számított és észlelt adatokban, a mit a felület hóviszonyaiból számított hatásnak kell tulajdonítani.

Végül megjegyezzük, hogy az agrár meteorológiában a termőtalaj nedvességi állapotváltozása jelentékeny tényező gyanánt szerepel és a termőtalaj isotrop deviatiója szoros összefüggésben áll a talaj nedvességi állapotával.² Kíváncos volna az isotrop deviatiót is vonatkozásba hozni a növények fejlődésével.

¹ RÓNA Zs. «A hőmérséklet évi menete Magyarországon» (1900).

² H. PERROTIN: «Sur la météorologie agricole, quelques études agro-météorologiques.» *Annuaire de la Société Météorologique de France.* Avril 1913.

BIZONYOS, A FOURIER- ÉS LAPLACE-FÉLE SOROKKAL ÉRTELMEZETT KÖZÉPGÖRBÉKRŐL ÉS KÖZÉPFELÜLETEKRŐL.

FEJÉR LIPÓT 1. tagtól.

Bevezetés.

Fejtsük ki egy sík görbe $x = x(t)$, $y = y(t)$ koordinátáit a parameter szerint FOURIER-féle sorba, akkor e soroknak egy-ugyanahhoz az indexhez tartozó $x_n(t)$, $y_n(t)$ részletösszegei a megadott görbét approximáló $x = x_n(t)$, $y = y_n(t)$ görbéknek egy sorozatát szolgáltatják, melyeket a megadott görbe FOURIER-féle görbéinek akarok nevezni.

Az említett FOURIER-féle sorok részletösszegeinek (első rendű) arithmetikai közepei szintén az approximáló görbék egy sorozatát szolgáltatják. Ezeket a megadott görbe középgörbéinek nevezem.

Hasonlóképen egy, a térben parameter-ábrázolással megadott felülethez LAPLACE-féle és középfelületek tartoznak (ezek a koordináták LAPLACE-féle soraihoz tartozó másodrendű arithmetikai közepeknek felelnek meg).

Jelen dolgozat néhány eredményt tartalmaz, melyek főképen e görbék (ill. felületek) kölcsönös helyzetére vonatkoznak. Egyik főeredmény a következő: egy sík görbe középgörbéi (egészen függetlenül a választott parameter-ábrázolástól) mind abban a legkisebb konvex tartományban fekszenek, mely a sík görbét tartalmazza.

Hasonlóképen a középfelületek mind a térnek ama legkisebb konvex testébe esnek, mely azt a felületet tartalmazza, a melyhez a középfelületek tartoznak.

Tárgyalok még e munkámban, illetve csak érintek egyes alkalmazásokat is, és pedig a hatványsor középeire, gömbfüggvényekre, konvergencia-kérdésekre, és különösen az említett középalakzatokra vonatkozólag.

1. §. Sík- és térgörbe középgörbéi.

1. Legyen $f(t)$ a t valós változónak valós függvénye, mely a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban folytonos és 2π szerint periodikus. Legyen

$$a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos vt + b_v \sin vt) \quad (1)$$

$f(t)$ FOURIER-féle sora és

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vt + b_v \sin vt), \quad (2)$$

($n=0, 1, 2, \dots, \infty$).

Legyen $|f(t)| \leq L$ a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban (L nem-negatív állandót jelent). Akkor, mint ismeretes, a FOURIER-féle $s_n(t)$, ($n=0, 1, 2, \dots, \infty$; $0 \leq t \leq 2\pi$), approximáló polynomok sorozatának általában nem kell korláatosnak lennie. Defináltam ¹ pl. egy FOURIER-féle sort, (mely egy mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvényhez tartozik s) a melyre nézve a FOURIER-féle

$$s_0(t), s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t), \dots \quad (2)$$

közelítőgörbék minden $t = \frac{p}{q} \pi$ helyen (a hol $\frac{p}{q}$ tetszés szerinti pozitív racionális számot jelent, a mely ≤ 2), a mint az a legnagyobb egyszerűséggel szigorúan igazolható, a $-\infty$ és $+\infty$ határok között oscillálnak.

¹ L. pl. a következő munkámat: «Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues», Annales de l'École Normale etc., 1911. pag. 90, §. VII. Az itt közölt példa mégis némi módosításra szorul, ha azt akarjuk, hogy az $s_n(t)$ -k oscillációja a $\frac{p}{q} \pi$ helyeken $-\infty$ és $+\infty$ között történjék. E célból ugyanis a (44.) alatti sor egymásután következő «csoport»-jait *váltakozó előjellel* kell venni.

Az ilyen esetekben tehát a (2) közelítőgörbék összessége *mindenütt sűrűen* befedi a síknak azt a *végtelen sávját*, a melyet az ordinátatengelyvel párhuzamos s a $t=0$, $t=2\pi$ abszcissákhoz tartozó két egyenes határol.

2. A kép, melyet az $f(t)$ görbe és a FOURIER-féle

$$s_0(t), s_1(t), \dots, s_n(t), \dots$$

közelítőgörbék összessége mutat, lényegesen megváltozik, ha az $s_n(t)$ közelítőgörbék helyébe az \bar{o}

$$S_n(t) = \frac{s_0(t) + s_1(t) + \dots + s_n(t)}{n+1}, \quad (3)$$

$(n=0, 1, 2, \dots, \infty; 0 \leq t \leq 2\pi),$

arithmetikai közepeiket vesszük.

Ha ugyanis M jelenti a mindenütt folytonos (és 2π szerint periodikus) $f(t)$ függvény maximumát és m a minimumát, akkor *minden* $S_n(t)$ -re nézve:

$$m \leq S_n(t) \leq M, \quad (4)$$

és pedig, mint épen megjegyeztem, ha

$$n = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Azaz, az $S_n(t)$ görbék összessége egy derékszögű parallelogramban változik, melyet a $0, 2\pi$ abszcissák és az m, M ordináták határoznak meg.

Azonkívül

$$\lim_{n=\infty} S_n(t) = f(t), \quad (5)$$

és pedig egyenletesen a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban, a mi a képet még közelebből határozza meg.

Ha az $f(t)$ függvény csupán ama korlátozásnak van alávetve, hogy a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban *korlátos* és *integrálható* legyen, akkor a (4) egyenlőtlenség ismét érvényes. Ez esetben m és M az $f(t)$ függvény WEIERSTRASS-féle alsó, illetve felső határát jelenti, ha $0 \leq t \leq 2\pi$.

3. Tekintem most azt a C sík «görbét», melynek egyenletei

$$x = x(t), \quad (6)$$

$$y = y(t). \quad (7)$$

Itt $x(t)$ és $y(t)$ a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban a t valós változó tetszés szerinti valós, egyértékű, korlátos és integrálható függvényei.

Legyenek

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos vt + b_v \sin vt); \quad (8)$$

$$y(t) \sim c_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (c_v \cos vt + d_v \sin vt) \quad (9)$$

az $x(t)$ és $y(t)$ függvények FOURIER-féle sorai. Legyen a (8) sor n -edik részletösszege $x_n(t)$ és a (9) sor n -edik részletösszege $y_n(t)$. Az

$$x = x_n(t), \quad (10)$$

$$y = y_n(t), \quad (11)$$

$$(0 \leq t \leq 2\pi; n=0, 1, 2, \dots, \infty)$$

egyenletekkel meghatározott F_n görbékét a C görbe «FOURIER-féle görbéi»-nek nevezem. Az $F_0, F_1, \dots, F_n, \dots$ görbék nem abszolút görbék, melyeket a C síkgörbe egyértelműleg meghatározna; azonban meg lesznek egyértelműleg határozva, mihelyt a C görbére nézve egy határozott (6), (7) parameter-ábrázolást állapítottunk meg.

4. Képezem most az

$$X_n(t) = \frac{x_0(t) + x_1(t) + \dots + x_n(t)}{n+1}, \quad (12)$$

$$Y_n(t) = \frac{y_0(t) + y_1(t) + \dots + y_n(t)}{n+1}, \quad (13)$$

$$(0 \leq t \leq 2\pi; n=0, 1, 2, \dots, \infty)$$

arithmetikai közepeket. Az

$$x = X_n(t), \quad (14)$$

$$y = Y_n(t) \quad (15)$$

egyenletekkel jellemzett A_n görbét a C görbe n -edik közép-

görbéjének nevezem. Az $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ középgörbék természetesen szintén nem abszolút görbék; meg vannak azonban határozva, mihelyt a C görbére nézve egy határozott (6), (7) parameter-ábrázolást állapítottunk meg.

5. Egy C görbe FOURIER-féle görbéinek az összessége általában oly képet mutat, mint a mely hasonló az 1. pontban részletezett képhez.

A középgörbékre nézve azonban a következő figyelemreméltó tétel érvényes:

I. tétel. Legyen adva egy C síkgörbe az

$$x = x(t), \quad (16)$$

$$y = y(t) \quad (17)$$

egyenletek által, ahol $x(t)$ és $y(t)$ a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban a t valós változónak valós, egyértékű, korlátos, 2π szerint periodikus és integrálható függvényei. Akkor C összes

$$x = X_n(t), \quad (18)$$

$$y = Y_n(t), \quad (19)$$

$$(0 \leq t \leq 2\pi; n=0, 1, 2, \dots, \infty)$$

A_n középgörbéi ama K legkisebb konvex tartományban fekszenek, mely a C görbét tartalmazza. $X_n(t)$ ill. $Y_n(t)$ jelenti itt az $x(t)$ ill. $y(t)$ FOURIER-féle sorainak az n indexhez tartozó elsőrendű arithmetikai közepeit.

Másszóval: ha veszem t egy bizonyos értékének a FOURIER-féle görbéken rendre megfelelő $F_0(t), F_1(t), \dots, F_n(t)$ pontokat s ezek mindegyikét megterhelem egységnyi tömeggel, akkor e pontok súlypontja benne fekszik ama K legkisebb konvex tartományban, mely a C görbét tartalmazza.

A C görbét tartalmazó legkisebb konvex tartományra vonatkozólag a következőket jegyzem meg. C. CARATHÉODORY¹ defini-

¹ L. C. CARATHÉODORY: «Über den Variabilitätsbereich der Fourier-schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen» (Rend. di Palermo, Tomo XXXII. Anno 1911, pag. 192–217). Az 1. §. jön itt különösen tekintetbe, melynek címe: «Die kleinsten konvexen Bereiche, die eine abgeschlossene Punktmenge enthalten». A definíciót e paragrafus 7. pontja tartal-

ezioja szerint létezik egy egészen határozott K_1 legkisebb konvex tartomány, mely a megadott C ponthalmazt tartalmazza. Ez egyszerűen a sik ama pontjainak az összessége, a melyeken át korlátot fektetni nem lehet. (A korlát oly egyenes vonal, mely a sikot úgy osztja két félsíkra, hogy a megadott C ponthalmaz egészen beleesik eme félsíkok egyikének a belsejébe.) Ha a C ponthalmaz lezárt, az lesz K_1 is. Ha azonban C nem lezárt, akkor K_1 -nek sem kell lezártnak lenni. A következőkben K_1 sűrűsödési helyeit mindig hozzácsatolom a K_1 tartományhoz és K alatt mindig az ő sűrűsödési helyeivel lezárt ama legkisebb konvex tartományt értem, mely a C ponthalmazt tartalmazza. [Általában a következőkben, akkor is, ha térbeli ponthalmazokról van szó, a legkisebb konvex tartományt, mely egy ponthalmazt tartalmaz, sűrűsödési helyeivel kiegészítve képzelem.] Ha azt mondom, hogy egy pont « K -ban fekszik», ez alatt természetesen azt értem, hogy e pont egy pontja a lezárt K tartománynak.

Az I. tétel bizonyítása. Jelentse $\varphi_n(\theta)$ a következő n -edfokú cosinuspolynomot:

$$\begin{aligned}\varphi_n(\theta) &= \frac{1}{n+1} [(n+1) + n \cdot 2 \cos \theta + \dots + 2 \cos n \theta] = \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sin(n+1) \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right]^2.\end{aligned}\quad (20)$$

Akkor, mint ismeretes,

$$X_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\theta) \varphi_n(\theta - t) d\theta, \quad (21)$$

$$Y_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\theta) \varphi_n(\theta - t) d\theta, \quad (22)$$

($n=0, 1, 2, \dots, \infty$; $0 \leq t \leq 2\pi$).

mazza. E műben találhatók irodalmi adatok MINKOWSKI-nak a konvex tartományokra vonatkozó általános vizsgálataira nézve. Végül utalunk E. STEINITZ: «Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme» (Crelle Journal, Bd. 143, 1913) című munkájára, melyben e szerző (L. §. III. «konvexe Punktmengen») éppen a nem lezárt halmazok itt szereplő esetét tárgyalja kimerítően.

Azonban tekintettel a (20) egyenletre:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(\theta - t) d\theta = 1, \quad (23)$$

($n=0, 1, 2, \dots, \infty$; $0 \leq t \leq 2\pi$),

tehát

$$X_n(t) = \frac{\int_0^{2\pi} x(\theta) \varphi_n(\theta - t) d\theta}{\int_0^{2\pi} \varphi_n(\theta - t) d\theta}, \quad (24)$$

$$Y_n(t) = \frac{\int_0^{2\pi} y(\theta) \varphi_n(\theta - t) d\theta}{\int_0^{2\pi} \varphi_n(\theta - t) d\theta}, \quad (25)$$

($n=0, 1, 2, \dots, \infty$; $0 \leq t \leq 2\pi$).

A (24), (25) egyenletből azonban már következik az I. tétel, tekintettel egy (lényegileg) WEIERSTRASS-tól eredő tételre, a mely következőképen hangzik:

Ha $x(\theta)$, $y(\theta)$ és $\varphi(\theta)$ a θ valós változónak az $a \leq \theta \leq b$ intervallumban valós, korlátos és integrálható függvényei, ha továbbá $\varphi(\theta)$ ebben az intervallumban nem negatív s ha még

$$\int_a^b \varphi(\theta) d\theta \neq 0, \quad (26)$$

akkor az

$$X = \frac{\int_a^b x(\theta) \varphi(\theta) d\theta}{\int_a^b \varphi(\theta) d\theta}, \quad (27)$$

$$Y = \frac{\int_a^b y(\theta) \varphi(\theta) d\theta}{\int_a^b \varphi(\theta) d\theta} \quad (28)$$

koordináták által meghatározott pont ama k legkisebb konvex tartományban fekszik, mely az

$$x = x(\theta), \quad (29)$$

$$y = y(\theta) \quad (a \leq \theta \leq b) \quad (30)$$

egyenletek által definiált c görbét tartalmazza.

E WEIERSTRASS-féle tétel bizonyítása igen egyszerű. A fel-tétel szerint

$$\sum_{k=1}^{\nu} \varphi(\theta_k) \neq 0, \quad (31)$$

$$\theta_k = a + k \frac{b-a}{\nu} \\ (k=1, 2, \dots, \nu).$$

hacsak ν elegendő nagy. Az egészen határozott

$$\xi_{\nu} = \frac{\sum_{k=1}^{\nu} x(\theta_k) \varphi(\theta_k)}{\sum_{k=1}^{\nu} \varphi(\theta_k)}, \quad (32)$$

$$\eta_{\nu} = \frac{\sum_{k=1}^{\nu} y(\theta_k) \varphi(\theta_k)}{\sum_{k=1}^{\nu} \varphi(\theta_k)} \quad (33)$$

koordinátákkal bíró pont mindenestre beleesik a legkisebb kon-vex tartományba, mely a c görbe ν pontját tartalmazza. [Ez következik egyrészt abból, hogy $\varphi(\theta) \geq 0$, ha $a \leq \theta \leq b$, más-részt pedig a (ξ_{ν}, η_{ν}) pontnak a (32), (33) egyenlet alapján látható súlypont-jelentéséből. Az állítás természetesen igaz marad akkor is, ha e ν pont közül néhány, vagy mind egybeesik.]

Ebből következik azonban, hogy a (ξ_{ν}, η_{ν}) pont *a fortiori* benne van a k tartományban, mivel ez nem egyéb, mint a leg-kisebb konvex tartomány, mely a c görbe *minden* pontját tar-talmazza. Tehát (mivel k lezárt) a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \xi_{\nu} = X \quad (34)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta_{\nu} = Y \quad (35)$$

pont is a k tartományban fekszik.

Q. e. d.

WEIERSTRASS eme tételéből, mint már megjegyeztem, a (24), (25) formula alapján közvetlenül következik az I. tétel.

Ha az I. tételt az F_k FOURIER-féle görbére alkalmazom, a következő eredményt nyerem:

Ha A_i jelenti C -nek egy közép- és F_k egy FOURIER-féle görbét és $i \leq k$, akkor az A_i görbe benne fekszik ama legkisebb konvex tartományban, mely az F_k görbét tartalmazza.

Legyen speciálisan $i = k$, akkor a következő eredményt kapjuk:

Az A_n középgörbe benne fekszik ama legkisebb konvex tartományban, mely az F_n FOURIER-görbét tartalmazza.

Az I. tételt ki akarom itt még mondani egy mindenütt folytonos és zárt görbe esetére:

Legyen

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

egy sík görbe, a hol $x(t)$, $y(t)$ mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvényeket jelentenek. Akkor C összes

$$x = X_n(t),$$

$$y = Y_n(t),$$

A_n középgörbái benne vannak a C görbét tartalmazó K legkisebb konvex tartományban. Hozzátehetem továbbá, hogy az n -edik középgörbének $A_n(t)$ pontjai minden t -re nézve egyenletesen konvergálnak a C görbe $C(t)$ pontjaihoz, ha $\lim n = \infty$.¹

6. A C görbe egy « (α, β) ív»-e alatt az

$$x(t), y(t),$$

$$\alpha \leq t \leq \beta$$

pontok összességét értem. Egy ívre vonatkozólag a következő fontos tétel érvényes:

II. tétel. Legyen b a C -nek egy íve, mely a t parameter $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumának felel meg. Legyen K^ a legkisebb*

¹ Hogy $A_n(t)$ épen $C(t)$ -hez konvergál egyenletesen ($0 \leq t \leq 2\pi$), természetesen többet jelent, mint az, hogy, geometriailag, az A_n görbe egyenletesen konvergál a C görbéhez.

konvex tartomány, mely az $a - \varepsilon \leq t \leq \beta + \varepsilon$ intervallumhoz (ahol $\varepsilon > 0$) tartozó ívet tartalmazza és B egy tetszés szerinti, összefüggő, lezárt tartomány, a mely K^* -ot egészen magába zárja. Akkor az

$$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$$

középgörbéknek az $a \leq t \leq \beta$ intervallumhoz tartozó ívei egy bizonyos indextől kezdve mind a B tartományba esnek.

Bizonyítás: A $\beta - a \geq 2\pi$ esetre nézve a II. tételt már beigazoltuk. Feltételezhetjük e szerint, hogy $\beta - a < 2\pi$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető továbbá, hogy a szóban forgó ívek a

$$-a \leq t \leq +a \quad (36)$$

intervallumnak felelnek meg, a hol $0 \leq a < \pi$.

Legyen ε egy (tetszés szerinti kicsiny, de fix) pozitív szám, akképen, hogy

$$-\pi < -(a + \varepsilon) < a + \varepsilon < \pi. \quad (37)$$

Legyen K^* az a legkisebb konvex tartomány, mely a G görbének

$$-(a + \varepsilon) \leq t \leq a + \varepsilon \quad (38)$$

ívét tartalmazza.

Legyen B egy összefüggő, lezárt tartomány, melynek K^* egészen a belsejébe esik.

A (24), (25) formula szerint

$$X_n(t) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x(\theta) \varphi_n(\theta - t) d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\theta - t) d\theta}, \quad (39)$$

$$Y_n(t) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) \varphi_n(\theta - t) d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\theta - t) d\theta}. \quad (40)$$

Azaz

$$X_n(t) = \frac{\int_{-\pi}^{-(a+\varepsilon)} \dots + \int_{a+\varepsilon}^{\pi} \dots + \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon} x(\theta) \varphi_n(\theta-t) d\theta}{\int_{-\pi}^{-(a+\varepsilon)} \dots + \int_{a+\varepsilon}^{\pi} \dots + \int_{-(a+\varepsilon)}^{a+\varepsilon} \varphi_n(\theta-t) d\theta}, \quad (41)$$

$$Y_n(t) = \dots, \quad (42)$$

vagy

$$X_n(t) = \mu_n(t) + \frac{\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon} x(\theta) \varphi_n(\theta-t) d\theta}{\int_{-(a+\varepsilon)}^{a+\varepsilon} \varphi_n(\theta-t) d\theta} = \mu_n(t) + \varrho_n(t), \quad (43)$$

$$Y_n(t) = \nu_n(t) + \dots = \nu_n(t) + \sigma_n(t), \quad (44)$$

a hol, tekintettel a (20) egyenletre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(t) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(t) = 0,$$

és pedig *egyenletesen*, ha t változik a

$$-a \leq t \leq +a$$

intervallumban. Mivel továbbá a WEIERSTASS-féle tétel szerint a $\varrho_n(t)$, $\sigma_n(t)$ koordinátákkal bíró pont a K^* konvex tartományba esik. az

$$\begin{aligned} x &= X_n(t), \\ y &= Y_n(t), \\ -a &\leq t \leq +a \end{aligned}$$

ív csakugyan beletartozik a K^* -ot egészen magába záró B tartományba, ha csak n elegendő nagy.

Q. e. d.

A II. tétel a középgörbékre való átvitele egy tételnek, melyet HURWITZ «Über die Fourier-schen Konstanten integrierbarer Funktionen» (Math. Annalen, Bd. 57, pag. 433, Ungl. (19)) című munkájában a FOURIER-sor elsőrendű közepeire bizonyított be.

7. A középgörbék *konvergenziájával* nem akarok e dolgozatban részletesen foglalkozni. Csak megjegyzem, hogy a FOURIER-

sor közepeinek konvergenciájára vonatkozó tételek könnyen átvihetők a középgörbék konvergenciájára. Gyakran épen a II. tétel vezet könnyen célhoz. Pl. a következő esetben, a melyet röviden jelezni akarok:

Legyen a C görbe: $x = x(t)$, $y = y(t)$ mindenütt folytonos, ha $0 \leq t \leq 2\pi$, azonban *ne* legyen *zárt*. Legyenek végpontjai P és Q ; ezek koordinátái $x(0)$, $y(0)$, illetőleg $x(2\pi)$, $y(2\pi)$. Az A_n középgörbék természetesen mind zárt görbék. *Milyen görbéhez konvergálnak eme zárt A_n középgörbék, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$?* *A felelet: A C görbéhez plus a PQ egyenesvonaldarabhoz.* Ez következik pl. a folytonos függvény közepeinek egyenletes konvergenciájára vonatkozó tételemből, a II. tétel segítségével. Ez utóbbi alkalmazásakor (lényegében) az a tény érvényesül, hogy *a legkisebb konvex tartomány, mely a sík két megadott pontját tartalmazza, ama egyenesvonaldarab, mely e két pontot összekapcsolja.*

8. Ki akarom most emelni az I. tételnek egy érdekes speciális esetét.

III. tétel. Ha a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban folytonos és zárt C görbe:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t),\end{aligned}$$

maga egy konvex tartományt határol, akkor az

$$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$$

középgörbék mind a C -vel körülvevő konvex tartományba esnek.

9. Az I., II. stb. tételek közvetlenül átvihetők a p -dimensionális térnek egy

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots \quad x_p = x_p(t)$$

görbéjére.

Csak az I. tétel megfelelőjét fogom a 3-dimensionális tér egy görbéjére megfogalmazni:

IV. tétel. Legyen

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t)\end{aligned}$$

egy C térgörbe, a hol $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban a t valós változó valós, egyértékű, korlátos és integrálható függvényei. Akkor C -nek összes

$$\begin{aligned} x &= X_n(t), \\ y &= Y_n(t), \\ z &= Z_n(t), \\ (0 \leq t \leq 2\pi; \quad n=0, 1, 2, \dots, \infty) \end{aligned}$$

A_n középgörbái beleesnek ama legkisebb konvex K testbe, mely a C görbét tartalmazza. $X_n(t)$, $Y_n(t)$, $Z_n(t)$ jelentik rendre az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények FOURIER-sorainak n -edik arithmetikai közepét.

2. §. A komplex változó hatványsorának arithmetikai közepeiről.

10. Legyen

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (45)$$

a z komplex változónak egy hatványsora, mely konvergens, ha $|z| < 1$. Legyen

$$\begin{aligned} c_n &= a_n + ib_n, \\ (n=0, 1, 2, \dots, \infty), \\ z &= re^{it}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= u(r, t) + iv(r, t), \\ p_n(z) &= c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \end{aligned} \quad (46)$$

$$P_n(z) = \frac{p_0(z) + p_1(z) + \dots + p_n(z)}{n+1}, \quad (47)$$

$$s_n(r, t) = a_0 + \sum_{r=1}^n (a_r \cos rt - b_r \sin rt) r^r, \quad (48)$$

$$S_n(r, t) = \frac{s_0(r, t) + s_1(r, t) + \dots + s_n(r, t)}{n+1}, \quad (49)$$

$$\sigma_n(r, t) = b_0 + \sum_{r=1}^n (b_r \cos rt + a_r \sin rt) r^r, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_n(r, t) &= \frac{\sigma_0(r, t) + \sigma_1(r, t) + \dots + \sigma_n(r, t)}{n+1} \\ (n=0, 1, 2, \dots, \infty). \end{aligned} \quad (51)$$

Czél szerűnek bizonyult a p_n, s_n, σ_n részletösszegeken kívül a P_n, S_n, \sum_n arithmetikai közepek vizsgálata.¹ A következőkben az 1. §. eredményeit akarom a $P_n(z), S_n(r, t), \sum_n(r, t)$ arithmetikai közepekre alkalmazni.

11. Az 1. §. (4) egyenlőtlenségéből rögtön következik (egy egyszerű $\lim r = 1$ határátmenettel) az

V. tétel. A szükséges és elegendő feltétel arra nézve, hogy a (45) hatványsor valós része pozitív legyen, ha $r < 1$, az, hogy az összes

$$S_n(1, t) = \frac{(n+1)a_0 + n(a_1 \cos t - b_1 \sin t) + \dots + (a_n \cos nt - b_n \sin nt)}{n+1} \quad (52)$$

$(n=0, 1, 2, \dots, \infty)$

arithmetikai közepek a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban nem-negatívak legyenek. [Azaz, hogy az

$$a_0 + \sum (a_v \cos vt - b_v \sin vt) \quad (53)$$

trigonometrikus sornak (ez általában nem FOURIER-sor), melybe a (45) hatványsor valós komponense átmeny, ha $|z| = 1$, összes elsőrendű arithmetikai közepei nem-negatívak legyenek, t minden valós értéke mellett.]

Az

$$s_n(1, t) \geq 0, \\ (0 < t < 2\pi; \quad n=0, 1, 2, \dots, \infty)$$

¹ Már 1908-ban találtam összefüggéseket egyrészt

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots \\ (\text{konvergenciasugár} = 1)$$

$z < 1$ -re vonatkozó, másrészt a

$$P_n(z) = \frac{(n+1)c_0 + nc_1 z + \dots + c_n z^n}{n+1}$$

arithmetikai középnek $|z| \leq 1$ -re vonatkozó valós részének értékkészlete között. Az V. és VI. tételt már lényegileg ki is mondtam «A Laplace-féle sorokról» (Math. és Term. Értesítő, Budapest, XXVI. kötet, 1908) című munkámban (358–373. oldal). L. ugyancsak itt egyes alkalmazásokat LANDAU és CARATHÉODORY problémáira. E vizsgálatokra utalás történik «Über die Laplace-sche Reihe» (Math. Annalen, Bd. 67, 1909, lábjegyzet a 93. oldalon) című munkámban is.

feltétel arra nézve, hogy $u(r, t) > 0$, ($r < 1$), legyen, *ellegendő* ugyan, azonban, mint ismeretes, *épen nem szükséges*. Így az

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

sornak reális része $|z| < 1$ -re nézve pozitív (és $> \frac{1}{2}$). Mégis az

$$s_n(1, t) = 1 + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt, \\ (0 \leq t \leq 2\pi; \quad n=0, 1, 2, \dots \infty)$$

részletösszegek $-\infty$ és $+\infty$ között ingadoznak.

Az V. tételből rögtön következik az alábbi VI. tétel (melyet mindjárt a gömbfüggvényekre fogok alkalmazni):

VI. tétel. Legyen

$$f(z) = a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v z^v \quad (54)$$

valós együtthatós hatványsor, mely konvergens, ha $|z| < 1$. Ha most $f(z)$ valós része pozitív, midőn $|z| < 1$, akkor az összes

$$\frac{1}{n+1} [(n+1)a_0 + na_1 + \dots + a_n] \\ (n=0, 1, 2, \dots \infty) \quad (55)$$

közepek nem-negatívok.

E tételt (mely az V. tételben foglaltnak tekinthető) így is kimondhatom:

Ha az

$$f(z) = a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v z^v \quad (54) \\ (a_v \text{ valós; } v=0, 1, 2, \dots \infty)$$

hatványsor valós része pozitív, midőn $|z| < 1$, akkor

$$\frac{1}{(1-z)^2} f(z)$$

hatványsorának összes együtthatói nem-negatívok.

3. §. A VI. tétel alkalmazása a Legendre-polynomok

$$\sum_{v=0}^n P_v(\cos \gamma) \text{ összegére.}$$

12. «Über die Laplace-sche Reihe» (Math. Annalen, 1909, Bd. 67, pag. 76—109) című munkámban bizonyítottam, hogy

egy az egész egységgömbön értelmezett, egyértékű, korlátos és integrálható függvény LAPLACE-féle sorának *másodrendű* közepei *mind a kifejtett függvény felső és alsó határa között fekszenek.* [Ugyancsak ott bizonyítottam be azt is, hogy a *zérus-* és *elsőrendű* közepek e tulajdonsággal általában *nem* bírnak.] A LAPLACE-féle sor második közepeinek eme tulajdonságát lényegében a következő, a LEGENDRE-polynomokra vonatkozó figyelemreméltó tétel segítségével bizonyítottam be:

Az *első* $n+1$ LEGENDRE-polynom összege

$$P_0(\cos \gamma) + P_1(\cos \gamma) + \dots + P_n(\cos \gamma) \quad (56)$$

n minden értéke ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$) és minden valós γ érték mellett *nem-negatív.*

E tételt a LAPLACE-féle sorokról szóló munkámban a LEGENDRE-polynomokra vonatkozó MEHLER-féle integrál segítségével bizonyítottam be. Most meg akarom itt mutatni, hogy az (56) összegre vonatkozó tétel a VI. tételelemnek, és így a (4) egyenlőtlenségnek direkt következménye. Megjegyzem azonban, hogy e bizonyításnak nem azért tulajdonítok talán némi érdeket, mivel mellőzi a MEHLER-féle integrál fontos segédeszközét, hanem mert ez a bizonyítás mutatja, hogy a LAPLACE-féle sor másodrendű közepeinek a főtulajdonsága úgyszólván közvetlenül következik a FOURIER-féle sor elsőrendű közepeinek analog tulajdonságából.

Ismeretes hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda z+z^2}} = P_0(\cos \gamma) + P_1(\cos \gamma)z + \dots + P_n(\cos \gamma)z^n + \dots, \quad (57)$$

hol γ valós szám és $\lambda = \cos \gamma$; $P_n(\cos \gamma)$ jelenti az n -edik LEGENDRE-féle polynomot és z komplex változó. [A baloldal nevezőjében szereplő négyzetgyök $+1$ -re redukálódik, ha $z=0$.]

Be akarom bizonyítani, hogy

$$P_0(\cos \gamma) + P_1(\cos \gamma) + \dots + P_n(\cos \gamma) \geq 0,$$

azaz

$$\frac{1}{1-z} - \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda z+z^2}} \quad (58)$$

hatványsorának összes együtthatói nem-negatívak; vagy, a mi ugyanaz,

$$\frac{1}{(1-z)^2} \frac{1-z}{\sqrt{1-2\lambda z+z^2}} \quad (59)$$

hatványsorának összes együtthatói nem-negatívak. Ha tehát ki tudom mutatni, hogy

$$\frac{1-z}{\sqrt{1-2\lambda z+z^2}} \quad (60)$$

valós része pozitív, ha $|z| < 1$, akkor következik, például a VI. tétel második alakjából, hogy a $\sum_{v=0}^n P_v(\cos \gamma)$ összegek nem-negatívak.

Hogy a (60) függvény valós része pozitív, ha $|z| < 1$, többféleképen egyszerűen igazolható. Legelemibb módszer talán a következő:

Feltéve, hogy a (60) függvény valós része z -nek egy értékére nézve, mely abszolút értékben 1-nél kisebb, negatív volna, akkor léteznék olyan z , melynek abszolút értéke < 1 , és melyre nézve a valós rész értéke 0-sal volna egyenlő. (Ugyanis $z=0$ esetben (60) valós része $+1$.) Volna tehát egy oly z érték, hogy

$$\frac{1-z}{\sqrt{1-2\lambda z+z^2}} = ia, \quad (61)$$

$$|z| < 1, \quad (62)$$

ahol a valós szám. E z -nek szükségképen *kompleznek* kell lenni; mert valós z értékekre az

$$\frac{1-z}{\sqrt{1-2\lambda z+z^2}}$$

tört, (mivel $-1 \leq \lambda \leq +1$) valós és pozitív, ha $-1 < z < +1$.

z -nek eme (komplex) értékére nézve a (61)-ből négyzetre emeléssel a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{(1-z)^2}{1-2\lambda z+z^2} = -a^2,$$

azaz

$$(1+a^2)z^2 - 2(1+\lambda a^2)z + (1+a^2) = 0. \quad (63)$$

Jelölje \bar{z} a z konjugált értékét, akkor a valós együtthatójú (63) egyenletet \bar{z} is kielégíti. Tehát

$$z\bar{z} = \frac{1+a^2}{1+a^2} = 1,$$

azaz

$$|z|^2 = 1,$$

és így

$$|z| = 1,$$

a mi ellentmond a (62) egyenlőtlenségnek.

Tehát a (60) függvény valós része pozitív, ha $|z| < 1$, s ezzel a $\sum_{r=0}^n P_r (\cos \gamma)$ összegre vonatkozó tétel be van bizonyítva, és pedig pusztán a LEGENDRE-féle polynomok generatorfüggvényének és a VI. tételnek az igénybevételével (ez utóbbi pedig, mint már megjegyeztem, a (4) egyenlőtlenség direkt következménye).

13. A LAPLACE-féle sor *elsőrendű* arithmetikai közepei, mint már említettem, *nem* fekszenek általában a kifejtett függvény felső és alsó határa között. Mégis összességük korlátos, ha a függvény korlátos az egész gömbön (GRONWALL). De különösen érdekes az ezzel összefüggő ama tény, hogy a LAPLACE-féle sor *elsőrendű* közepei már a legfontosabb *konvergenciatalajdonságokkal* bírnak.

Nem szándékom e munkában a konvergenciakérdésekkel foglalkozni; a legfontosabb idevágó eredményt azonban, melyet T. H. GRONWALL «Über die Laplace-sche Reihe» (Math. Annalen Bd. 74, 1913, pag. 213—270) című szép munkájában közölt, ez alkalommal mégis megemlítem. GRONWALL eredménye így hangzik: Bármely, az egységsgömbön folytonos $f(\theta, \varphi)$ függvény LAPLACE-féle sorának *elsőrendű* közepei egyenletesen konvergálnak $f(\theta, \varphi)$ felé, ha $\lim n = \infty$.¹

¹ GRONWALL bizonyítását LUKÁCS FERENCZ egy pontban lényegesen egyszerűsítette. L. Comptes-Rendus etc., Tome 156, p. 632, Séance du 20 octobre, 1913.

4. §. A 2. §. folytatása. A komplex változó hatványsorának arithmetikai közepei.

14. Tekintek ismét egy tetszés szerinti

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (45)$$

hatványsort, mely konvergens, ha $|z| < 1$. Legyen ismét

$$p_0(z), p_1(z), \dots, p_n(z), \dots \quad (46)$$

a (45) sor részletösszegeinek és

$$P_0(z), P_1(z), \dots, P_n(z), \dots \quad (47)$$

ezek arithmetikai közepeinek sorozata.

Jelölje K^r a z -sík ama körét, melynek középpontja $z = 0$ és sugara $r < 1$.

Legyen továbbá C^r a w -sík ama zárt görbéje, mely a z -sík K^r körvonalának a $w = f(z)$ leképezés folytán megfelel. A C^r görbét röviden K^r *képének* nevezem. [Az

$$\begin{aligned} u &= u(r, t), \\ v &= v(r, t), \\ (0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

C^r képek általában természetesen *többszörös*, sőt *singularis* pontjai is vannak (a hol $u'^2 + v'^2 = 0$). Ha azonban $w = f(z)$ a z -síknek $|z| < 1$ tartományát *egyszerűen* leképezi a w -síkra, akkor az ilyen pontok ki vannak zárva. A zárt és regularis C^r képek ekkor ($0 \leq r < 1$) *egyszeresen* fedik be a w -sík szóbanforgó részét.]

Jelölje π_n^r a K^r -nek $w = p_n(z)$ által és Π_n^r a $w = P_n(z)$ által szolgáltatott képét.

Választok most r -nek egy fix értéket; s ennek megfelelőleg a felső r indexet mindenütt elhagyom.

Érvényes ekkor a következő tétel, mint az I. tétel következménye:

VII. tétel. Legyen

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

tetszés szerinti, $|z| < 1$ -re konvergens hatványsor és C a $|z| = r$ körnek megfelelő kép a w -síkban ($0 \leq r < 1$).

Legyen Π_n a $|z| = r$ körvonalnak ama képe a w -síkban, melyet a

$$w = \frac{(n+1)c_0 + nc_1z + \dots + c_nz^n}{n+1}$$

közép szolgáltat. Akkor az összes

$$\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_n, \dots$$

görbék benne vannak a w -sík ama legkisebb konvex tartományában, mely a C görbét tartalmazza.

Itt csak utalok azokra a speciális esetekre, melyek felmerülnek, ha a $|z| < 1$ tartománynak $w = f(z)$ által való leképezése egyszerű, vagy pedig midőn C egy kettőspont nélküli konvex görbe.

15. Alkalmazzuk most a VII. tételt a

$$c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$$

polynomra.

VIII. tétel. A Π_i görbe benne fekszik ama legkisebb konvex tartományban, mely π_k -t tartalmazza, ha

$$i \leq k, \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

Vegyük speciálisan $i = k$.

IX. tétel. Az n -edik középnek a képe, Π_n benne fekszik ama legkisebb konvex tartományban, mely az n -edik részletösszeg képét, π_n -et tartalmazza.

16. A π_n és Π_n görbék kölcsönös helyzetére és különösen a $|z| = r$ kör egyazon $z = re^{it}$ pontjának megfelelő $\pi_n(t)$ és $\Pi_n(t)$ pontok kölcsönös helyzetére nézve még egy általános tétel érvényes.

Mivel

$$p_n(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n, \\ P_n(z) = \frac{(n+1)c_0 + nc_1z + \dots + c_nz^n}{n+1},$$

tehát

$$P_n(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n - \frac{c_1z + 2c_2z^2 + \dots + nc_nz^n}{n+1},$$

azaz ¹

$$P_n(z) = p_n(z) - \frac{1}{n+1} z \frac{dp_n(z)}{dz}. \quad (64)$$

Ebből tüstént következik: a w -sík $P_n(z)$ pontja akkor és csak akkor esik egybe a w -sík $p_n(z)$ pontjával, ha a z helyen $\frac{dp_n(z)}{dz} = 0$, (vagy ha $z = 0$).

Legyen most is $z = re^{it}$ és jelölje $\lambda'(t)$ a t egy tetszés szerinti valós vagy komplex $\lambda(t)$ függvényének t szerinti deriváltját. Akkor

$$p'_n = p'_n(re^{it}) = \frac{dp_n(z)}{dz} ire^{it} = iz \frac{dp_n(z)}{dz}, \quad (65)$$

tehát

$$P_n(z) = p_n(z) + \frac{ip'_n}{n+1}, \quad (z=re^{it}). \quad (66)$$

Legyen most a $|z| = r$ körnek ($r \neq 0$) egy $z = re^{it}$ pontjára nézve $p'_n \neq 0$ (azaz $\frac{dp_n(z)}{dz} \neq 0$); akkor a (66) összefüggésből világos, hogy

$$\frac{P_n(z) - p_n(z)}{p'_n} = \frac{i}{n+1}$$

tiszta képzetes. Azaz a

$$P_n(z) - p_n(z) \quad (67)$$

vektor merőlegesen áll a

$$p'_n(t) = s'_n(t) + i\sigma'_n(t) \quad (68)$$

vektor irányára.

E szerint a következő tételt nyertem:

X. tétel. A H_n görbének $H_n(t)$ pontja a π_n görbének ama normálisán fekszik, mely az $\sigma_n(t)$ pontjához tartozik,

$$(n = 0, 1, 2, \dots, \infty; 0 \leq t \leq 2\pi).$$

A $\pi_n H_n$ egyenes vonalдарab nagysága:

$$\frac{r}{n+1} \left| \frac{dp_n(z)}{dz} \right|, \quad (z = re^{it}).$$

¹ z valós értékei mellett ezt az összefüggést már 1908-ban vizsgáltam.

17. A VII. tételből egyszerűen következik a

XI. tétel. Legyen a

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

hatványsor $|z| < 1$ -re nézve konvergens. Legyen K a w -sík ama legkisebb konvex tartománya, mely a $|z| < 1$ tartomálynak a $\{w = f(z)\}$ leképezés által szolgáltatott képét a w -síkban tartalmazza. Akkor az összes

$$H_n^* \\ n=0, 1, 2, \dots, \infty; \quad 0 \leq r < 1,$$

görbék beleesnek a K tartományba.

5. §. A térbeli középfelületek.

18. Legyen $x(\theta, \varphi)$, $y(\theta, \varphi)$, $z(\theta, \varphi)$ az egységgömb minden (θ, φ) pontján egyértékűen értelmezett három függvény. (Mint közönségesen, θ, φ jelöli az egységgömbön a pont sark-távolságát és földrajzi hosszúságát.) Legyenek ezek a θ, φ valós, az egész egységgömbön korlátos és integrálható függvényei. Az

$$\begin{aligned} x &= x(\theta, \varphi), \\ y &= y(\theta, \varphi), \\ z &= z(\theta, \varphi) \end{aligned} \tag{69}$$

egyenletek a 3-dimensionális térben egy F «felület»-et ábrázolnak.

Fejtsük ki e 3 függvény mindegyikét LAPLACE-féle sorba. Legyenek egyenként

$$\begin{aligned} x &= x_n(\theta, \varphi), \\ y &= y_n(\theta, \varphi), \\ z &= z_n(\theta, \varphi), \end{aligned} \tag{70}$$

($n=0, 1, 2, \dots, \infty$)

e LAPLACE-féle sorok n indexhez tartozó *részletösszegei*. Legyenek egyenként

$$\begin{aligned} x &= X_n(\theta, \varphi), \\ y &= Y_n(\theta, \varphi), \\ z &= Z_n(\theta, \varphi), \end{aligned} \tag{71}$$

($n=0, 1, 2, \dots, \infty$)

ugyane sorok n indexhez tartozó *másodrendű arithmetikai közepei*.

A (70) egyenletekkel jellemzett L_n , ($n = 0, 1, 2, \dots \infty$), felületeket a (69) *felület LAPLACE-féle felületeinek* nevezem.

A (71) egyenletek által jellemzett M_n , ($n = 0, 1, 2, \dots \infty$), felületeket a (69) *felület (másodrendű) középfelületeinek* nevezem.

Mindkét fajta felület függ az F felület számára választott (69) parameter-ábrázolástól.

Az M_n *középfelületek* térbeli helyzetére vonatkozólag ismét egy igen egyszerű és általános (az I. tételhez teljesen analog) tétel érvényes:

XII. tétel. Az F felület $M_0, M_1, \dots M_n, \dots$ középfelületei mind benne vannak a tér ama K legkisebb konvex testében, mely az F felületet tartalmazza.

E tétel következik egy, az egész egységgömbön korlátos és integrálható függvény LAPLACE-féle sorának második közepeire vonatkozó tételből, melyet e dolgozat 12. pontjában idéztem s s ott új módon bebizonyítottam.¹ A XII. tétel bizonyításához azonban még egy tételre van szükség, mely a WEIERSSTRASS-féle tétel (L. e. dolgozat 5. pontját) két dimensionális általánosításának tekinthető. Az M_n középfelületekre vonatkozó XII. tétel ekkor, épen úgy mint a középgörbékénél, lényegileg e tétel következményeként jelentkezik: a tér ν , tetszés szerinti *nem-negatív* tömegekkel megterhelt pontjának a súlypontja benne fekszik ama (geometriailag meghatározott) legkisebb konvex testben, mely a tömegpontokat tartalmazza. A bizonyítás részleteibe nem akarok itt bocsátkozni.

Hasonlóképen fogalmazhatók meg a többi, e dolgozat 5., 6., 7., 8. pontjában síkgörbékre kimondott és bebizonyított tételek analogonjai.

19. Végül még egy alkalmazását szeretném adni annak a tételnek, mely a középfelületekre nézve a II. tételnek felel meg.

Legyen l egy zárt, kettőspont nélküli (mondjuk analitikai) görbe az egységgömbön, mely ezt két részre, T_1 és T_2 -re osztja.

¹ L. még „Über die Laplace-sche Reihe“ (Math. Annalen, Bd. 67, 1909, pag. 76—109) című dolgozatomat.

Tegyük fel, hogy az $x(\theta, \varphi)$, $y(\theta, \varphi)$, $z(\theta, \varphi)$ függvények ezen az l görbén *ugrást* szenvednek. Ez alatt a következőt értem: Az $x(\theta, \varphi)$ függvény legyen a gömbnek T_1 tartományában, az l határt is beleértve, folytonos. Legyen a T_2 tartományban is, az l határ beleértésével, folytonos. Azonban $x(\theta, \varphi)$ határértékei, melyek az l vonalnak egyazon $l(s)$ pontjához tartoznak (s jelenti az l görbe mentén mért ívhosszat), legyenek különbözők, a szerint, a mint $l(s)$ -hez T_1 vagy T_2 pontjain át közeledem.

Az $y(\theta, \varphi)$ és $z(\theta, \varphi)$ függvények hasonló tulajdonságúak legyenek.

Például legyen

$$x = a_1 \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b_1 \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c_1 \cos \theta$$

a

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

felső félgömbön és

$$\begin{aligned} x &= a_2 \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= b_2 \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= c_2 \cos \theta \end{aligned}$$

a

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

alsó félgömbön, a hol

$$a_1 \neq a_2, \quad b_1 \neq b_2, \quad c_1 \neq c_2.$$

Az

$$\begin{aligned} x &= x(\theta, \varphi), \\ y &= y(\theta, \varphi), \\ z &= z(\theta, \varphi) \end{aligned} \tag{72}$$

egyenletek által jellemzett F felület ekkor két «darab»-ból, F_1 és F_2 -ből áll, melyeket a folytonos l_1 , l_2 vonalak határolnak.

E két görbe, l_1 és l_2 egyébként egymásra vonatkoztatható.

Megfelelő pontoknak nevezem l_1 és l_2 -n ama pontokat, melyek az l görbe ugyanazon $l(s)$ pontjának felelnek meg.

Kérdezem most: miféle határfelülethez konvergálnak a (72) egyenletekkel bíró F felület zárt M_n ($n = 0, 1, 2, \dots \infty$) középfelületei? Az eredmény: $F_1 + F_2 +$ *amaz egyenesvonalú felülethez, melyet nyerünk, ha az l_1 és l_2 görbék megfelelő pontjait egyenes vonaldarabokkal összekötjük.*

E tétel bizonyításában ismét azaz egyszerű tény játszik szerepet, hogy a legkisebb konvex tartomány, mely a tér két pontját tartalmazza, az őket összekötő egyenes vonaldarab.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 január 19.-én tartott üléséből.)

A VELENCZEI HEGYSÉG GEOLOGIAI ÉS PETROGRAFIAI VISZONYAI.

(A m. kir. földtani intézet évkönyve XXII. kötetében megjelenő e című
munka kivonata.)

VENDL ALADÁR-tól.

A *Velencei hegység*, a dunántúli Magyar Középhegység kristályos magva, tönkhegység, mely a középhegység csapásának irányában húzódik a Velencei-tó ÉNy-i partja mentén Pázmándtól Székesfehérvárig. A hegység geológiai viszonyait először Kováts Gyula tanulmányozta, kinek észleleteit Jókely Johann közölte.¹ Később is többen foglalkoztak e hegység geológiai és petrográfiai tanulmányozásával, de részletes kimerítő munka eddig nem jelent meg.

A Velencei hegység főtömege *biotitgránit*, mely a székesfehérvári Rác-hegytől északkeleti irányban húzódik Nadap, illetőleg Velence közséig. A Templomhegy s a tőle keletre lévő kvarczitok — mint később látni fogjuk — szintén összefüggnek a gránittal, a mennyiben gránitból képződtek. Ez a gránit-tömeg — épen a gránit struktúrája bizonyítja — nagy mélységben nagy nyomás és a magas hőmérséklet lassúcsökkenése közben merevedett meg. E közben a magma az őt körülvevő nála idősebb agyagpalás szedimentumokat metamorfózálta. Későbbi tektonikus mozgások révén került e gránittömeg a felszínre, hol a denudáló erők munkája a kontaktus-zónának túlnyomó részét elpusztította s a gránitot magát feltárta.

A kontaktus-palák megmaradt foszlányai a gránitra ráborulnak; nyilvánvaló tehát, hogy a gránitmagma — intru-

¹ Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt, 1860, XI, p. 5.

ziójakor — az öt körülvevő szedimentumokat *boltozatszerűen* felemelte. Közben a *csédrusfa-típus*¹ nyomai is kialakultak: azaz helyenként a gránit testéből újszerűen hatolt be a gránit magmája az egykori szedimentum rétegei közé, a mint a Meleg-hegy északi oldalán lévő feltárások s a Paskom-szőlőben lévő kis pala-foszlány még ma is mutatják. Ez a kifejlődés eredetileg sokkal gyakoribb lehetett; ma már az erősen denudált térszínen csak e nyomokban maradt meg.

A gránit a felszínen többnyire erősen elmállott, úgy hogy sajátosságai csak az újabb feltárásokban tanulmányozhatók. Közép-öregszemű gránit, melynek elegyrészei: rózsaszínű *ortoklász*, fehér *oligoklász*, *kvarcz*, *biotit*; ezekhez meg *apatit*, *zirkon* és *magnetit* járul. Másodlagos eredetű, alárendelten mutakozó elegyrész az *epidot*, mely a földpátok átalakulásából képződött s a *pírit*, mely a kőzetet helyenként, főleg a hasadékok mentén, valósággal infiltrálja. Szöveve hipidiomorf-szemcsés, néha azonban az ortoklász tetemes nagysága révén kissé a porfírosra emlékeztet. Osann-féle képlete: $s_{79.29} a_{10.1} c_{4.3} f_{5.6} n_{5.3}$. Az Osann-féle viszonzyszámok:² $SAIF = 25, 3, 2$; $AlC Alk = 16, 4, 10$; $Nk = 5.3$; $MC = 1.5$. Ezek alapján biotitgránitunk az *El Capitan Cal.* és a *Woodstock My.* biotitgránitjához áll legközelebb.

Helyenként — még pedig a kontaktus-palák közelében — a gránit szöveti kialakulása határozottan a porfíros struktúra felé hajlik. Azaz: az ortoklász és az oligoklász egyénei nagyok, mintegy porfíros kiválásként fordulnak elő az ortoklász, oligoklász, kvarcz, biotit elegyrészek apróbb egyénei között. Az ily kifejlődésű gránitban a bázisos alkotórészek jobban koncentráálódtak, mint egyebütt, a mi a biotit nagyobb mennyiségben való megjelenésében nyilvánul meg; ennél fogva a gránit itt valamivel sötétebb-szürkébb árnyalatú, mint máshol. Ez a nagyobb bázicizálás a kőzet kémiai elemzési adataiban is megnyilvánul. Így a Sukoró községi legelőn a Sukoró és Világos major közt lévő terület gránitjára vonatkozólag az Osann-féle képlet: $s_{76.37} a_{9.9}$

¹ WOLFF T.: Der Vulkanismus, I. Bd, I. Hälfte, Stuttgart, 1913, p. 222.

² OSANN A.: Petrochemische Untersuchungen I, Heidelberg, 1913.

$c_{4.2} f_{5.9} n_{5.8}$. Az előbbi értékekkel szemben feltűnik, hogy e kőzet acziditása jóval kisebb.

Itt tehát a gránit *kis fokú differenciálódása* ment végbe. A sukorói legelőt főként északról, de délkeletről is a kontaktuspala foszlányai szegélyezik; itt tehát a gránit aránylag közel volt az eredeti agyagpalához s itt végbement a ksfokú differenciálódás. Hasonlók a viszonyok a Vaskapuhegy Ny-i oldalán, az Antal-forrásnál, a Csalai malomnál, a Szűzvári malomnál, a Velencei szőlőkben is, hol a gránit mindenütt a kontaktus-palák közelében van feltárva. Az utóbbi helyeken azonban csak a mineralógiai összetételből vonható e következtetés, mert e helyeken a gránit erős mállottsága folytán analízisre nem alkalmas.

A Sukoró községtől K-re lévő «olasz» kőbányában a gránit miarolitos üregeiben ritkán ibolyaszínű *fluorithezaxederek* fordulnak elő. A fluorit megjelenése kétségtelen bizonyítéka a gránit kialakulását kísérő *pneumatolitos folyamatoknak*.

A gránitban itt-ott sötét, feketés színű, erősen biotitos *exogén zárványok* találhatók, melyek aprók, ritkán diónyi, kivételesen ökölnyi nagyságúak. A gránittól mindig élesen elválnak s bizonyos mértékig szögletesnek látszanak. Hasonló viszonyokat észlelt GOLDSCHMIDT V. H.¹ a krisztianiai kontaktus-zónában. A petrográfiai jellem alapján ezek a *kontaktus-zónából* a gránitba az intruzió alkalmával beleszakadt darabok, melyeket a gránit erősen metamorfozált s egy részüket *sztomolitokká* alakította át. A székesfehéri Szt. Donát-templom alatt lévő kőbányából s a sukorói legelő gránitjából előkerült zárvány teljesen sztomolitá alakult át. Ezek elegyrészei: *biotit, szpinell, korund, magnetit, plagioklász (andezin), ortoklász*, ritkán *kvarcz*; a székesfehérvári kőbányában talált zárványban még *szillimanit* is előfordul. E sztomolitos zárványok a gránitban zárványként fellépő sztomolit-kőzetekre — Erdmannsdörffer² szerint — jellemző hat típus közül a legutolsóval azonosak. Ezek szerint a

¹ GOLDSCHMIDT V. H.: Die Kontaktmetamorphose im Kristianiagebiet. Kristiania, 1911, p. 105—107.

² ERDMANNSDÖRFFER O. H.: Die Einschlüsse des Brockengranits, Jahrb. d. königl. Preussischen Geol. Landesanstalt, 1912, p. 311—380.

Velencei hegység gránitjának zárványai *mészben szegényebb bázisos agyagpalából* alakultak ki.

A *kontaktus-zóna* csak foszlányokban maradt meg a hegység északi és keleti részében. Petrográfiai szempontból e foszlányok a gránit típusos kontaktpalának bizonyulnak, melyek *termikus kontaktmetamorfózis*¹ révén képződtek mészben szegény bázisos agyagpalából. A metamorfózis legerősebb volt ott, hol az agyagpala a gránittal közvetlenül érintkezik. Így a Szűzvári malomtól D-re lévő kis árokban *andaluzitos sztomolitszerű*, részben leptinolitós, keskeny zóna képviseli a legerősebben átalakított kontaktkőzetet. A többi megmaradt kontaktus-palafoszlány csak a *csomós-foltos paláknak* megfelelő metamorfózist érte el. Néhol a csomók nagyok, makroszkoposan is jól észlelhetők (Vaskapuhegy, Meleghegy északi oldala, Velencei szőlők északi része), máshol a csomók oly aprók és egyenletesen szétosztottak, hogy a kőzet csomós pala jellege csak mikroszkoppal ismerhető fel (Kőrakás, részben a Velencei szőlők délkeleti része).

Egészben véve ez a *termikus kontaktmetamorfózis csak mérsékelt intenzitású volt* s nem ért el oly nagy fokot, mint az exogén zárványok esetében.

A balatonvidéki fillitek minden bizonynyal szorosan kapcsolatosak a Velencei hegység kontaktus-zónájával. Valószínű, hogy ugyanaz a gránitintruzió hozta azokat is és a Szabadbattyán és Polgárdi közt előforduló kristályos mészkövet is létre, mely a Velencei hegység kontaktus-paláit kialakította. Sem a Velencei hegység kontaktus-paláiban, sem a balatonvidéki fillites kőzetekben kővületek nincsenek. Lóczy² szerint e kőzetek régi, paleozoos korúak s talán még a legalsó karbont is képviselik. A *gránit* ennél természetesen fiatalabb, de — minthogy a gránit kialakulását követő porfiros kifejlődésű telérkőzetek görgetegjei a permii veres homokkő aljában lévő konglomerátumban fellépnek³ — a *permnél idősebb*.

¹ WOLFF: l. c. p. 240.

² LÓCZY L.: A Balaton környékének geológiai képződményei és ezeknek vidékek szerinti telepedése p. 18.

³ Lóczy L.: l. c. p. 17.

A gránitmagma lassú kihülése közben a gránittömegben hosszabb-rövidebb *DNy—ÉK* irányú hasadékok képződtek. A gránitmagma e hasadékokba újból behatolt s mint *gránitporfir* merevedett meg. Majd az újonnan képződött hasadékokat a már igen erősen differenciálódott magma főleg *diasiszt leukokrat*, alárendelten *diasiszt melanokrat*-telérek alakjában töltötte ki. Végül e hasadékok egy része a magmának legutolsó, legsavanyúbb hasadási termékeivel töltődött ki, melyek a *kvarczteléreket* eredményezték. Ez utóbbiak képződése már erős *pneumatolitos hatásokkal* járt karöltve, a mit a kvarcztelésekben itt-ott előforduló *fluorit*, *galenit*, *kalkopirit* bizonyít. E telérek a hegység nyugati részében általában vastagabbak, mint kelet felé. 15 m-nél nagyobb vastagságot azonban nem érnek el. A hasadékoknak megjelenése s magmával való kitöltődése egyidejűleg és gyorsan történt meg.

A diasiszt-telérek közül a leukokrat-telérek, még pedig az aplitok óriási számban jelennek meg a hegységben, úgy hogy vázlataimban mintegy kétszáz aplít-telért jegyeztem fel. A bázisos polus felé való differenciálódás termékei ezzel szemben elenyészők: összesen csak három melanokrat-telért észleltem. A leukokrat-telérek közül a pegmatit csak két ponton: a Máriakút mellett s a nadapi háromszögelési fixpont közelében volt megfigyelhető vékony, helyenként azonban 30—40 cm vastagságot is elérő, szabálytalanul lefutó, csomós telérekben.

Az aplitok néha igen vékony, csak néhány centiméter vastag telérekben fordulnak elő; a mi arra mutat, hogy *ez az igen savanyú aplitos magma ásványképzőkkel erősen telített* hidatopirogén-olvadék volt. A hol a lehülés elég lassú volt, ott az aplitok panidiomorf-szemcsésen, a hol a lehülés gyorsabb volt a környező gránit időközben előállt alacsonyabb temperaturája folytán, ott porfirosan alakultak ki. Az aplitok a kontaktuszónába is belerajzottak. (Kőrakás, Szűzvári malom.)

E telérek magánál a gránitnál valamennyien ellentállóbbak az atmoszferiliákkal szemben. Ezért a térszínből rendszeren mintegy tarajként kiemelkednek.

A *gránitporfirok* két típusba sorozhatók. Az egyik képviselőjük a Meleghegy csúcsától DNy-ra lévő telér vörhenyesszínű

kőzete. E kőzet alapanyaga holokristályos hipidiomorf-szemcsés, porfiroosan kivált lényeges elegyrészei: rózsaszínű *ortoklász*, szintelen *oligoklász*, dihexaederes *kvarcz*, *biotit*. Az Osann-féle képlet: $s_{77.02} a_{11.0} c_{2.4} f_{6.6} n_{6.0}$, az Osann-féle viszonzyszámok: $SA/F = 25, 3, 2$; $AlC/Alk = 16, 2.5, 11.5$; $Nk = 6$; $MC = 3.6$. Legközelebb áll a *Crazy Mts., Mont.* gránitporfirjához.

A másik típus a székesfehérvári városi kőfejtőben, a Szt. Donát-templom alatt feltárt kőzetben a legüdébb kifejlődésű. E világos szürkészínű kőzet alapanyaga hipidiomorf-szemcsés, helyenként azonban granofiros. Elegyrészei az előbbiével azonosak; akczzessoriumként pirit és ritkán gránát is előfordul e kőzetben. Az Osann-féle képlet: $s_{80.11} a_{14.5} c_{1.0} f_{4.5} n_{6.1}$, az Osann-féle viszonzyszámok: $SA/F = 26, 3, 1$; $AlC/Alk = 16; 1, 13$; $Nk = 6.1$, $MC = 3$. Ez értékek legjobban megegyeznek az *Ironton Mo.* gránitjának megfelelő számaival. E kőzet tehát jóval savanyúbb az előbbinél, a minek oka az, hogy alapanyagában sok a *kvarcz*. Az ebbe a típusba tartozó kőzetek magmájában e szerint részben már megindult a diasziszt leukokrat-telések felé való differenciálódás.

Az *aplitok* szövetük alapján két típusra különülnek szét: 1. a *panidiomorf-szemcsés* és 2. a *porfiroosan* kifejlődött *aplitok*. A két típust átmenetek kötik össze egymással.

Az első típus képviselője a székesfehérvári községi kőbányában — az országút D-i oldalán — feltárt *aplit*, melynek lényeges elegyrészei: *ortoklász*, *oligoklász*, *kvarcz* és igen alárendelten *biotit*. Az Osann-féle képlet: $s_{83.97} a_{18.2} c_{0.7} f_{1.0} n_{4.6}$; az Osann-féle viszonzyszámok: $SA/F = 27, 2.5, 0.5$; $AlC/Alk = 15.5, 0.5, 14$; $Nk = 4.6$; $MC = 0$. *Aplitunk* tehát legközelebb áll a *Nettie mine, Mont.-i* és a *Basse rocks, Mass.-i* *aplit*hez.

A második típus egyik szélső kifejlődésű kőzetét a nadapi háromszögelési fixpontnál lévő mintegy 0.75 cm vastag telér tárja fel legjobban. E kőzet *kvarczból* és *ortoklászból* álló *panidiomorf szemcsés* alapanyagában a *porfiroosan* kivált elegyrészek az *ortoklász*, *oligoklász* és *kvarcz*.

A második típus másik szélső képviselője az Ördöghegy déli részén és a Szt. Donát-templom alatt lévő kőbányában feltárt *aplit*. Mindkét kőzet alapanyaga bizonyos mértékben a

kvarczporfirokéra emlékeztet; ez az alapanyag eredetileg valószínűleg üveges szferulitok alakjában képződhetett ki, melyek későbbi átkristályosodás folytán kristályos szerkezetűvé alakultak át. Ebben a ma már egészben véve mikrofelziteshez hasonló alapanyagban a porfiros kiválások: ortoklász, oligoklász, kvarcz és igen alárendelten biotit. Az ördöghegyi aplit Osann-féle képlete: $s_{84.91} a_{16.7} c_{0.4} / f_{2.9} n_{4.10}$; Osann-féle viszonzyszámok: $SAIF = 27$, 2.5 , 0.5 ; $AIC/Alk = 17$, 0.5 , 12.5 ; $Nk = 4.1$; $MC = 0$. Tehát egyezik a panidiomorf-típusú kőzettel. A Szt. Donát alatti kőbánya aplitjának megfelelő értékei: $s_{84.63} a_{18.5} c_{0.8} / f_{0.7} n_{3.7}$; $SAIF = 27$, 2.5 , 0.5 ; $AIC/Alk = 16.5$, 0.5 , 13 ; $Nk = 3.7$; $MC = 1.7$.

A *melanokrát-telérek kerzantitok*, melyek biotitot, amfibolt, ortoklászt, savanyú plagioklászt — s alárendelten kvarczot is — tartalmaznak lényeges elegyrész gyanánt. Szövetük majdnem típusos panidiomorf-szemcsés. A Sárhegy csúcsától DK-re lévő legüdébb kőzetre vonatkozólag: $s_{67.13} a_{5.9} c_{5.5} / f_{8.6} n_{6.8}$; $SAIF = 21$, 4 , 5 ; $AIC/Alk = 15$, 7 , 8 ; $Nk = 6.8$; $MC = 3.7$. Ez értékek legközelebb állanak a *Wüstewaltersdorf*-i kerzantitóihoz, bár nem fedik egymást teljesen.

Analogiák alapján mondható, hogy a mediterrán időben intenzív vulkáni működés folyt le a Velencei hegységben: *andezitek* törtek föl a hegység K-i részében a gránitban képződött mélyreható repedéseken át. Az andezitek részben DNy—ÉK, részben — Nadap környékén — DK—ÉNy-i irányban csatlakoznak egymáshoz. Az összes andezit-előfordulások csak az egykori vulkáni csatorna maradványai. Kétségtelen, hogy ezek valamikor magasabbra felnyúltak és megfelelő effuzív formáik is megvoltak. Összesen kilencz andezitfoltot észleltem. Nyoleczat már INKEY¹ is leirt. Ez andezitek túlnyomó részben amfibolosak, csak két helyen tört fel piroxénandezit. Valamennyinek kémiai összetétele azonban igen közel áll egymáshoz, úgy hogy mind ugyanabból a magmareservoírból származhattak s a kis differenciák csak a magma feltolulásakor beállott differenciálódás ered-

¹ INKEY B.: A székesfehérvár—velencei hegység gránit- és trachyt-nemű kőzeteiről. Földtani Közöny, 1875, p. 145.

ményei. Az amfibolos andezitek legtöbbje igen alárendelten keves kvarczt is tartalmaz, acziditásuk azonban még sem éri el teljesen a dáczitekét. Rövidség kedvéért itt csak a megelemezett öt közet Osann-féle állandóit közlöm.

Amfibolandezit a Meleghegy csúcsától DK-re: $s_{65.76} a_{3.3} c_{5.9} f_{10.8} n_{7.98}$; $SAIF = 20.5$, 3, 6.5; $AlC Alk = 14$, 11, 5; $Nk = 7.9$; $MC = 3.9$. Legközelebb áll a *Downieville Cal.* és *Taujoeng Lok.* andezitjéhez.

A gróf Cziráky-féle kőbánya amfibolandezitja: $s_{66.59} a_{2.8} c_{6.1} f_{11.1} n_{8.1}$; $SAIF = 21$, 3, 6; $AlC Alk = 14$, 12, 4; $Nk = 8.1$; $MC = 4.6$. Legjobban megközelíti a *Mt. Shasta Cal.* amfibolandezitjét.

Amfibolandezit Sukorótól D-re az országút mellett: $s_{64.06} a_{3.2} c_{6.0} f_{10.8} n_{7.07}$; $SAIF = 20$, 3.5, 6.5; $AlC Alk = 14$, 11, 5; $Nk = 7.0$; $MC = 4.2$. E közet a *Sibajak, Sumatra* és *Si Nabun Sumatra* andezitjéhez áll legközelebb.

Biotit-amfibolandezit a Nadapról Sukoróra vivő út É-i oldalán: $s_{66.52} a_{4.5} c_{6.3} f_{9.2} n_{6.15}$; $SAIF = 21$, 4, 5; $AlC Alk = 14$, 10, 6; $Nk = 6.15$; $MC = 2.9$. A *Black Butte Nevada* andezitjét közelíti meg leginkább.

Piroxénandezit Nadap község kőbányájából: $s_{66.21} a_{4.4} c_{6.3} f_{9.3} n_{7.2}$; $SAIF = 21$, 4, 5; $AlC Alk = 15$, 9, 6; $Nk = 7.2$; $MC = 4.0$. E közet a *Burney Butte Cal.* piroxénandezitjéhez áll legközelebb.

Az andezitek feltörésével *intenzív posztvulkáni működések* jártak karöltve. Ezek a hatások részben magukat az andeziteket érték, részben az andezitek környékén a gránitot. A nadapi községi kőbánya piroxénandezitjének hasadékaiban megjelenő *protopneumatolitos ásványok* (ametiszt, fluorit, pirit, epistilbit, heulandit, chabazit, dezmin, kalcit),¹ továbbá a hasadékok mentén magában a kőzetben is megjelenő hematit s a kőzetnek a hasadékok

¹ SCHAFARZIK F.: Ásványtani Közlemények, Földtani Közlöny XXXVIII. p. 590—592.

MAURITZ B.: A nadapi zeolithek, Ann. Mus. Nationalis Hungarici VI. p. 537.

HUNEK E.: Két ásvány új hazai termőhelye, Földtani Közlöny, 1910, XL. p. 628.

mentén lévő zöldkőves módosulatú megváltozása: mind a posztvulkáni hatások eredménye. A gránit elkaolinosodása az andezitek közelében, továbbá a molibdenit előfordulása a gránitban szintén posztvulkáni működésekre utal.

A Cseplek, Csekélyhegy, Csúcsoshegy, Nyíreshegy, Templomhegy és a Meleghegy gerince *kvarczit*ből áll. E kvarczitok egyik része *alunitos*,¹ a többi alunitmentes. Az alunitos kvarczitok erősen porózusak s a porusokban ülnék az alunit lemezekéi, melyek *káli-nátron-alunitnak* bizonyultak, a melyben $K_2O : Na_2O = 2 : 1$. Az alunitos kvarczitok a gránitból képződtek az andezitek kitorésével együtt járó posztvulkáni, főként szolfatárás és hidrotermális hatásokra. Helyenként az alunitos kvarczitok között a gránit kaolinosan alakult át. Ezek a szolfatárás és fumarolás feltörések részint ÉNy—DK-i hasadékokon át jutottak fel (Csúcsoshegy gerince), részint lassan átjárták, impregnálták a gránitot. Helyenként a hidrotermális működések önállón jelentkeztek szolfatára-hatások nélkül — Meleghegy, Cseplek — s itt a kovasavas oldatok főként ÉNy—DK-i csapású hasadékokban alunitmentes telértesteket hoztak létre, melyek csupán kovasavból állanak. E kvarczitok is erősen porózusak, itt-ott nagyobb kvarczzemekkel. E kvarczit-telérek ritkán *gulenit*ot tartalmaznak (Sukorótól D-re), a mi szintén a posztvulkáni hatások bizonyítéka. A kovasavas oldatok magát a gránitot is átjárták a telérek közelében s elkvarcosították. Közvetlenül a telérek szélein a gránit túlnyomólag kaolinosan változott el. E kvarczitokat a régi irodalom szedimentumos eredetűeknek s devon-, illetőleg karbonkorúaknak vélte.

A telér vagy görgeteg alakjában előforduló *barit* szintén a posztvulkáni hatások bizonyítéka.

Az eruptív származású kőzetek után, mint fiatalabbakat, közvetlenül a *pannóniai (pontusi) emelet* üledékeit találjuk a felszínen. Noha ezek a pleisztocénban részben elhordattak, részben löszszel fedődtek be, kisebb-nagyobb foltokban sok helyütt megmaradtak a felszínen. Ez üledékeket csillámos homok képviseli,

¹ VENDL A.: A nadapi alunit. Math. és Termtud. Értesítő XXXI. 1913, p. 95—101.

mely helyenként homokkőszerűen összeálló. Gyakran limonitos csomók, rétegek, édesvízi mész vagy meszes konkrécziók fordulnak elő bennük. Helyenként agyagosak. E homokok kövületekben meddők. Analogiák alapján valószínűleg a magasabb szintekbe tartoznak. A pannóniai (pontusi) képződmények a hegységben 260 m magasságig felemelkednek.

A Velencei tó fúráspróbái bizonyossága szerint kisebb-nagyobb mélységben, a tó fenekétől számítva legfeljebb öt méter mélyen, a pannóniai (pontusi) homok, illetőleg homokkőrétegei fordulnak elő.

A környéken lévő kútak is arról tanuskodnak, hogy már csekély mélységben a pannóniai (pontusi) rétegek állanak szálban és hogy e képződmények tetemesen vastagok. A Börgönd-pusztán lévő két artézi kút fúrása alkalmával a fúró 180 m-ig pannóniai (pontusi), túlnyomó részben homokos rétegeken hatolt keresztül.

A lovasberényi községi artézi kút szelvénye szerint a 158 m. t. sz. f. lévő ponttól számítva 187-26 m mélységig a pannóniai (pontusi) rétegek fordulnak elő. Innen kezdve mind végig, 300 m-nél mélyebben *felső eocén*-rétegeket tárt fel a fúró, melyek mészkő, homokos mészkő, meszes márga s részben (legalul) agyag alakjában kifejlődtek. (*Nummulina striata*, D'ORB, *Orthophragmina dispansa* Low, *Orthophragmina* cfr. *aspera* GÜMB., *Ostrea* sp. (juv), *Batopora*?) A pannóniai (pontusi) rétegek itt kerekén 180 m vastagok.

A Velencei hegység pleisztocén képződményei: a kavics, a homok és a lösz.

Székesfehérvártól D-re és DNY-ra homok, kavics és kavicsos homok borítja a térszínt. A kavicsok gyakran kalciumkarbonátos kötőanyaggal konglomerátosan összecementezettek. Ezek a képződmények a Gája völgyéből lefolyó időszakos vizek hordalékai, illetőleg Székesfehérvár és Sárszentmihály között Lóczy¹ szerint parti tüzrások eredményei.

Kisvelence nyugati végének közelében a vékony lösztakaró alatt, továbbá a kápolnyásnyéki patak partján egy ponton feltárt sárgás-szürke, vékony kavicsréteges homokok is faunájuk

¹ Lóczy L.: l. c. p. 430.

alapján pleisztocénkorúak.¹ Az e homokokban lévő apró kavicsok között itt-ott rózsaszínű ortoklász fordul elő, a mi arra vall, hogy ezek a homokok a Velencei hegységből származó törmelékek, melyeket északnyugat felől a nagyobb esőzések alkalmával lefolyó vizek hordhattak össze.

A *lősz* a hegység középső magjának kivételével vékonyabb-vastagabb lepel alakjában borítja a térszint, mely alól kisebb-nagyobb foszlányokban a pannóniai (pontusi) lerakódások bújnak ki. Az uralkodó északnyugati és északi szél a hulló port magával ragadta s inkább a hegység déli részén, a szél árnyékában rakta le, mint az északon. Sőt a szél a pannóniai (pontus) homokok felszínét sem kimélte s a belőlük magával ragadott homokot helyenként a finom hulló porral keverten rakta le. Főként a hegység északi részében ily durván homokos a lősz, s lefelé, az alatta lévő pannóniai (pontusi) homokba fokozatosan, éles határ nélkül megy át. A völgyekben képződő lősz kialakulásában az eolikus hatásokon kívül fontos szerepű volt a lejtők-ről a völgyekbe lefolyó víz is. Ezek szerint a *hegyi* és a *völgyi* lőszet kell megkülönböztetnünk.

A szél munkája a holocénben is folytatódott s nem egy ponton hagyott nyomot a hegységben. Az uralkodó szél irányának megfelelően a szél hatása különösen a hegység északi részében érvényesült. A szél *csiszoló* munkája a Cseplek kvarcizit-szikláin hagyott erős nyomokat, *kifúvó* hatása pedig a Meleghegy csúcsától DNy-ra lévő gránitporfir-telér dombjain látható leginkább. E dombok északi, pontosabban északnyugati oldala meredek, a déli lankás.

A folyók homokot és agyagos homokot hordanak össze. A Velencei-tó partjának s a Lápos-völgy déli részének szívos, sárgás agyagjából fehér só virágozik ki, mely túlnyomó részben Na_2SO_4 -ból áll, melyhez igen kevés FeSO_4 , MgSO_4 és CaCO_3 járul. Ez a Velencei-tó vizének nagy glaubersó-tartalmára utal.

A Velencei hegység a dunántúli Magyar Középhegység

¹ Vendl A.: Jelentés a Fejér vármegyében végzett reambuláló felvételről, M. kir. Földtani Intézet 1912. évi jelentései, p. 155.

középmagját alkotta, mely egyúttal valószínűleg egy antiklinális magja is volt. Az antiklinális DK-i szárnya lesülyedt, az ÉNy-i szárny jó része ma is felszínen van (Vértess stb.). A Velencei hegységet is — mint a középhegység többi részét — törések szabályozzák. A törésvonalak nyomozása eruptív tömegeken belül többnyire csak feltevéseken alapszik. Magának a gránitnak a földpátjaiban itt-ott előforduló infiltrációszerű kvarczbetelepülések vagy a telérhasadékok képződésekor, vagy a későbbi tektonikus törések alkalmával keletkeztek. Már a telérhasadékok SW—NO iránya megszabta a hegység tektonikai főirányát. Ily irányú törésvonal húzódik végig a hegység DK-i lábánál a Velencei-tó partja mentén. Ugyancsak ily irányú törést tételezhetünk fel a hegység ÉNy-i szegélyén is, mely a lovasberényi mélyfúrás bizonyossága alapján minden valószínűség szerint eocén előtti. A hegység és környékének fővölgyei nagyjában mind ÉNy—DK-i irányúak. Ugyanily irányúak a posztvulkáni hatásokra előállott kvarczittelérek is. Nem lehetetlen, hogy e telérhasadékok s a velük teljesen párhuzamos árkok oly tektonikai irányokat jeleznek, melyek egy időben képződött törések eredményei. Ilyen ÉNy—DK-i irányú törésvonalat kell feltételeznünk a Cseplek K-i végén, a Czibulka-völgyben, Velenczétől Nadapon át Lovasberény felé, a Császárpatak völgyében. A Csekélyhegy, Csúcsoshegy esetleg szintén egy-egy rög. Végül a hegységet DNy felől a Mór—Székesfehérvár-i törés határolja.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 január 19.-én tartott üléséből.)

A PYROGALLOLCARBONSAV DEPSIDJEINEK SYNTHESISÉ.¹

MAUTHNER NÁNDOR-tól.

Előző vizsgálataimban ² a gallussavnak, paraoxybenzoësavnak, metaoxybenzoësavnak és protocatechusavnak a különböző phenolcarbonsavakkal való kondenzációjával foglalkoztam és kutatásaimnak más phenolcarbonsavakra való kiterjesztését is kilátásba helyeztem. A többi phenolcarbonsav közül különösen a pyrogallolcarbonsav érdemel különös figyelmet, mint a mely számos természetes anyagnak bomlásterméke és a melynek más phenolcarbonsavakkal való esterszerű kondenzációs termékei valószínűleg a természetben is előfordulnak. A pyrogallolcarbonsav depsidjeinek synthesisére kiindulási anyag gyanánt ennek a savnak általam több év előtt feltalált ³ chloridját választottam, a mely vegyületnek hajlandóságát kondenzációs termékeknek létesítésére tertiär bázisok jelenlétében már akkor kimutattam. A trimethylpyrogalloylchloridot alacsony hőmérsékleten lúgos közegben paraoxybenzoësavval kondenzálva nyerjük a trimethylpyrogalloylparaoxybenzoësavat. A trimethylpyrogalloyl-paraoxybenzoësavmethylestert a paraoxybenzoësavmethylesternek a trimethylpyrogalloylchloriddal való kondenzációja útján állítjuk elő. Metaoxybenzoësavból és ennek methylesterjéből, tri-

¹ A budapesti kir. m. tud.-egyetem II. chemiai intézetében készült dolgozat.

² Mathem. és Természettudományi Értesítő 29. köt. 727 (1911); ugyanott 30. kötet 458, (1912); ugyanott 31. köt. (1913); Journ. p. chem. [2] 84, (1911); ugyanott 85,308 (1912); ugyanott 87, 409 (1913).

³ Ber. 42, 188 (1909).

methylypyrogallolylchloriddal kondenzálva, egyrészt a trimethylypyrogallolylmetaoxybenzoësavat, másrészt pedig a trimethylypyrogallolyl-metaoxybenzoësavas methylestert létesíthetjük. Egész hasonló módon vanillinsavból és vanillinsavas methylesterből a trimethylypyrogallolylvanillinsavat és a trimethylypyrogallolyl-vanillinsavas methylestert nyertem. Szintúgy a már előzőleg kondenzációs reakcióknál alkalmazott 2-oxy-3 naphtoësavat is vizsgálataim körébe vontam. Ez esetben a kondenzációt hasonló módon létesíthetjük, mint előző munkámban,¹ tudniillik, tertiär bázisok alkalmazásával. Így a trimethylypyrogallolylchloridból és 2, 3-oxy-naphtoesavból benzolos oldatban dimethylanilin behatására a trimethylypyrogallolyl-2-oxy-3-naphtoesav képződik. Az esterszerűleg kapcsolódott phenolcarbonsavak synthesisére így a fentebbi eljárás igen bevált és hasonló összetételű természetes anyagok előállítására is sikerrel lesz alkalmazható.

KISÉRLETI RÉSZ.

2, 3, 4-trimethoxy-benzanilid.

Az e kísérletekhez szükséges trimethylypyrogallolcarbonsavat legelőször WILL W.² a pyrogallolcarbonsavmethylesterből és jodmethylyből állította elő, az e reakciónál előálló trimethylypyrogallolcarbonsavmethylester elszappanosítása útján. GRAEBE és SUTER³ e terméket egy kényelmesebb módszer szerint, még pedig pyrogallolcarbonsavnak dimethylsulfattal való kezelése által nyerték. Nagyobb mennyiségű trimethylypyrogallolcarbonsav előállítását hasonlóképen eszközöljük, mint azt a dimethyl- α -resorcilsav előállításánál⁴ előzőleg már ismertettem:

Egy literes jenai lombikban 60 gr natriumhydroxydot 300 cm³ vízben feloldunk, szobahőmérsékletre hűtjük le és 50 gr pyrogallolcarbonsavat adunk hozzá. Az újlag lehűtött oldathoz 50 cm³ dimethylsulfatot adunk és a jól elzárt lombi-

¹ Loc. cit.

² Ber. 21, 2024 (1888).

³ Ann. Chem. 340, 226.

⁴ Journ. p. ch. [2], 87, 403 (1913).

kot hideg vízzel való hűtés közben 15 perczig erősen összerázzuk, miközben a dugót többször kinyitjuk. Ezután újból 50 cm³ dimethylsulfatot adunk hozzá és a fentebbi módon 7 perczig rázzuk. A lombikot visszafolyó hűtőcsővel látjuk el és két óra hosszat forraljuk. A kis mennyiségben előálló ester elszappanosítására 10 gr natriumhydroxydot adunk az oldathoz és 2 óra hosszat főzzük. A teljes lehülés után a dimethylpyrogallolcarbonsavat híg sósavval kicsapjuk, porcellánszűrőn leszűrjük, vízzel jól kimossuk és végül agyagtányéron megszáritjuk. Hozadék 44 gr. Az így nyert terméket 36 gr natriumhydroxydból és 250 cm³ vízből készített oldatban feloldjuk és két részben 60 gr dimethylsulfatot adagolunk hozzá a fentebbi módon. Az æthersavat a kihült oldatból híg sósavval kicsapjuk, szűrjük és vízzel jól kimossuk. A savat további tisztítás céljából 20 gr natriumbicarbonat és 150 cm³ víz keverékében hevítés közben feloldjuk, az oldatot megsűrjük és a terméket sósavval újból kicsapjuk. A terméket előbb agyagtányéron, majd 100 C°-on szárítjuk ki. A hozadék 28 és 35 gr között volt.

A savnak chloridjává való átalakítását az előbb már megadott módon¹ eszközöltem. További jellemzése céljából még anilidjét állítottam elő.

2 gr trimethylpyrogalloylechloridot 20 cm³ ætherben oldunk és 1 gr anilinnak ætheres (10 cm³) oldatával elegyítjük. Az oldószernek elpárolgása után a maradékot vízzel elegyítjük, leszűrjük, előbb híg sósavval, majd vízzel jól kimossuk és agyagtányéron kiszáritjuk. Hozadék 1·6 gr. Ligroinból átkristályosítva szintelen tűkben válik ki, a melyek 103—104 C°-on olvadnak.

0·1570 gr anyag adott:

0·3844 gr CO₂-t, 0·0832 gr H₂O-t.

C₁₆M₁₇O₄N képlet alapján a számított értékek:

C = 66·89%, H = 5·97%, N = 4·87%.

A kísérletileg talált értékek:

C = 66·75%, H = 5·87%, N = 4·80%.

¹ F. MAUTHNER: Ber. 42, 188 (1909).

Trimethylpyrogalloyl-paraoxybenzoësav.

A trimethylpyrogalloylechlorid kondenzációját paraoxybenzoësavval igen jól eszközölhetjük lúgos közegben, ha alacsony hőmérsékleten végezzük a reakciót.

2·2 gr paraoxybenzoësavat feloldunk 1·4 gr natriumhydroxydból, 20 cm³ vízből és 15 cm³ acetonból készített oldatban és hűtőkeverék segítségével -10 C°-ra lehűtjük. Erős rázás közben 4·0 gr trimethylpyrogalloylechlorid acetonos (20 cm³) oldatát kis adagokban hét perc alatt hozzáadjuk. A reakcióelegyet 15 perczig állni hagyjuk, ezután pedig az oldatot 10 cm³ tömény sósav és 300 cm³ víz keverékébe öntjük, miközben a kondenzációs termék kiválik. A termék teljes leválasztása céljából egynehány órára jeges vízbe állítjuk, ezután leszűrjük, vízzel jól kimossuk és agyagtányéron megszárítjuk. Hozadék 1·6 gr. A további tisztítás céljából natriumbicarbonatoldatban feloldjuk, az oldatot szűrjük és híg sósavval a termeket újból kicsapjuk. Ezután a vegyületet híg acetonból átkristályosítjuk.

0·1470 gr anyag adott:

0·3311 gr CO₂-t, 0·0634 gr H₂O-t.

C₁₇H₁₆O₇ képlet alapján a számított értékek:

C = 61·44%, H = 4·82%.

Kísérletileg talált értékek:

C = 61·42%, H = 4·79%.

A kondenzációs termék színtelen tükben kristályosodik, a melyek 181—182 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik benzolban, acetonban és alkoholban. Ligroinban és petroleum-ætherben a vegyület majdnem oldhatatlan.

Trimethylpyrogalloyl-paraoxybenzoësavmethylester.

A kondenzációt a következőképen eszközöljük: 3·1 gr paraoxybenzoësavmethylestert feloldunk 0·9 natriumhydroxyd és 20 cm³ víz keverékében. Ezután 15 cm³ acetont elegyítünk

hozzá és -10°C -ra lehűtjük. Kis adagokban $4\cdot6$ gr trimethylpyrogallolylechlorid acetonos (25 cm^3) oldatát hét percz alatt hozzáöntjük, miközben a reakcióelegyet jól összerázzuk. Húszerpnyai állás után a folyadékot 300 cm^3 jeges vízbe öntjük és egynehány csepp natronlúgot adunk hozzá alkalikus kémhatásig. A reakciókeveréket egynehány óráni át jeges vízben állni hagyjuk, ezután szűrjük és vízzel jól kimossuk. Agyagtányéron jól megszáritjuk és higitott methylalkoholból átkristályosítjuk. Hoza-dék 15 gr .

$0\cdot1609\text{ gr}$ anyag adott:

$0\cdot3675\text{ gr CO}_2\text{-t}$, $0\cdot0779\text{ gr H}_2\text{O-t}$.

$\text{C}_{18}\text{H}_{18}\text{O}_7$ képlet alapján a számított értékek:

$\text{C} = 62\cdot42\%$, $\text{H} = 5\cdot20\%$.

Kisérlétilég talált értékek:

$\text{C} = 62\cdot27\%$, $\text{H} = 5\cdot37\%$.

A vegyület szintelen tükben kristályosodik, a melyek $129\text{—}130^{\circ}\text{C}$ -on olvadnak. A termék könnyen oldódik benzolban, alkoholban és acetonban. Ligroinban ez a depsid nehezen oldódik és petroleumætherben majdnem oldhatatlan.

Trimethylpyrogalloyl-metaoxybenzoësav.

$2\cdot2\text{ gr}$ metaoxybenzoësavat $1\cdot8\text{ gr}$ natriumhydroxyd, 20 cm^3 víz és 15 cm^3 aceton keverékében feloldunk. A hűtőkeverékben lehűtött oldathoz 7 percz alatt rázás közben $4\cdot1\text{ gr}$ trimethylpyrogallolylechlorid acetonos (20 cm^3) oldatát elegyítjük. A reakciókeveréket húszerpnyai állás után 10 cm^3 tömény sósav és 300 cm^3 víz keverékébe öntjük. Több óra hosszat jeges vízben állni hagyjuk, ezután szűrjük, vízzel jól kimossuk és híg natriumbicarbonatoldatban feloldjuk. A sósavval kicsapott anyagot agyagtányéron száritjuk és híg acetonból átkristályosítjuk. Hoza-dék $3\cdot3\text{ gr}$.

$0\cdot1544\text{ gr}$ anyag adott:

$0\cdot3469\text{ gr CO}_2\text{-t}$ és $0\cdot0679\text{ gr H}_2\text{O-t}$.

$C_{17}H_{18}O_7$ képlet alapján a számított értékek:

$$C = 61.44\%, \quad H = 4.81\%.$$

Kísérletileg talált értékek:

$$C = 61.26\%, \quad H = 4.88\%.$$

E kondenzációs termék szintelen tűkben kristályosodik, a melyek 145—146 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik benzolban, alkoholban, acetonban és chloroformban. A termék oldódik meleg ligroinban, ellenben petroleumætherben majdnem oldhatatlan.

Trimethylpyrogallöyl-metaoxybenzoësavmethylester.

2.1 gr metaoxybenzoësavmethylestert feloldunk 1.2 gr natriumhydroxydból, 20 cm³ vízből és 15 cm³ acetonból készített oldatban. Hűtőkeverék segélyével az oldatot erősen lehűtjük és rázás közben 3 gr trimethylpyrogallöylchlorid acetonos (25 cm³) oldatát lassacskán hozzáadagoljuk. A reakcióelegyet még egy negyed óráig állni hagyjuk, ezután 250 cm³ jeges vízbe öntjük és egynehány csepp nátronlúgot adunk hozzá. Egynehány órát jég között állni hagyjuk, a csapadékot leszűrjük, vízzel kimosuk és agyagtányéron megszáritjuk. Hig methylalkoholból átkristályosítva, szintelen tűket alkot, a melyek 80—81 C°-on olvadnak. Hozadék 1.8 gr.

0.1497 gr anyag adott:

$$0.3425 \text{ gr } CO_2\text{-t,}$$

$$0.0716 \text{ gr } HO_2\text{-t.}$$

$C_{18}H_{18}O_7$ képlet alapján a számított értékek:

$$C = 62.42\%, \quad H = 5.20\%.$$

Kísérletileg talált értékek:

$$C = 62.39\%, \quad H = 5.31\%.$$

A vegyület melegen könnyen oldódik benzolban, acetonban, alkoholban és ligroinban. Petroleumætherben a termék hidegen igen nehezen oldódik, könnyebben ellenben melegen.

Trimethylpyrogalloyl-vanillinsav.

2 gr vanillinsavat feloldunk 1·5 gr natriumhydroxydból, 20 cm³ vízből és 15 cm³ acetonból készített oldatban és hűtőkeverék segítségével lehűtjük. Ezután 3 gr trimethylpyrogalloylchlorid acetonos (20 cm³) oldatát lassacskán erős rázás közben hozzáadagoljuk. Miután a reakcióelegyet 25 percig állni hagyjuk, beöntjük 10 cm³ tömény sósav és 250 cm³ víz elegyébe és 2—3 óra hosszat jég között állni hagyjuk. A leszűrt és vízzel jól kimosott terméket híg natriumcarbonatoldatban feloldjuk, az oldatot megsűrjük és sósavval a terméket újból kicsapjuk. Híg acetonból átkristályosítva szintelen tüket alkot, a melyek 188—189 C°-on olvadnak. Hozadék 1·4 gr.

0·1664 gr anyag adott:

0·3624 gr CO₂-t, 0·0736 gr H₂O-t.

C₁₈H₁₈O₈ képlet alapján a számított értékek:

C = 59·70%, H = 5·00%.

Kísérletileg talált értékek:

C = 59·48%, H = 4·91%.

Ez a vegyület könnyen oldódik benzolban, acetonban, alkoholban és chloroformban. Ligroinban a termék melegen igen nehezen oldódik és petroleumætherben majdnem oldhatatlan.

Trimethylpyrogalloyl-vanillinsavmethylester.

2·3 gr vanillinsavmethylestert feloldunk 0·6 gr natriumhydroxyd, 20 cm³ víz és 7 cm³ aceton keverékében. Az oldatot hűtőkeverékben lehűtjük és 3 gr trimethylpyrogalloylchlorid acetonos (20 cm³) oldatával rázás közben elegyítjük. A reakciókeveréket 20 percig állni hagyjuk, ezután pedig 300 cm³ vízbe öntjük, natronlúggal gyengén lúgossá tesszük és egynehány órát jeges vízben állni hagyjuk. A leszűrt kristályokat agyagtányéron szárítjuk meg. Hozadék 1·5 gr. Híg methyllalkoholból

átkristályosítva, a termék szintelen tüket alkot, a melyek 97—98 C°-on olvadnak.

0.1561 gr anyag adott:

0.3472 gr CO_2 -t, 0.0745 gr H_2O -t.

$C_{19}H_{20}O_8$ képlet alapján a számított értékek:

$C = 60.63\%$, $H = 5.32\%$.

Kísérletileg talált értékek:

$C = 60.65\%$, $H = 5.30\%$.

Alkoholban, benzolban és acetonban a vegyület könnyen oldódik. Ligroinban a vegyület melegen könnyen oldódik. Petroleumæther a terméket melegen csak igen nehezen oldja.

Trimethylpyrogalloyl-2-oxy-3 naphtoesav.

A trimethylpyrogalloylechlorid kondenzációját 2-oxy-3-naphtoesavval igen jól eszközölhetjük egy tertiär bazis segélyével EINHORN¹ eljárása szerint:

Hevítés közben feloldunk 80 cm³ benzol és 25 gr dimethylanilin keverékében 2.3 gr oxynaphtoesavat és miután az oldatot újból lehűtjük szobahőmérsékletre, hozzáöntjük 2.8 gr trimethylpyrogalloylechlorid benzolos (30 cm³) oldatát. Miután a reakcióelegyet 5 óra hosszat állni hagyjuk, az oldatot előbb híg kénsavval többször, majd egyszer vízzel átrázzuk és a benzolos oldatot elkülönítjük. Körülbelül 20 cm³-re töményítjük az oldatot, miközben változatlan oxynaphtoesav válik ki, a melyet leszűrünk. Az anyalúghoz ligroint adunk, miáltal kristályosodás áll be. A kiváló terméket a szárítás után híg kaliumcarbonat-oldatban feloldjuk, a kevés változatlan anyagról leszűrünk és a szűrletet sósavval elegyítjük. A kristályokat szárítás után híg acetontól átkristályosítjuk.

0.1518 gr anyag adott:

0.3657 gr CO_2 -t, 0.0669 gr H_2O -t.

¹ Ann. 301, 7.

$C_{21}H_{18}O_7$ képlet alapján a számított értékek:

$$C = 65.97\%, \quad H = 4.71\%.$$

Kísérletileg talált értékek:

$$C = 65.69\%, \quad H = 4.89\%.$$

E vegyület szintelen tüket alkot, a melyek 167—168 C°-on olvadnak. A termék könnyen oldódik benzolban, alkoholban és acetonban. Ligroinban a vegyület melegen igen nehezen oldódik és petroleumætherben majdnem oldhatatlan.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 február 16.-án tartott üléséből.)

MAGYARORSZÁG MEDITERRÁN TÜSKÉSBŐRŰI.

VADÁSZ M. ELEMÉR-től.

(Kivonat.)

A gazdagságáról méltán híres magyarországi tengeri eredetű mediterrán fauna tüskésbőrűit eddig csak egyes előfordulási helyek faunájában vagy részlettanulmányokban ismertették. Az összefoglaló vizsgálatokból kitűnt, hogy ezek a részlettanulmányok még távolról sem tüntetik föl a magyar mediterrán tüskésbőrű-fauna gazdagságát. Eddig mindössze két teljes asteroidéát s elszórt vázrészeken kívül csak echinoideákat ismertünk, és pedig mintegy 50 fajt. Az ország különböző gyűjteményeiben fölhalmozott és újabb, saját gyűjtésekkel is kiegészített mintegy 3000 darabból álló anyag áttanulmányozása az echinodermaták minden osztályának kimutatására vezetett.

A crinoideák a legutóbbi idők gyűjtéseiből származnak. A közelmúltban LÖRENTHEY említett nálunk elsőízben crinoidea (-antedon) karizeket.¹ NOSZKY JENŐ késmárki tanár és saját együttes gyűjtéseinkből a nógrádmegyei Mátraverebély határába eső Meszestető homokos felső-mediterrán rétegeiből mintegy 70 *kehely* és igen sok *kar-* és *kacs-íz* került elő. Egyetlen kis *kehely* kivételével valamennyi az Antedonidæ- vagy Comatulidæ-családba tartozó, ma is élő *Antedon-* és *Actinometra-*nembe sorolható. A *kar-* és *kacsizék* közelebbi meghatározásra nem alkalmasak, csakis annyit lehet megállapítanunk, hogy több fajhoz tartoznak. A *kelyhek* a külső alak és a sugártáblák (radiáliák)

¹ Újabb adatok Budapest környéke harmadidőszaki üledékeinek geológiájához. (Math. és Természettud. Értesítő. XXIX. k.) 1911.

elrendeződése alapján szintén több fajra utalnak. A ma élő alakok rendszerezésében a hátközponti lemeznek nem nagy szerep jut, minthogy a főbb jellegeket a karok elágazása és a belső szervezeti sajátosságok adják. A fossilis alakokon ezek tanulmányozhatók nem lévén, a nagyság, alak, sugártáblák kifejlődése és a kacsok izesülési helyeinek elrendeződése, módja és száma adja az élőkénél kisebb értékű jellegeket. Ezek tekintetbevételével a magyar mediterránban hat alak volt megkülönböztethető, melyek közül kettő újnak bizonyult.

Míg az *Antedon*-nembe sorolható fossilis maradványok nemre biztosan azonosíthatók, addig a közeli rokon *Actinometra*-nemről ezt nem mondhatjuk minden esetben. Az élők osztályozása itt is szervezeti sajátosságok alapján történik, míg a kövesedő vázrészek különbségei kevésbé szembeötlők. A hátközponti lemez általában korongalakú s legtöbbször jóval kevesebb, csak egy körben álló kacsbenyomat van rajta. Ehhez a nemhez két, az eddig ismertekkel nem azonosítható új típus s egy változat sorolható.

A Comatulidæ-családba tartozó alakokon kívül még egy kicsiny «Pentacrinus»-típusú kehely is előkerült. Ez minden bizonnyal az *Isocrinus*-nembe tartozik, melynek eddig ismert egyetlen harmadidőszaki kehelymaradványa. Sajátságos, hogy míg eddig ebből a nemből csak nyéltagok kerültek ki, addig itt nyéltagoknak nyoma sem volt. Ez az *Isocrinus hungaricus* n. sp. néven leírt faj a Csendes-óceán ma élő *I. naresianus* CARP-el mutat legközelebbi vonatkozásokat. Irodalmi adataink vannak az *Isocrinus Gastaldii* MICH. sp. nyélizeinek hazai előfordulására is, az eredeti anyag hollétét azonban nem sikerült ki nyomozni.¹

Az *ophiuroidéák* kövesült maradványai nem tartoznak a gyakoribb jelenségek közé, különösen a harmadidőszaki üledékekben. Hozzájárul ritkaságuk növeléséhez ezeknek az üledékeknek lazasága is, mely nem alkalmas a maradványok jó megtartására. Az eddig ismert legjobb harmadidőszaki példány az

¹ NOELLI: Contribuzione allo studio dei crinoidi terziari del Piemonte. (Atti d. soc. ital. d. sc. nat. Milano. XXXIX.) 1900.

angol bartonrétegekből került ki, míg a többi irodalmi adat csak meghatározhatatlan maradványokra vonatkozik. Hazánkból az irodalomban KINKELIN említ Ophiurá-t a székelvföldi édesvízi(!) levantei rétegekből Árapatakról s a következőket írja róla:¹ «Ein wahres Rätsel in dieser kaum brackischen Schicht, ist eine Ophiure in vorzüglicher Erhaltung.» Sajnos, ennek a példánynak vizsgálatára nem volt módom, mivel KINKELIN-től LÖRENTHEY professor úr szíves közbenjárására azt a választ kaptuk, hogy időközben elveszett. Ilyen körülmények között a rejtély megoldásáról le kell mondanunk, csak annyit állapíthatunk meg, hogy a szóban forgó példány vagy nem Ophiura-, vagy pedig más rétegekből került ki.

Biztosan megállapítható Ophiura-maradványaink csak közelebről nem vizsgálható *kar-ízek* («csigolyák»), melyek elszórtan a mátraverebélyi homokos rétegek iszapolt anyagából elég nagy számban kerültek ki. Valamivel gyérebben sikerült még a kemenczei (Hont m.) mállott lajtmészke iszapolásából is kimutatni. Hasonlókorú maradványokat eddig csak Avignon mellől és a galicziai miocénből ismerünk. Az utóbbit először foraminifera gyanánt írták le.

Valamivel gazdagabban vannak képviselve az *Asteroidéák*. Alig van olyan litorális fáciesű mediterrán-üledékünk, melyben jelenlétük kimutatható nem volna. Sajnos azonban, csak a váz különböző elemei ezek, teljes vázak azonban a legnagyobb ritkságok közé tartoznak. Hazánkból több helyről vannak említve egyes vázrészek, táblák, teljes vázakat azonban csak HELLER írt le 1858-ban a sopronmegyei Szt.-Margit lajtmészke-rétegeiből.² Ehhez hasonló leletek a fiatal harmadidőszakból sem nálunk, sem külföldön azóta még nem kerültek elő. Ezek egyike a *Pentagonaster Mülleri* HELLER sp., eredetileg Goniaster-néven leírva, a budapesti egyetemi állattani intézet gyűjteményében volt, a honnan ENTZ GÉZA egyetemi tanár úr szíves volt a

¹ Bericht über die Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M. 1890. p. 103.

² Über neue fossile Stelleriden. (Sitz-Ber. d. k. Ak. d. Wiss. Wien. XXVIII.) 1858.

palaeontologiai gyűjteménynek átengedni, a másik példányt azonban a bécsi egyetem őslénytani intézetéből nem kaphattam meg tanulmányozásra s így HELLER megállapításaival kellett beérnem. Ez utóbbi *Astropecten Forbesi* néven van leírva.

A magányos vázelemek túlnyomólag *párkánytáblák*, ezenkívül azonban adambulakralis és kiegészítő elemek, valamint tüskék is vannak. Főlemlítésre méltó egy végső íz is, valamint az *Asterias*-ok vázelemeire emlékeztető keresztalakú mésztetecske is. Ezek a magányos vázelemek csak megközelítőleg vonatkoztathatók meghatározott nemekre, melyek közül anyagunkban leginkább az *Astropecten* és az *Asterias* jelenlétére utalhatunk.

A vizsgálatok végeredménye szerint a crinoideák és ophiuroidea-maradványok ismerete a magyarországi mediterránban egészen új. Ezek közül közelebbi összehasonlításra csak a crinoideák alkalmasak. Ezek között kilencz faj ismerhető föl, melyek közül öt egészen új. Az ismert fajok a franciaországi és az olaszországi mediterránban hasonló szintekben, részben azonban mélyebb rétegekben is (burdigalien) megvannak. Életmódjukat illetőleg a mai alakok szemmeltartásával sekélyvizieknek kell őket tartanunk, a mennyiben mindenütt bryozoumok, apró dentaliumok és vékonyabb héjú echinoideák társaságában találhatók. Inkább homokos fácieshez vannak kötve, bár ritkábban a lazább lajtamészkőből is kikerültek.

Igen érdekes eredményeket szolgáltatott az *echinoideák* tanulmányozása. A fölötte gazdag anyag egyes általánosabb biológiai jelenségek fölismerését is lehetővé tette. Ezek közül ki kell emelnünk azt az észlelést, mely az echinoideák tökéletlen *visszaszerző* képességére utal, a mennyiben az anyagban levő több sérült példány sebhelyei egyszerű behegedésen kívül semmi nemű kiegészülést sem mutatnak.¹

A fölismert echinoidea-fajok száma 125, ezek közül mintegy 35 újnak bizonyult. Ezek közül a szabályos alakok alárendelt szerepet visznek, az egész fauna 15%-át teszik 18 fajjal. Annál

¹ VADÁSZ: Regenerationserscheinungen an fossilen Echinoiden. (Centralblatt f. Min., Geol. u. Pal. Stuttgart. 1914.)

gazdagabban vannak képviselve az irreguláris alakok, melyeket 17 nembe lehetett sorolni. Ezek közül a Clypeaster-nem, mely a miocénben virágkorát élte, 50 fajjal vesz részt a faunában. Minthogy anyagunk túlnyomó része lajtamészköből, tehát part-szegélyi üledékből került ki, azért a Clypeasterek gyakorisága indokolt. A Clypeasterek után a Schizaster-nem következik 16 fajjal, majd az Echinolampas-nem 14 fajjal. A többi nem alárendeltebb szerepű, legföljebb a Scutella és a Fibularia játszik szerepet egyes alakjainak gyakoriságával.

Alig egy-két faj van, mely tömegesebb megjelenésűnek mondható, a legtöbb csak egy-két példányban gyűjthető.

★

A magyarországi mediterrán tüskésbőrű-fauna ezek alapján ezidőszerint összesen 136 fajt számlál. Ha tekintetbe vesszük, hogy néhány alak kivételével ezek kizárólag egy emelethől, a felső-mediterránból kerültek ki, akkor megállapíthatnánk, hogy ez a fauna az eddig ismertek között leggazdagabb. Gazdagságra legjobban megközelíti a szardíniai fauna 67 fajjal és az algieri 54 fajjal.

Időbeli eloszlását tekintve, a hazai tüskésbőrűek közül három faj került ki alsó-mediterránból, a többi felső-mediterrán-rétegekből. Az utóbbiak között hat olyan alak van, melyet eddig csak mélyebb szintekből ismertünk, amivel szemben mindössze két ma is élő alakunk van (*Fibularia pusilla* MÜLL sp. és *Dorocidaris papillata* LESKE sp.). Ezek szerint tehát a hazai mediterrán tüskésbőrű-fauna a rétegek korához elég szorosan csatlakozik, a legtöbb faj ugyanis kizárólag csak egy szintben fordul elő. A hosszabb életű fajok száma csak 33%-ot tesz ki. Az echinodermaták tehát általában jó szintjelző kövületek, a miből jellegeik gyors változására kell következtetnünk.

A kihalt fajokon kívül a nemek legnagyobb része is kihalt már, az élők pedig a mai Földközi (mediterrán) tengerből eltűntek. Az Európában élő nemek közül az *Antedon*-, *Pentagonaster*-, *Astropecten*-, *Cidaris*-, *Arbacia*-, *Centrostephanus*-, *Fibularia*-, *Schizaster*-, *Brissopsis*-, *Echinocardium*-nemek vannak meg faunánkban, de megvannak az azóta leginkább tropus-

subtropusi tájakra vándorolt *Prionechinus*-, *Psammechinus*-, *Clypeuster*-, *Echinolampas*- és *Muretia*-nemek is, ami miocén tengerünk subtropusi jellege mellett bizonyít. Egyes nemek délebbre vándorlását külön is ki lehetett mutatni.

A hasonlókorú ismert tüskésbőrű-faunák között legnagyobb megegyezést mutat a Rajna-medenczeivel és a szardíniaival.¹ Csak ezután következik a piemonti medence² és általában az olaszországi,³ míg a korzikai,⁴ maltai⁵ és algieri⁶ csak kevés azonos elemet mutat. Anglia⁷ hasonló faunájával lényegtelen megegyezés észlelhető, úgy hogy a magyarországi fauna egy északibb és egy délibb faunaterület között a Rajna-medenczét, a Szardínia- és Piemonti medenczét magában foglaló önálló faunaterületet alkot. Ezt a megállapítást a molluscum-fauna is igazolja.

Az eredmények itteni rövid vázolója után a részletes munka a Geologica Hungarica I. kötetének 2. füzetében jelenik meg.

¹ LAMBERT: Description des échinides des terrains miocéniques de la Sardaigne. (Mém. de la soc. paléont. Suisse. vol. XXXIV—XXXV.)

— Description des échinides des terrains néogènes du bassin du Rhône. (Mém. soc. pal. Suisse. vol. XXXVII—XXXIX.)

² AIRAGHI: Echinidi terziari del Piemonte e della Liguria. (Palaeontogr. italica. Vol. VII. 1901.)

³ STEFANINI: Echinidi del miocene medio del' Emilia. (Palaeontogr. italica. Vol. XIV—XV. 1908—09.)

⁴ COTTEAU: Échinides fossiles de la Corse. 1877.

⁵ WRIGHT: Fossil echinidae of Malta. (Quarterly Journal vol. 20. 1864.) — GREGORY: The Maltese fossil echinoidae etc. (Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh. XXXVI. 1892.) — STEFANINI: Echinidi miocenici di Malta. (Boll. dell. soc. geol. ital. XXVIII. 1908.)

⁶ POMEL: Paléontologie de l' Algérie. 2. fasc. 1. 2. Échinodermes. 1885—87.

⁷ FORBES: Monographs of the echinodermata of the british tertiaries. (Palaeontogr. soc. 1852.)

AZ ÁTÖRÖKLŐDŐ IDEGBAJOK KÓRSZÖVETANI JELLEMZÉSE.

SCHAFER KÁROLY 1. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Az átöröklődő idegbántalmak lényegi meghatározását klinikai tekintetben JENDRÁSSIK ERNŐ adta meg, megállapítván azt, hogy ezek a betegségek — bármily változatosak is és így szemre bármennyire elütők — egy közös alapon fejlődnek ki és ez az idegrendszer elfajulásos állapota. A veleszületett fogyatékos életerő az, a mely az idegrendszerre, ennek vagy egészére, vagy egy körülírt részére vonatkozván, ebben előrehaladó és feltartóztathatatlan megbetegedésre, degenerálásra vezet. JENDRÁSSIK szerint a tapasztalat bizonyítja, hogy az emberi testnek minden szövete elszenvedheti az elfajulást, de ugyan-csak tapasztalásszerű dolog, hogy ez az elfajulás egy-egy szövetnek csak bizonyos részeit éri, pl. az idegrendszerben csak bizonyos nyálábokat, az izomrendszerben csak egyes izomcsoportokat. Mielőtt még e degenerálások természetét ismerték volna, szokásban volt az egyes idegrendszeri részek elfajulásából előálló kórállapotokat önálló kórképeknek tekinteni; ezzel szemben JENDRÁSSIK utalt 1896-ban arra, hogy az önálló jellegűnek látszó átöröklődő bántalmak átmenetek révén mind elmosódottabbak lesznek, annyira, hogy az összes kórképek egy nagy egységes kórélettani fogalomba olvadnak egybe, a melynek JENDRÁSSIK a *heredodegeneratio* nevet adta.

Helyesen utal JENDRÁSSIK az átöröklődő elfajulás alapján

előálló állapotok két főféleségére. Lehetségesek mindenekelőtt bizonyos állandó, többé nem változó, a méhen belül kiképződő fejlődési rendellenességek, minők a nyúlajak, a többujjúság, a lúdtalp; vannak azután oly elváltozások, a melyek a méhen kívüli életben fejlődnek ki és ezek az ú. n. *elsődleges degenerálások*. Utóbbiakra nézve példa a végtagok merevgörcsös állapota, a családi látóidegsorvadás, a végtagok ataxiája, az elbutulás stb. Ez utóbbi állapotokra nézve JENDRÁSSIK annak a véleményének ad kifejezést, hogy ezekben a középponti idegrendszer meghatározott részei, szelvényei fogyatékos életerővel bírván, előáll az az eset, hogy e gyengült szelvények, bár győzik kezdetben a reájuk háramló munkát, de később a természetes fejlődésükben fennakadván, mindjobban elvesztik életképességüket s így elpusztulnak, degenerálnak.

Fellette érdekesnek látszik ennek a degenerálásnak anyagi, kór, szövettani mibenlétét meghatározni. De e kérdés megoldása elé jelentékeny nehézségek tornyosulnak. Sok esetben az átöröklődő elfajulás kórszövettani vizsgálata oly időben válik csak lehetőséggé, a midőn a lényegi folyamatnak már csakis végső fokát látjuk magunk előtt és így sejtelmünk sincs arról, hogy az eredeti kór-okozó folyamat milyen is volt? A kérdés megoldása szempontjából tehát szükség volna egy oly átöröklődő idegbajra, a mely egyrésztől klinikailag typus lévén, másrésztől a kórszövettani elváltozások szempontjából is olyan legyen, a mely a degenerálási folyamatot a maga valóságában, tisztaságában mutassa be. Ily bántalmat már évek során át tanulmányozok; ez a Tay-Sachs-féle családi vakságos idiotaság, a melyre vonatkozó vizsgálati eredményeimet még 1908-ban voltam szerencsés a M. T. Akadémiának JENDRÁSSIK tagtárs úr szívessege folytán bemutatni. Oly átöröklődő idegbaj ez, mely valósággal alapvető typusa az idegrendszer elfajulásának; ugyanis a szülők részéről itt nem szerepel lues vagy alkohol, hanem az egyszerű, legtisztább endogenezis; azután a bántalom a kora gyermekkorban jelentkező, más betegségek révén lehetséges gyengítése az idegrendszernek nem szerepel. Esményileg tiszta heredo-degeneratio esete a jelzett bántalom, a mely gyors, vágató lefolyásánál fogva a megfelelő kórszövettani elváltozásokat szinte

még virágzó állapotban nyújtja a vizsgálónak. És az anatómiai vizsgálatot nagyon megkönnyíti az a körülmény, hogy a degenerációs folyamat az egész idegrendszerre kiterjedvén, annak minden egyes idegsejtjében egyaránt fellelhető. Oly herodedegenerációs bántalom tehát a családi vakságos idiotaság, melynek felette élesen megrajzolt kórszövevénye van s így szinte eszményi módon teszi lehetővé e kérdésnek megoldását: *mi a herodedegeneratio anatómiai mibenléte?* A többi átöröklődő idegbaj közül egy sem kedvez a szóban forgó kérdés megoldásának annyira, mert a kórfolyamat hosszas fennállása révén az alapvető kórszövet-tani elváltozások a felismerhetlenségig módosulnak és oly végkifejlési elváltozások maradnak fenn, melyekből az eredeti elváltozásokra csak nehezen vagy egyáltalán nem lehet visszakövetkeztetni.

Semmiesetre sem feladata jelen értekezésemnek a családi vakságos idiotaságnak különleges kórszövet-tanával foglalkozni; czélom ez alkalommal egy általános természetű meghatározás, vagyis azoknak az általános érvényű tételeknek levezetése, a melyekben az idegrendszer herodedegenerációja kórszövet-tanilag kifejezésre jut. Az anatómiai vizsgálatnak három főkérdésre kell megfelelnie:

1. Mely részei a központi idegrendszernek betegedtek meg?
2. Miben nyilvánul a megbetegedés alakilag?
3. Vannak e megbetegedésnek különleges jellegző vonásai?

Az első kérdésre adott válasza a Tay-Sachs-féle bántalomnak a mily határozott, olyannyira érdekes és abban áll, hogy egyesegyedül ama szövet-elemeknek elváltozása mutatható ki, melyek a külső csiralevélnak származékai; ezek az idegsejtek, az idegrostok és az ezeket támasztó neuroglia. Ezzel szemben az idegrendszer alkotásában résztvevő kötőszövet és ennek, szóval a középső csiralevélnak leszármazottjai teljesen épek. Kétségtelen ez alapon, hogy a herodedegenerációs folyamat határozott *elektivitást* tanusít, mert bizonyos fejlődéstanilag egységes szövet-elemeket mintegy kiválaszt, másokat ellenben megkímél. A kóros folyamatnak ez a választékos magatartása ilyképen lenne kifejezhető: *Az átöröklődő idegbántalmak anatómiailag ez ekto-*

dermális típusban folynak le. E tétel tehát azt fejezi ki, hogy egyedül a működő idegelemek, esetleg a glia bántalmazottsága szerepel; kötőszövetes elváltozások, gyulladásos, szóval *a mesodermál típusnak megfelelő jelenségek teljességgel hiányzanak.*

De megfigyeléseink tovább is vezetnek, mert éppen a családi vakságos idiotaságban szinte szembeszökő körülmény, hogy az idegelemek közül az *idegsejtek* azok, a melyek az elfajulásos folyamatot elszenvedni kénytelenek, a mivel szemben az idegrostos elemek szinte duzzadni látszanak az épségtől. És ha szem előtt tartjuk azt az általános idegszerkezeti tételt, a mely szerint az idegrendszer idegsejtből és idegrostból álló anatómiai egységekből, az ú. n. neuronokból áll, akkor ki kell emelnem azt a tényt, hogy a családi vakságos idiotaság oly heredodegeneratio, a mely a neuronnak gangliocellulás részét támadja meg. Ezzel szemben az idegrendszernek egy másik igen érdekes heredodegeneratiója, a MERZBACHER-féle *aplusia axialis*, a neuronnak *csakis* idegrostos részét illeti és idegsejtes részét szabadon hagyja, tehát fordítva viselkedik, mint a családi vakságos idiotaság. Azt lehet tehát mondani, hogy a heredodegeneratio egyik esetben a neuronnak sejtes, másik esetben fonalas részére szorítkozik; van azután eset, mint pl. a Tay-Sachs-féle bántalomban a kisagyban, hogy úgy a gangliocellulás, valamint az axialis része a neuronnak egyformán beteg. E szerint mint általános jelenség megállapítható, hogy a neuronnak heredodegeneratiós bántalma három főalakban nyilvánulhat meg, ezek: 1. *a gangliocellulás*; 2. *az axialis* és 3. *a neuronalis forma*. Végül lehetséges oly heredodegeneratio, melynek elektivitása a *neuroglia* elsődleges megtámadtatásában nyilvánul meg anatómiailag (MERZBACHER); ez alapon az ú. n. *sklerozisos folyamatok* állanak elő, a melyek tehát a *neurogliás formát* képviselnék. Ezek szerint tehát a heredodegeneratiónak megfelelő elektív bántalomfokozást mutat oly értelemben, hogy a bántalmazott ektodermális szövetnek csakis egy bizonyos részét, tehát vagy az idegsejteket, vagy az idegrostokat illeti. E magatartás valójában netovábbja ama választékosságnak, a melynek jegyében a heredodegeneratio anatómiája áll.

Egy lépéssel előbbre jutunk eddigi megállapításainkhoz képest, hogyha második főkérdésképpen azt vizsgáljuk, hogy a bántalmazott neuronrészben miben nyilvánul meg a betegség? E fontos kérdésre is a családi vakságos idiotaság adott igen tiszta feleletet. Itt ugyanis hatalmasan megduzzadt idegsejtek láthatók, a melyekben a duzzadás csakis olyképen képzelhető el, hogy az idegsejtnak hig-folyósnak feltételezett alapállománya, a hyaloplazma, kórosan megnövekedett, akár az által, hogy folyadékfelvétel által terjedelmében megnagyobbodott, akár az által, hogy kóros elfajulási termékek halmozódtak fel, mely utóbbi mód a sejt testének avagy nyujtványainak többnyire helyi kidudorodásait, gömbszerű felfuvódásait eredményezi. A hyaloplazmának eme alapvető, lényegi és elsődleges bántalmával szemben feltűnő, hogy az idegingerület vezetését végző neurofibrillák szinte érintetlenek maradnak, épűgy — legalább kezdetben — a sejttest chromatikuss állománya, a Nissl-féle szemcsék, jobban mondva rögök, a melyek csak később, másodlagosan betegszenek meg. A neurofibrillák csupán passiv vesznek részt a folyamatban, mi alatt az értendő, hogy a duzzadás folytán széttolódnak, hol kifeszűlnek, hol meglazulva kanyargósak lesznek. A Nissl-féle rögök viselkedéséről részletesebben még szólni fogok. *Összefoglalva tehát, azt mondhatjuk második tételként, hogy a neuronnak alkotó elemei: a szerkezetnélküli hyaloplazma, a neurofibrillák és a Nissl-rögök közül csupán a hyaloplazma az elsődlegesen megtámadott rész. A hyaloplazma bántalma a duzzadás formájában indul meg,* és oly rohamosan lezajló heredodegeneratióban, minő a családi vakságos idiotaságnak Tay-Sachs-féle alakja, a halálíg fennáll; lassú lefolyású heredodegeneratio esetén a duzzadás fokozatosan visszafejlődve, végűl az idegsejtnak sorvadására is vezethet, a mi a hyaloplazmának rendellenes megfogyatkozásából magyarázandó. Tehát a hyaloplazma kezdeti túltengése idővel sorvadásba mehet át. Ily hyaloplazmás sorvadást tételezek fel a MERZBACHER-féle heredodegeneratióban (itt az idegrostos elemekben) és a dystrophia muscularisban (itt a gerinczvelő elűső szarvainak mozgató ideg sejtjeiben).

A heredodegeneratio kórszövettani lényegét a hyaloplazma

duzzadásában megtalálván, felvetődik a harmadik főkérdés, vajjon e folyamat bir-e sajátlagos ismertetőjegyekkel? Mert rá kell utalnunk arra, hogy az idegsejt duzzadása oly kórszövettani jelenség, a mely nem csupán az endogenezis jegyében álló heredodegeneratióban, hanem külső, kísérletes behatásokra, minők a neuron idegrostos részének sértése (a tengelyfonál át-, kimetszése, kitépése), valamint az agy- és gerinczvelőnek különböző kóros folyamataiban is előfordul. E szerint előállhat az idegsejtduzzadás külső, exogén behatásokra és belső, endogén okokból (milyen a heredodegeneratio) és így jogosult a fenti kérdésünk, vajjon a két, különböző rendű, de alakilag azonosnak látszó folyamat teljesen megegyező-e, avagy találhatók-e oly kritériumok, melyek révén az endogén és exogén sejtduzzadást elkülöníthetjük? E kérdés megvilágítására a kísérletes tengelyfonálsértés mint exogén, a heredodegeneratio mint endogén természetű előidézője az idegsejt duzzadásának igen alkalmas leendő és vessük össze e czélból az egyik és a másik módon előállott sejtképeket. E szembeállítás eredménye a következő:

1. Az *exogén idegsejtduzzadásnál* csakis a szorosan vett sejttest duzzad meg, míg a dendrit-nyujtványok vagy teljesen mentesek maradnak, avagy legfeljebb elmosódva, egészükben nagyobbodnak meg. Ezzel szemben az *endogén sejtduzzadásnál* az idegsejttesten kívül még a dendritek is szabályszerűen vesznek részt a folyamatban és pedig jellegzetes módon, a mennyiben helyenként ballonszerű és rendkívül erős megduzzadást mutatnak. E helyi gömbszerű felfuvódását a dendriteknek eddig, tudtommal, csakis a heredodegeneratióban észlelték.

2. Az *exogén duzzadásnál* a duzzadt sejttest közepe felvilágosodik, chromatikus állományát elvesztvén, a mivel szemben áll az, hogy a sejttest környéki, széli részei a Nissl-féle rögöket megtartják. Az *endogén duzzadásnál* éppen fordítva van, mert a Nissl-rögök a sejttest középponti részében többé-kevésbé éppen láthatók, míg annak széli részén teljesen hiányzanak.

3. A Nissl-rögök bántalma az *exogén duzzadásnál* olyképen folyik le, hogy az egyes rögök mind finomabb szemecskékre hul-

lanak szét, mi által bekövetkezik e rögöknek ú. n. szétporzása. Ezzel szemben az *endogén sejtduzzadásnál* a jelzett szétporzásból mit sem lehet látni, mert itt csak előrehaladó megkisebbedését, sorvadását lehet látni az egyes rögöknek, mi által végül eltűnnek.

4. Jellegzetes magatartása van a magnak; *exogén duzzadásnál* a mag széli elhelyezkedésű, duzzadt és világos, míg *endogén duzzadásnál* többnyire középponti, avagy közel középponti fekvésű és e mellett megkisebbedett és sötétesen színezett.

Látni való a fenti egybevetésből, hogy az endogén eredésű idegsejtduzzadás épen ellentétes képe az exogén természetű sejtduzzadásnak s így vizsgálódásaim *harmadik tételeként* azt kell mondanom, hogy az *endogén sejtbántalom különlegesen van jellegezve*.

Mindezek után az átöröklődő idegbajok anatómiai körülhatárolását a következő tételekben adnám:

1. E betegségek az idegszövetnek elektív megbetegedése alapján jönnek létre, tehát az ektodermális typust követik s így a *herododegeneratio csiralevel-bántalom*.

2. Az *elektív bántalom a hyaloplazmára vonatkozik*, mely kórosan megduzzad. A neurofibrillák épek maradnak, szintűgy kezdetben a Nissl-rögök.

3. A *hyaloplazma megnagyobbodása a herododegenerációban sajátos, jellegzetes formában nyilvánul meg*, mi által élesen elüt a más természetű idegsejtduzzadástól.

E tételek általános érvényességét az összes átöröklődő degenerálásokon kipróbálni ismereteink jelen állása mellett még korai, egyszerűen abból az okból, mert a herododegenerációk kórszövettana még fejletlen. De azért már ma is rendelkezünk oly adatokkal, melyek a jelzett tételekkel egybevágnek. Így első-sorban a már fentebb említett MERZBACHER-féle aplasia axialisra, mint oly átöröklődő idegbántalomra utalnék, a melynek kórszövettana époly befejezett, mint a családi vakságos idiotaságé; erről ismeretes, hogy kizárólag ektodermális típusú bántalom, melynek elektív volta a tengelyfonalra való szorítkozásában csúcsosodik ki. Igaz ugyan, hogy e bántalomban az axonál-

plazmának túltengését — miképen azt a vakságos idiotaságban oly szembeszökően látjuk — nem lehet kimutatni, sőt ellenkezőleg itt erős sorvadási tünetek szerepelnek, minők a tengelyfonalak rendkívüli elvékonyodása. Kétségtelen azonban, hogy ez ellentétes viselkedés semmiképen sem jelent elvi különbséget, mert hiszen könnyen elgondolható, hogy a neuron protoplazmájának megbetegedése két alakban, ú. m. hypertrophiában és atrophiaiban nyilvánulhat meg, az előbbi a családi vakságos idiotaságban, az utóbbi a Merzbacher-féle betegségben. Ámde vannak jelek — ezeknek taglalása értekezésem keretén túlesik — melyek jogosulttá teszik azt a felfogásomat, hogy a heredodegenerációs plazmabántalom atrophias formája csak végkifejlési jelenség, a melyet hypertrophia előz meg; a bántalomnak évtizedekre való kiterjedése a fokozatos átmenetet lehetővé teszi, de egyúttal érthető, hogy a betegség legvégén vizsgálat alá kerülő anyagon hypertrophiás jelenség már nem lesz található.

Mindezek után úgy vélem, hogy *a heredodegeneratio legáltalánosabb kórszövettani jelenségeként az idegszövet és rostok szerkezet nélküli protoplazmájának endogén-elektív megbetegedését állíthatom oda*, a mi annál fontosabb körülmény, mert hiszen mindenképen feltűnő a neurofibrillának, az idegingerület vezetőinek a folyamat iránt való részvétlensége. Vajjon e magatartásból nem olvasható-e ki az a lehetőség, hogy az idegingerület vezetése a nem-differenciált protoplazmában folyékony és hogy a neurofibrillának nevezett fonalas szerkezet csak támasztó állománya volna a működő protoplazmának? Oly gondolat ez, a mely ellenkezik ugyan az uralkodó felfogással, de a melynek valószínűségét kétségbevonni nem lehet.

Befejezésül még egy körülményre utalnék, a mely a családi vakságos idiotaság kórszövettanából levont tételeknek általános érvényét emelni tudja és ez egy pathobiológiai momentum. Elüljáróan megemlékeztem JENDRÁSSIK ama nagyfontosságú megállapításáról, hogy az átöröklődő idegelfajulások bármily változatosak, szemre igen különböző képekben jelennek meg, lényegükben azonosak, mert egyetlen kórélettani elvnek, a heredodegenerációnak megnyilatkozásai. Önkénytelenül kínálok fel-

vétel, hogy e klinikai egység nyilván anatómiai egységgel jár; nem vélek merészet állítani, a midőn a biológiailag egységes heredodegenerációnak anatómiai korrelativumában is egységes alapelváltozásokat tételezek fel s így a családi vakságos idiotaságban, mint a legkedvezőbb vizsgálati objektumban, a heredodegeneratio anatómiai lényegét mintegy megtestesülve látom.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 június 8.-án tartott üléséből.)

A FÜGGŐVONAL DEVIATIÓJA KESZTEJ ÉS TIGLAMORUTULUI PONTOK KÖZÖTT.

OLTAY KÁROLY-tól.

1. Függővonalnak vagy verticalis vonalnak a niveau-felület normalisát nevezzük. A mennyiben a niveau-felület forgási ellipsoid volna, minden pontjában a függővonal irányra nézve azonos lenne az ellipsoid normálisával. A forgási ellipsoid azonban a niveau-felületnek csak megközelítő felülete, ennél fogva normálisai és a megfelelő függővonalak egymástól elhajlanak s az eltérés szöge az, a mit *deviatió*nak nevezünk. A niveau-felületek közül azt, a melyik a nyugalomban képzelt tengerek szintjének felel meg, *geoid*nak, az ezt legjobban megközelítő forgási ellipsoidot pedig *földi ellipsoid*nak nevezzük. A földi ellipsoid és a geoid normalisainak szögeltérése az ú. n. *absolut deviatio*, ennek értékeire csak igen nagy kiterjedésű földrészekén végzett felsőgeodéziai mérésekből lehet következtetni. Kisebb földterületek (országok) felvételekor egy vonatkozási (referencia-) ellipsoidot szokás alapul venni, a melynek méretei megfelelnek valamely fokmérés eredményeinek, a melynek forgási tengelye a föld forgási tengelyével parallel s a melynek tájékozása megfelel a háromszöghálózat egy bizonyos pontján végzett astronomiai positio-méréseknek. A referencia ellipsoid normalisainak szögeltérését a függővontól nevezzük *relativ deviatió*nak. A relativ deviatio értékét a háromszögelési pontokon végzett astronomiai mérésekből igen élesen lehet meghatározni. Ha az egyes háromszögpontokon csak sarkmagasságmérést (φ) végzünk, úgy ki lehet számítani a relativ deviatio meridian irányú componenseit; ha tisztán hosszúságkülönbségméréseket (λ) végzünk, akkor a relativ deviatio componenseit az

első verticalis irányában vezethetjük le. A mennyiben φ -t is, λ -t is mérünk, a deviatio absolut nagyságát, továbbá eltérési síkjának azimutját is kiszámíthatjuk. Az első verticalisban fekvő componenst megkaphatjuk azimut-mérésekből is, de ez a módszer jó eredményt csak kölcsönös azimutok mérése esetében ad, azaz csak akkor, ha egy iránynak megfelelő ellenkező irány azimutját is megmérjük. A következőkben deviatio alatt mindig a relativ deviatiót fogjuk érteni.

2. A budapesti műegyetem geodéziai tanszéke az 1913. év nyarán báró EÖTVÖS LORÁND megbízásából s az ő mérései keretében több erdélyi ponton végzett gravitatio- és sarkmagasság-mérést. A sarkmagasság-mérési állomások egyike az országos háromszögelés *Tigla-morutului* nevű pontja volt, a mely Nagysármás községtől nyugatra egy dombtetőn fekszik. Ettől a ponttól délnyugatra circa 25 km-re fekszik az országos háromszögelés egy másik pontja, *Kesztej* — Mezőbánd község határában —, a mely pont az országos felmérés ú. n. erdélyi vagy marosvásárhelyi stereograficus vetületi rendszerének kezdőpontja. Mivel ezen a ponton 1891-ben a Katonai Földrajzi Intézet sarkmagasságot mért, továbbá megmérte a «*Kesztej Tiglamorutului*» háromszögoldal azimutját, azért utasításomra a Tiglamorutului ponton SZECSENYI MIKLÓS úr megmérte — a sarkmagasságon kívül — a «*Tigla-morutului-Kesztej*» oldal azimutját is. Ezeket a mérési eredményeket egybevetve a Katonai Földrajzi Intézet eredményeivel, a két pont ismeretes, relativ helyzete segítségével le lehet vezetni a két pont közötti deviatiót.

3. A geodéziai tanszék astronomiai méréseire egy STARKE és KAMMERERTől származó és BAMBERG által universalissá átalakított műszer szolgált. A távcső objectívjének nyílása 47 mm, fókustávolsága 490 mm, nagyítása 60-szoros. A 300 mm átmérőjű magassági kör 10'-es osztással, a 230 mm sugarú vízszintes kör pedig 5'-es osztással van ellátva. Mind a két körön mikrométer-csavaros mikroszkopokkal közvetlenül 1", becsülve 0.1" olvasható le. A műszer igazítása és felállítása egy 2.25"-es tengelylibellával történik, a magassági körön pedig egy 2.30" érzékenyséű indexlibella van.

Az astronomiai mérések alatt a műszer centricusan volt felállítva a Tiglamorutului ponton; az azimutmérésekkor az irányzások részben a Kesztej felett centricusan álló gulára, részben pedig a kőjelen ugyancsak centricusan elhelyezett acetilén-lámpára történtek. A mérés alatt a műszer védelmére szolgáló vászonsátor teteje és oldalai teljesen el voltak távolítva s így a szűk résen keresztül való irányzáskor beálló ú. n. anomalis-ticus refractio teljesen el volt kerülve.

4. A *sarkmagasság-mérések* alkalmával a STERNECK-féle módszert alkalmaztuk, azaz zenittávolságokat mértünk a meridiánban. A mérés hat körállásban történt, és pedig minden körállásban 8—8 csillag zenittávolságát mértük váltott távcső-állásban. A vég-eredményt tehát 48 egyszerű, illetve 24 kettős meghatározásból vezettük le. Eredményül Tiglamorutului sarkmagasságára a következő értéket kaptuk:

$$\varphi \text{ Tiglamorutului} = 46^{\circ} 44' 58.69''.$$

A fenti érték középhibája $\pm 0.25''$.

5. Az *azimut-mérést* 12 körfekvésben végeztük; minden egyes körfekvésben a következő sorozatot észleltük:

| | |
|------------|----------------|
| Körkelet: | Kesztej, |
| | Polaris (I), |
| | Polaris (II). |
| Környugat: | Polaris (III), |
| | Polaris (IV), |
| | Kesztej. |

A polaris csillag (α Urs. min.) minden észlelése előtt a horizontalis tengely hajlását a tengelylibella átfektetésével mértük meg, s a leolvasást ennek megfelelően redukáltuk.

Minden sorozatból az azimutra két-két érték vezethető le, ezek az alábbi táblázatban külön-külön vannak felsorolva.

| Folyó- szám | Kör- állás | Mért azimut | | Eltérés a középtől λ | |
|----------------|---------------|-----------------|-----------------|---------------------------------|-------|
| | | I. mérés | II. mérés | I. | II. |
| 1 | 49° | 146° 49' 32.52" | 146° 49' 30.52" | —1.96 | +0.04 |
| 2 | 64° | 30.25 | 29.30 | +0.31 | +1.26 |
| 3 | 79° | 30.79 | 29.58 | —0.23 | +0.98 |
| 4 | 94° | 30.10 | 28.84 | +0.46 | +1.72 |
| 5 | 109° | 31.44 | 31.48 | —0.88 | —0.92 |
| 6 | 124° | 30.72 | 29.28 | —0.16 | +1.28 |
| 7 | 139° | 33.01 | 28.88 | —2.45 | +1.68 |
| 8 | 154° | 31.08 | 33.18 | —0.52 | —2.62 |
| 9 | 169° | 31.24 | 32.57 | —0.68 | —2.01 |
| 10 | 184° | 28.39 | 28.71 | +2.17 | +1.85 |
| 11 | 199° | 29.06 | 30.00 | +1.50 | +0.56 |
| 12 | 214° | 30.08 | 32.41 | +0.48 | —1.85 |
| Közép | | 146° 49' 30.39" | 146° 49' 30.72" | — | — |

Az utolsó két rovatba írt, λ -val jelölt mennyiségek a mérés pontosságáról adnak felvilágosítást. Ez értékek alapján egyetlen azimutmeghatározás középhibája :

$$\pm \sqrt{\frac{\lambda\lambda}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{47.80}{23}} = \pm 1.44'';$$

a végeredményképen levezetett azimutérték középhibája pedig

$$\pm \frac{1.44}{\sqrt{24}} = \pm 0.29''.$$

Vagyis a *Tiglamurutului-Kesztej* oldal azimutja a csillagászati mérések alapján

$$146^{\circ} 49' 30.56'' \pm 0.29''.$$

6. A Kesztej-ponton 1891-ben STERNECK végezte a sarkmagasság- és azimut-mérést. Eredményei az *Astr. Geod. Arbeiten des k. u. k. Militär geogr. Institutes* című mű XII. kötetében az 54. oldalon vannak publikálva.¹ Ezek szerint:

¹ E közleményben a Kesztej-pont «Căstei»-nak, a Tiglamurutului pedig «Tiglamorutului»-nak van jelezve.

$$\begin{aligned} \varphi_{Kesztej} &= 46^{\circ} \quad 33' \quad 09.12'' \pm 0.31'' \\ A_{Kesztej-Tiglamorutuli} &= 326^{\circ} \quad 57' \quad 38.84'' \pm 0.07''. \end{aligned}$$

7. A két pont ellipsoidicus távolságát a pontok stereograficus sík koordinátáiból lehet levezetni. Ezek a koordináták a *m. k. háromszögelő hivatal* közlése szerint:

| Pont | Y | X |
|------------------|---------------|----------------|
| Kesztej. | 0.000 öl | 0.000 öl |
| Tiglamorutului | + 7463.794 öl | — 11474.076 öl |

E koordinátákból a vetületi törvény segítségével levezetve, a két pont sferoidicus távolsága ölekben a következő értékkel adódik:

$$\begin{aligned} s &= 13688.03 \quad (\text{logs.} = 4.13634091) \\ \text{méterekben} \quad s &= 25959.13 \quad (\text{logs.} = 4.41429009). \end{aligned}$$

8. A deviatio kiszámítása czéljából felvettem egy BESSEL-ellipsoidot referenzia-ellipsoidnak úgy, hogy a Tiglamorutului pontban a deviatio 0 legyen (az ellipsoid normalisa azonos legyen a függő vonallal), továbbá, hogy a tájékozása megfelelően a mért csillagászati azimutnak. Ebben a pontban tehát

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{geod.}} &= \varphi_{\text{astr.}} \\ A_{\text{geod.}} &= A_{\text{astr.}} \end{aligned}$$

9. A referenzia-ellipsoid segítségével le lehet vezetni a Kesztej-Tiglamorutului oldal ú. n. geodéziai azimutját. A levezetést a mellékelt ábra szerint a SCHREIBER-féle képletekkel és táblázatokkal végeztem el. Az ábrán *P* jelenti a Tiglam. pontot, *P'* Kesztejt, *T* pedig a *P'*-ből a *P* meridiánjára bocsájtott merőleges talppontját. A *PTP'* derékszögű ellipsoidicus háromszögben ξ és η a befogók hossza, «*s*» pedig — az átfogó — a két pont ellipsoidicus távolságát jelenti. A számítás az alábbi táblázatban van összeállítva, a hol egyúttal a megoldás sorrendjében a számításra alkalmazott képleteket is feltüntettem.

| P P' | Tiglamorutului Kesztej |
|----------------------------|-----------------------------------|
| φ A | 46° 44' 58.63" 146° 49' 30.88" |
| log s | 4,414 2901 |
| log cos A | 9,922 7283 n |
| log u | 4,337 0184 n |
| log (1) | 8,510 3793 |
| log (1) u | 2,847 3977 n |
| — (4) u | + 74 |
| log ξ | 2,847 4051 n |
| $\varphi + \xi$ | 46° 33' 14.96" |
| log s | 4,414 2901 |
| log sin A | 9,738 1417 |
| log v | 4,152 4318 |
| log (2) | 8,500 0163 |
| log η | 7,661 4481 |
| log tg ($\varphi + \xi$) | 0,023 5723 |
| log τ | 2,685 0204 |
| — $u \tau^2$ | — 4 |
| log t | 2,685 0200 |
| t | + 0° 8' 4.20" |
| log ξ | 2,84 74 n |
| log η | 2,66 14 |
| log 0.5 sin 1" | 4,38 45—10 |
| log ε | 9,89 33—10 |
| ε | — 0.78" |
| t- ε | + 0 8 4.98 |
| 180°+A | 326 49 30.88 |
| Geod. azimut ¹ | 326° 57' 35.86" |

¹ A Kesztej-Tiglamorutului irány azimutját, kiindulva a Katonai Földrajzi Intézet által a budapesti Széchenyi-hegyen mért azimutból, dr. FASCHING ANTAL úr is levezette az országos háromszöghálózat felhasználásával. Az ő értéke, melyet közöl a «Magyar országos háromszögelések és részletes felmérések új vetületi rendszerei» című munkájának 69. oldalán, a következő

$$326^{\circ}57'41.05'',$$

a mi a fenti értéktől 5.19"-ben, az astronomiai azimuttól pedig 2.21"-ben tér el.

$$\begin{aligned}
 u &= s \cos A & v &= s \sin A \\
 \log \xi &= \log \{(1) u\} - (4) u \\
 \log \eta &= \log \{(2) v\} \\
 \tau &= \eta \operatorname{tg} (\varphi + \xi) \\
 \beta &= (3) \eta \tau \\
 \varepsilon &= \frac{1}{2} \xi \eta \sin 1'' \\
 \log t &= \log \tau - \mu \tau^2 \\
 A' &= A + 180^{\circ} - t - \varepsilon \\
 \log d &= \log \beta - \mu \tau^2 \\
 \varphi' &= \varphi + \xi - d
 \end{aligned}$$

A zárjeles arabsszámmal jelölt mennyiségek a Schreiber féle táblázatokból vehetők, melyeket közöl az Albrecht-féle «Formeln und Hilfstafeln f. Geogr. Ortsbestimmungen» című mű a 288—291. oldalon.

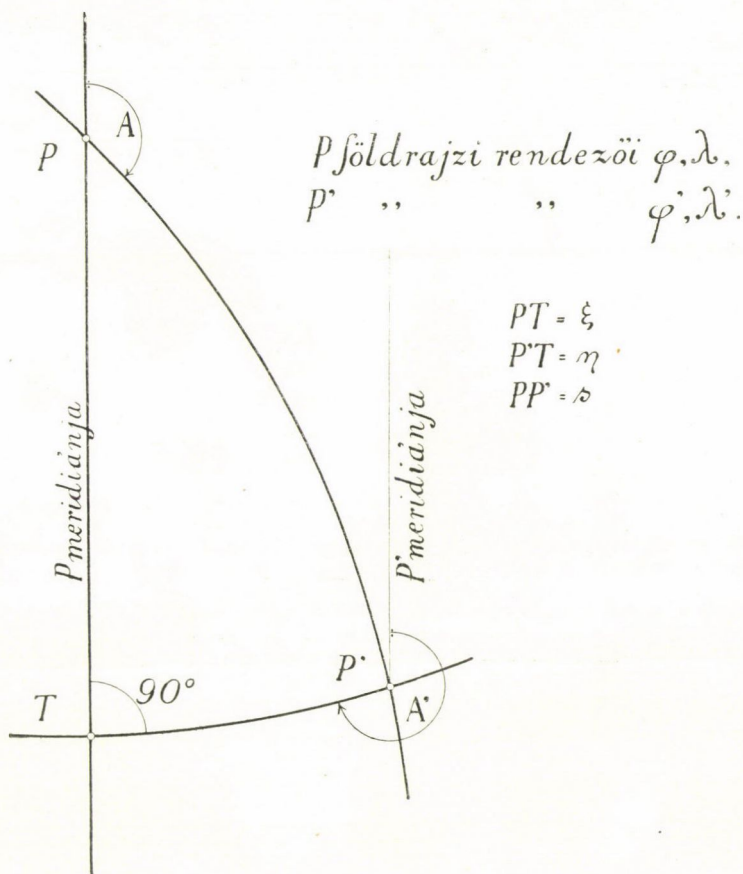
Az előjelekre nézve:

$$\operatorname{sg} u \equiv \operatorname{sg} \xi \equiv \operatorname{sg} \cos A$$

$$\operatorname{sg} t \equiv \operatorname{sg} \sin A$$

$$\operatorname{sg} \varepsilon \equiv \operatorname{sg} \sin A \cos A$$

| | |
|-----------------|----------------|
| log (3) | 4,38 59 |
| log η | 2,66 14 |
| log τ | 2,68 50 |
| log d | 9,73 24 |
| d | — 0.54 |
| $\varphi + \xi$ | 46 33 14.96 |
| Geod. sarkm. | 46° 33' 14.42" |



1. ábra.

10. Kesztej-pontban a függő vonal deviatiójának componensét a meridián irányában a következő képlettel kapjuk meg:

$$\xi = \varphi_{\text{astr.}} - \varphi_{\text{geod.}}$$

Bevezetve a sarkmagasság astronomiai úton nyert és geodéziai úton bevezetett értékeit, a meridián-deviatio számszerű értéke a Kesztej-pontban

$$\xi_{\text{Kesztej}} = -5.3'',$$

mely érték középhibája körülbelül $\pm 0.5''$ -re tehető. A negatív

előjel szerint a függő vonalnak a niveau-felület fölött levő szakasza az ellipsoid normalisától dél felé hajlik el.

11. A függővonal deviatiójának komponensét az *első vertikalis sík* irányában az azimutokból lehet levezetni:

$$\eta = (A_{astr.} - A_{geod.}) \cotg. \varphi.$$

Behelyettesítve a Kesztej-pontra levezetett azimutot, továbbá az ott nyert csillagászati azimutot, e komponens számszerű értéke

$$\eta_{Kesztej} = + 2.9''.$$

A fenti érték középhibája szintén $\pm 0.5''$ -nek vehető. A pozitív előjel szerint a függővonalnak a niveau-felület feletti része kelet felé hajlik a referenzia-ellipsoid normalisától.

12. A deviatio fent levezetett két komponenséből kiszámíthatjuk a deviatio nagyságát s -et, továbbá verticalis síkjának azimútját, α -at.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\eta}{\xi} = \frac{A_{astr.} - A_{geod.}}{\varphi_{astr.} - \varphi_{geod.}} \cotg. \varphi, \\ s &= \frac{\varphi_{astr.} - \varphi_{geod.}}{\cos \alpha} = (A_{astr.} - A_{geod.}) \frac{\cotg \varphi}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

A Kesztej-pontra nézve

$$\begin{aligned} s &= 6.0'', \\ \alpha &= 151^{\circ} 30'. \end{aligned}$$

Vagyis ha feltételezzük, hogy a Tigla-ponton a függővonal és a fentebb definiált referenzia-ellipsoid normálisa teljesen egybe esik, akkor a Kesztej-ponton a kettő már nem coíncidál, hanem itt a függővonal a normálissal $6.0''$ szöget zár be, és pedig abban a verticalis síkban, melynek az észak-tól számított azimútja $151^{\circ} 30'$.

VIZSGÁLATOK A FÉNYVISSZAVERŐDÉS PHASISVÁLTOZÁSAIRÓL.¹

RYBÁR ISTVÁN-tól.

1. §. Bevezetés; a vizsgálat célja.
2. §. A kísérleti módszer.
3. §. A vizsgálat különböző esetei; egy általános megjegyzés.
4. §. A kísérleti módszer általános elmélete. *a)* A fény nincs polározva. *b)* A polározó a FRESNEL-féle kettős tükrök és a visszaverő prisma között van. *c)* A polározó e prisma és az észlelő szeme között van.
5. §. Az elméleti formulák elemzése.
6. §. Kísérleti igazolások.

1. §. Bevezetés; a vizsgálat célja.

A Matematikai és Természettudományi Értesítő XXXII. k. 1—30. lapján kísérleti módszert ismertettem a teljes fényvisszaverődés abszolút phasisváltozásainak meghatározására. E meghatározás az *üveg-levegő* határfelületről *teljesen* visszaverődő és az *üveg-folyadék* határfelületről *parciálisan* reflektálódó fénysugarak interferenciájával történt a partiális visszaverődés ismeretes abszolút phasisváltozásainak is a tekintetbe vételével.

A teljes és a partiális reflexió abszolút phasisváltozásának különbsége az interferenciacsíkok eltolódását okozta. Ez eltoló-

¹ A bpesti kir. m. tudományegyetem I. sz. physikai intézetében készült dolgozat.

dást czélomnak megfelelőleg csakis a beesés síkjában polározott és az erre merőlegesen polározott fénynyel vizsgáltam. Kiderült, hogy az abszolút phasisváltozásoknak a FRESNEL-féle elméletből nyert értékei a tapasztalatnak teljesen megfelelnek.

E két eset megvizsgálásával feladatomat megoldottam. De a kísérleti módszer újabb vizsgálatokra is alkalmas, mert természete olyan, hogy a megvizsgált két eset tulajdonképen legegyszerűbb esete a kísérleti eljárásommal előállítható összes más eseteknek.

A polározó szerkezetnek, az ott használt nikolnak forgatásával ugyanis tetszésszerűen azimuthban polározott fénynyel, sőt a nikol eltávolításával akár természetes fénynyel is létrehozhatjuk az említett interferenciát s így a csíkok eltolódását is.

Világos, hogy ez általános esetek bármelyikében már nem beszélhetünk a fény phasisáról oly értelemben, mint azt a már megvizsgált két esetben tehattük. A fény polározási állapotát nem egy, hanem két, egymásra merőleges (egy a beesés síkjában fekvő és egy erre merőleges) vektor határozza meg, sőt természetes fény esetén e komponensek amplitúdói és kezdetphasisai bizonyos feltételeknek is eleget tesznek. A csíkok eltolódása tehát ez általános esetekben nem csupán a komponensek phasisváltozásától függ, hanem mindazoktól az okoktól is, melyek a két komponens amplitúdóit különböző mértékben gyöngítik.

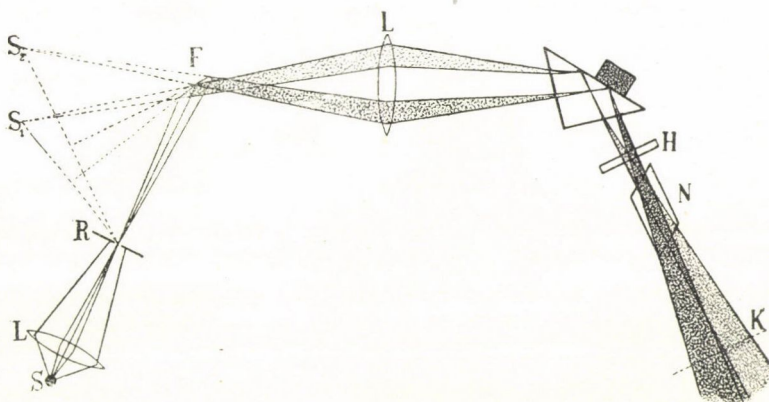
Kérdés tehát: mi az összefüggés a csíkok eltolódása és a visszaverődés abszolút phasisváltozásai, továbbá a fény visszaverődése- és törésekor előálló amplitúdó-változások között, még pedig úgy a természetes, mint a tetszésszerűen azimuthban polározott beeső fény esetében?

E kérdés megoldásával, mely az alkalmazott kísérleti eljárás általános elméletét nyújtja, s a kísérleti eredményekből vont következtetésekkel óhajtók e dolgozatomban foglalkozni.

2. §. A kísérleti módszer.

Kísérleti eljárásomat idézett dolgozatomban részletesen ismerttettem. E helyen e módszernek csakis egyszerű vázlatos leírására szorítkozom.

Az L lencse (1. ábra) a vertikális (a rajz síkjára merőleges) NERNST-fonálnak képét az R résre veti. A résből kilépő sugarak az F FRESNEL-féle kettős tükörről reflektálódnak. A fény ezután az L' achromatikus lencséhez érkezik,¹ mely a FRESNEL-féle kettős tükörről történő reflexióhoz tartozó S_1 és S_2 virtuális képek éles képeit egy üvegprisma átlólapján állítja elő. E reális képek vertikálisak s így a rajz síkjára merőlegesek. A prisma átlólapja egy folyadékkal megtöltött kockaalakú edénykét zár



1. ábra.

el úgy, hogy a prisma átlólapjának egy része közvetlenül folyadékkal érintkezik. Az S_2 fényforrásból jövő sugarak egy része a prizmának e folyadékkal megnedvesített felületrészéről verődik vissza, egy másik része (mely ábránkon a reflexiónál a rajz síkja felett halad) ellenben a prizmának a levegővel érintkező felületéről reflektálódik. Az S_1 fényforrás összes sugarai üveg-levegő határfelületről verődnek vissza. A H hengerlencse, melynek alkotói vízszintesek, az edényke vízszintes élének éles képét a K síkban, az okularmikrometer helyén állítja elő. Az N nikol az interferáló sugarak polározására szolgál.

¹ E gömb-lencsét később 50 cm gyújtótávolságú hengerlencsével helyettesítettem.

3. §. A vizsgálat különböző esetei; egy általános megjegyzés.

Az interferenciacsíkok eltolódása lényegesen függ attól a körülménytől, hogy a fényt polározzuk-e vagy sem, sőt polározás esetén attól is, hogy hol van kísérleti egybeállításunkban a polározó készülék, a nikol közbeiktatva.

A fénynek eme polározása történhet vagy a FRESNEL-féle kettős tükrőről való visszaverődése előtt, vagy a FRESNEL-féle tükrő és a visszaverő prisma között, vagy végül a prisma után.

Ez esetek közül, mint látni fogjuk, az első és az utolsó ugyanarra az eredményre vezet, miért is kísérleti módszerünk általános elméletének kifejtésekor három esetet kell megkülönböztetnünk.

Ezek: a) a nikolt eltávolítva, a fényt egyáltalában nem polározzuk; b) a fényt a prismába való belépése előtt; c) a prismából való kilépése után polározzuk.

Mielőtt meggondolásainkat megkezdenők, egy általános megjegyzést kell előre bocsátanunk.

Elég csak egy pillantást vetni az 1. ábránkra, azonnal meggyőződünk arról, hogy a fény szigorú értelemben nem az egyszerű sík-, hanem gömb-, sőt egyes helyeken még komplikáltabb hullámfelületben terjed tova. Fényvektoraikat tehát szigorú értelemben nem fejezhetjük ki a síkhullám egyszerű formáival, mely körülmény meggondolásainkat rendkívül megnehezítené. Ámde kísérleti egybeállításunk nagy méretei segítenek rajtunk. Ismeretes ugyanis, hogy «a fényhullámhossz rendkívül kicsiny volta miatt egy *tetszésszerű* hullámfelület megfigyelhető részei, ha görbületi sugaraik csak egynéhány millimétert tesznek is ki, igen közel annak a rezgésszabálynak hódolnak, mely a *síkhullám* részeire érvényes».¹ Már pedig kísérleteinkben a hullámfelület görbületi sugara nem egynéhány millimétert, hanem pl. ott, hol az észlelés történik, métereket tesznek ki, ezenkívül a megfigyelés csupán a hullámfelület egy igen kis részére, egynéhány négyzetmilliméternyi területére szorítkozik. Nem lesz tehát a

¹ W. Voigt: Kompend. d. theor. Physik II B. p. 756. 1896.

megfigyelendő jelenségre észlelhető befolyással az, ha tárgyalásainkban mindvégig síkhullámmal dolgozunk.

4. §. A kísérleti módszer általános elmélete.

a) *A fény nincs polárizva.*

A jelen esetre érvényes kísérleti egybeállításunkat az 1. ábra tünteti elő, ha abból az N nikolt eltávolítjuk.

Mindenekelőtt az interferáló sugarak vektorkifejezéseit határozzuk meg.

Az R résen átjövő fény természetes. Ismeretes, hogy a természetes fény optikai hatásaiban mindenkor oly ellipszisben polárizott fénynyel helyettesíthető, melynek rezgését kifejező két egymásra merőleges vektorkomponens amplitúdói és kezdetphasisai az időben gyorsan, de azért a fényrezgés tartamához képest lassan, a STOKES-féle¹ feltételeknek megfelelőleg változnak.

További fejtegetéseink céljából fejezzük ki e természetes fényt oly két vektorkomponenssel, melyek egyike a FRESNEL-féle kettős tükrőről történő, azonkívül a prizmban végbemenő reflexiók közös beesés-síkjára (tehát az 1. ábrán a rajz síkjára) merőleges, másika ellenben e síkkal párhuzamos. Legyenek ezek kifejezései:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_m &= A_m e^{2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} + a_m \right)}, \\ \mathfrak{A}_p &= A_p e^{2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} + a_p \right)}. \end{aligned}$$

E vektorkifejezésekben az A_m , A_p amplitudók és az a_m , a_p kezdetphasisok az időben változnak, még pedig úgy, hogy a változó mennyiségek az

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum (A_m^2 + A_p^2) = 0, & \sum A_m^2 &= \sum A_p^2 = \frac{J}{2}, \\ B &= \sum A_m A_p \cos 2\pi (a_m - a_p) = 0, \\ C &= \sum A_m A_p \sin 2\pi (a_m - a_p) = 0, \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

¹ STOKES: Philosophical Magazine 3. (4) p. 316. 1852.

STOKES-féle feltételeknek tesznek eleget. $A \lesssim$ jel az illető kifejezések időbeli középértékét jelenti.

A résből kilépő fény csak többszörös visszaverődés és törés után interferál. Minden visszaverődés és törés alkalmával a vektorkomponensek amplitúdóihoz egy-egy tényező (egy-egy FRESNEL-féle faktor¹⁾) járul, mely a fény amplitúdóinak és fázisainak változását meghatározza.

A résből kilépő fény a FRESNEL-féle kettős tükrőről reflektálódik és két koherens sugárnyalábra oszlik. Jelöljük e reflexióhoz tartozó FRESNEL-féle tényezőket a beesés síkjára merőleges és a vele párhuzamos rezgési amplitúdóra nézve f_m és f_p -vel.

A két koherens sugárnyaláb, melyek egyike az S_1 , másika az S_2 virtuális fényforráshoz tartozik, az L' lencsére közel merőlegesen esik, miért is e lencse okozta törés a vektorok amplitúdóit közel egyenlő mértékben változtatja. Jelöljük az amplitúdók e közös szorzóját r -rel.

A fénysugarak vektorai a fénynek a reflektáló prizmaiba való belépése alkalmával ismét megváltoznak. Legyenek az e töréshez tartozó FRESNEL-féle faktorok d_m és d_p .

Ezek szerint a két koherens fénynyaláb vektorait közvetlenül a prisma átfogó lapján történő reflexió előtt következőkép állíthatjuk elő:

$$\begin{pmatrix} (\mathfrak{B}_m)_1 \\ (\mathfrak{B}_p)_1 \\ (\mathfrak{B}_m)_2 \\ (\mathfrak{B}_p)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_m f_m r d_m e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1''}{\lambda} + a_m \right)} \\ A_p f_p r d_p e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1''}{\lambda} + a_p \right)} \\ A_m f_m r d_m e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2''}{\lambda} + a_m \right)} \\ A_p f_p r d_p e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2''}{\lambda} + a_p \right)} \end{pmatrix} \dots \dots (2)$$

¹ E faktorok, melyek minden kézikönyvben megtalálhatók:

$$f_m = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)};$$

$$f_p = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)},$$

a hol φ a fény beesés és ψ a törés szögét jelenti.

Az 1 indexű vektorkomponensek az S_1 fényforrás sugarainak, a 2 indexű komponensek pedig az S_2 fényforrás sugarainak polározási állapotát állapítják meg.

A két sugárnyaláb ezután a prizma átlólapján reflexiót szenved.

A míg az S_1 fényforrás összes sugarai üveg-levegő határfelületről verődnek vissza, addig az S_2 fényforrás sugarainak egyik csoportja szintén üveg-levegő határfelületről, másik csoportja ellenben üveg-folyadék felületről reflektálódik.

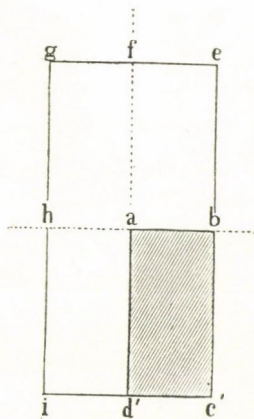
A visszaverődött sugarak e különböző csoportjait az egész sugárnyaláb keresztmetszetét vázlatosan ábrázoló 2. ábra tünteti elő. A nyaláb $d'afghid'$ felében az S_1 fényforrás sugarai, a másik $d'c'b'efad'$ felében pedig az S_2 fényforrás sugarai terjednek tovább. Az $ab'c'd'a$ quadrans sugarai az üveg-folyadék határfelületéről, a többi quadrans, mint az $ab'efa$, $fghaf$ és $hid'ah$ quadrans sugarai az üveg-levegő határfelületről verődtek vissza.

Jelöljük a FRESNEL-féle tényezőknek az üveg-levegő határfelületről történő reflexióhöz tartozó értékeit $v_m e^{i\delta_m}$ és $v_p e^{i\delta_p}$ -vel, az üveg-folyadék határfelületen végbemenő visszaverődéshez tartozó értékeit pedig $v'_m e^{i\delta'_m}$ és $v'_p e^{i\delta'_p}$ -vel. E mennyiségek, mint azt a jelölésben is kifejeztük, *komplexek* is lehetnek.

A fénysugarak a prizmából kilépnek és a H hengerlencsén haladnak keresztül. A fény vektorkomponensei az első ok miatt d'_m , illetve d'_p -vel, az utóbbi ok következtében pedig egy közös r' tényezővel szorozódnak.

A vektorkifejezések előállítására céljából az egy és ugyanannak a sugárnyalábnak sugarait két csoportba sorozzuk.

Az S_2 fényforrásból jövő sugarak egyik csoportját azok a sugarak alkotják, amelyek az üveg-levegő határfelületről, azaz $ab'efa$ -ról verődnek vissza, a másik csoportját pedig az üveg-folyadék határfelületről, azaz $ab'c'd'a$ -ról visszaverődő sugarak.



2. ábra.

Jelöljük az előbbiektől vektorkomponenseit $(\mathfrak{B}_m)_2'$ és $(\mathfrak{B}_p)_2'$ -vel, az utóbbiakét pedig $(\mathfrak{B}_m)_2''$ és $(\mathfrak{B}_p)_2''$ -vel.

Az S_1 fényforrás sugarait szintén két csoportba sorozzuk, még pedig aszerint, a mint azok az S_2 fényforrás különböző csoportjaihoz tartozó sugarakkal interferálnak. Legyenek az egyik, az *afgha*-ról visszaverődött csoport sugarainak vektorkomponensei: $(\mathfrak{B}_m)_1'$ és $(\mathfrak{B}_p)_1'$, a másik, az *ad'iha*-ról visszaverődött csoport sugaraiéi: $(\mathfrak{B}_m)_1''$ és $(\mathfrak{B}_p)_1''$; ez utóbbi két pár kifejezéseit csak egymással lehetnek egyenlők.

Az előbb mondottak értelmében e négy sugárnyaláb vektorai:

$$\left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{B}_m)_1' &= A_m f_m r d_m v_m d_m' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1}{\lambda} + a_m \right) + \delta_m \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_1' &= A_p f_p r d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1}{\lambda} + a_p \right) + \delta_p \right]} \\ (\mathfrak{B}_m)_1'' &= A_m f_m r d_m v_m d_m' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1}{\lambda} + a_m \right) + \delta_m \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_1'' &= A_p f_p r d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1}{\lambda} + a_p \right) + \delta_p \right]} \\ (\mathfrak{B}_m)_2' &= A_m f_m r d_m v_m d_m' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2}{\lambda} + a_m \right) + \delta_m \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_2' &= A_p f_p r d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2}{\lambda} + a_p \right) + \delta_p \right]} \\ (\mathfrak{B}_m)_2'' &= A_m f_m r d_m v_m d_m' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2}{\lambda} + a_m \right) + \delta_m' \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)_2'' &= A_p f_p r d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2}{\lambda} + a_p \right) + \delta_p' \right]} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

E vektorokkal definiált sugarak közül az egyenlő számú ' -vel vagy '' -vel és egyszersmind az egyenlő m vagy p jelzővel is jelöltek interferálnak egymással. A következőkben előbb az ' -ös, azután a '' -ös sugarak interferenciájával foglalkozunk.

1. Az interferencia-szabályok értelmében a ' -vel jelölt fény-sugarak interferenciájának eredménye oly fénysugár, a melynek két vektorkomponense:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B}_m &= (\mathfrak{B}_m)_1' + (\mathfrak{B}_m)_2' = V_m' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma_m'}{\lambda} + a_m \right) + \delta_m \right]} \\ \mathfrak{B}_p &= (\mathfrak{B}_p)_1' + (\mathfrak{B}_p)_2' = V_p' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma_p'}{\lambda} + a_p \right) + \delta_p \right]} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

a hol

$$\begin{aligned} V_m'^2 &= 2 (A_m f_m r d_m v_m d_m' r')^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right) \\ V_p'^2 &= 2 (A_p f_p r d_p v_p d_p' r')^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\sigma_m'}{\lambda} = \frac{\sin 2\pi \frac{s_1}{\lambda} + \sin 2\pi \frac{s_2}{\lambda}}{\cos 2\pi \frac{s_1}{\lambda} + \cos 2\pi \frac{s_2}{\lambda}} = \operatorname{tg} 2\pi \frac{\sigma_p'}{\lambda}. \quad (6)$$

Az eredő fény intenzitása az egymásra merőleges vektorkomponensek amplitúdóinak négyzetösszegével alkotott időbeli középértékkel arányos. Azaz, ha az arányossági faktort elhagyjuk:

$$\begin{aligned} J' &= (V_m'^2 + V_p'^2) = \\ &= 2 [f_m r d_m v_m d_m' r']^2 \left[1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right] \leq A_m^2 + \\ &+ 2 [f_p r d_p v_p d_p' r']^2 \left[1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right] \leq A_p^2, \end{aligned}$$

vagy az (1) alatti első felvétel figyelembe vételével:

$$J' = J (f_m^2 r^2 d_m^2 v_m^2 d_m'^2 r'^2 + f_p^2 r^2 d_p^2 v_p^2 d_p'^2 r'^2) \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right).$$

hol (1) szerint J a beejtett nem poláros fény erőssége.

E kifejezés maximuma:

$$2Jr^2r'^2(f_m^2d_m^2d_m'^2v_m^2 + f_p^2d_p^2d_p'^2v_p^2),$$

ellenben minimuma 0, azaz az interferentiarendszer fényes és egészen sötét csíkokból áll.

Az intenzitás maximum, ha

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} &= 0 & \pm 2\pi & \pm 4\pi \dots \\ \text{és minimum, ha} & & & \\ 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} &= & \pm \pi & \pm 3\pi \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ez értékek állapítják meg az egyik, a ' jelzésű sugarakból alkotott csikrendszer csikjainak helyét. A középső csik *maximum*; ez az $s_1=s_2$ feltétel által meghatározott *symmetria*-egyenesben van; ezért is e csikrendszernek e *symmetria*-egyeneshez való fekvése független a beesés szögétől s ezért a második csikrendszert erre a rendszerre vonatkoztatjuk.

2. Hasonló módon alkotjuk a ''-vel jelölt fénysugarak eredőjének két egymásra merőleges vektorkomponensét. Ezek:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_m'' &= (\mathfrak{B}_m'')_1 + (\mathfrak{B}_m'')_2 = V_m'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma_m''}{\lambda} + \alpha_m \right)} \left\{ \dots (8) \right. \\ \mathfrak{B}_p'' &= (\mathfrak{B}_p'')_1 + (\mathfrak{B}_p'')_2 = V_p'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma_p''}{\lambda} + \alpha_p \right)}. \end{aligned}$$

a hol

$$\begin{aligned} V_m'' &= (A_m f_m r d_m d_m' r')^2 \left[v_m^2 + v_m'^2 + 2v_m v_m' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_m' - \delta_m \right) \right] \left\{ \right. \\ V_p'' &= (A_p f_p r d_p d_p' r')^2 \left[v_p^2 + v_p'^2 + 2v_p v_p' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_p' - \delta_p \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\pi \frac{\sigma_m''}{\lambda} &= \frac{v_m \sin \left(2\pi \frac{s_1}{\lambda} - \delta_m \right) + v_m' \sin \left(2\pi \frac{s_2}{\lambda} - \delta_m' \right)}{v_m \cos \left(2\pi \frac{s_1}{\lambda} - \delta_m \right) + v_m' \cos \left(2\pi \frac{s_2}{\lambda} - \delta_m' \right)} \left\{ \right. \\ \operatorname{tg} 2\pi \frac{\sigma_p''}{\lambda} &= \frac{v_p \sin \left(2\pi \frac{s_1}{\lambda} - \delta_p \right) + v_p' \sin \left(2\pi \frac{s_2}{\lambda} - \delta_p' \right)}{v_p \cos \left(2\pi \frac{s_1}{\lambda} - \delta_p \right) + v_p' \cos \left(2\pi \frac{s_2}{\lambda} - \delta_p' \right)}. \end{aligned} \quad (10)$$

S így az eredő fény intenzitása:

$$\begin{aligned} J'' &= \leq (V_m'' + V_p'') = \\ &= \frac{J}{2} f_m^2 r^2 d_m^2 d_m'^2 r'^2 \left[v_m^2 + v_m'^2 + 2v_m v_m' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_m' - \delta_m \right) \right] + \\ &+ \frac{J}{2} f_p^2 r^2 d_p^2 d_p'^2 r'^2 \left[v_p^2 + v_p'^2 + 2v_p v_p' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_p' - \delta_p \right) \right]. \end{aligned}$$

hol ismét, (1) szerint J a beejtett nem poláros fény erőssége.

Az J'' szélső értékeit oly $x = 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda}$ értékeknél veszi fel, a melyekre nézve

$$f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 v_m v'_m \sin(\alpha'_0 + \delta'_m - \delta_m) + f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p \sin(\alpha'_0 + \delta'_p - \delta_p) = 0,$$

azaz az

$$\alpha'_0 = \arctg \frac{\sin(\delta_m - \delta'_m) + \frac{f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p}{f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 v_m v'_m} \sin(\delta_p - \delta'_p)}{\cos(\delta_m - \delta'_m) + \frac{f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p}{f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 v_m v'_m} \cos(\delta_p - \delta'_p)} = \xi \pm k\pi$$

értékeknél.

Ha most megállapodunk abban, hogy a visszaverődésekhez tartozó FRESNEL-féle tényezők előjelét a phasisváltozásokban, a δ_m , δ_p , δ'_m , δ'_p -ben fejezzük ki úgy, hogy v_m , v_p , v'_m , v'_p csak pozitív mennyiségek lehetnek, akkor az J'' maximum a

$$\left. \begin{aligned} 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi \quad \xi \pm 2\pi \quad \xi \pm 4\pi \dots \\ 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \quad \xi \pm \pi \quad \xi \pm 3\pi \dots \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

helyeken.

Ez értékek határozzák meg a második csikrendszer csikjainak az $s_1 = s_2$ feltétel által meghatározott symmetria-egyeneshez való *helyét*, a mely hely, mint látható, lényegesen függ a beesés szögétől.

Az J'' fenti kifejezésében

$$\begin{array}{llll} \text{az első derékszögű együtttható minimuma} & (v_m - v'_m)^2 \\ \text{a második} & \text{''} & \text{''} & (v_p - v'_p)^2 \\ \text{az első} & \text{''} & \text{''} & \text{maximuma } (v_m + v'_m)^2 \\ \text{a második} & \text{''} & \text{''} & (v_p + v'_p)^2. \end{array}$$

E szerint J'' nem lehet *kisebb*, mint:

$$\frac{J}{2} r^2 r'^2 [f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 (v_m - v'_m)^2 + f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 (v_p - v'_p)^2]$$

és nem lehet *nagyobb*, mint:

$$\frac{J}{2} r^2 r'^2 [f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 (v_m + v'_m)^2 + f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 (v_p + v'_p)^2].$$

Tehát J'' *sehol sem lehet* zérus, azaz a "-ös interferentia-rendszer minimumai *nem lehetnek egészen sötét* csíkok.

Határozzuk meg az J'' szélső értékeit.

Az J'' egy *állandó* és egy *változó* részből áll. Ha rövidség kedvéért az

$$J r^2 r'^2 f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 v_m v'_m = K_m$$

$$J r^2 r'^2 f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p = K_p$$

$$\delta_m - \delta'_m = x_m$$

$$\delta_p - \delta'_p = x_p^1$$

jelöléseket bevezetjük, akkor az J'' változó része:

$$K_m \cos(x - x_m) + K_p \cos(x - x_p).$$

E kifejezésnek oly x értékeknél vannak *szélső* értékei, a melyeket a

$$\operatorname{tg} x''_0 = \frac{K_m \sin x_m + K_p \sin x_p}{K_m \cos x_m + K_p \cos x_p}$$

egyenlet határoz meg. Így tehát J'' változó részének *szélső értékei*

$$\cos x''_0 (K_m \cos x_m + K_p \cos x_p) + \sin x''_0 (K_m \sin x_m + K_p \sin x_p),$$

mely a

$$\cos x''_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x''_0}} = \frac{K_m \cos x_m + K_p \cos x_p}{\sqrt{K_m^2 + K_p^2 + 2K_m K_p \cos(x_p - x_m)}};$$

$$\sin x''_0 = \frac{\operatorname{tg} x''_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x''_0}} = \frac{K_m \sin x_m + K_p \sin x_p}{\sqrt{K_m^2 + K_p^2 + 2K_m K_p \cos(x_p - x_m)}}$$

helyettesítésekkel

$$\sqrt{K_m^2 + K_p^2 + 2K_m K_p \cos(x_p - x_m)}$$

alakban írható.

¹ Az x_m és x_p jelentése ugyanaz, mint a mi e betűk jelentése megelőző dolgozatomban volt (Math. és Term.-tud. Ért. XXXII. k. 23—24. o.).

Tehát J'' változó részének maximuma:

$$+ \sqrt{K_m^2 + K_p^2 + 2K_m K_p \cos(x_p - x_m)}$$

és minimuma:

$$- \sqrt{K_m^2 + K_p^2 + 2K_m K_p \cos(x_p - x_m)}.$$

Az okulármikrometer látóterében előálló két csikrendszert ezek után már teljesen ismerjük. Ugyanis: az egyik rendszer csikjai (a világos és a teljesen sötét helyek) az $x = 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda}$ -nak a (7) alatti értékeinél vannak; a másik rendszer csikjai (a világos és a kevésbé világos helyek) pedig ugyanennek a $2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda}$ -nak a (11) alatt összeírt értékeinél fekszenek. A "-vel jelölt csikrendszer tehát az '-ös rendszerből egy egyszerű parallel, a csikokra merőleges irányú eltolással származtatható. Az eltolódás pozitív iránya az, a melynél $2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda}$ növekszik, nagysága pedig

$$\xi = \arctg \frac{\sin(\partial_m - \partial'_m) + \rho \sin(\partial_p - \partial'_p)}{\cos(\partial_m - \partial'_m) + \rho \cos(\partial_p - \partial'_p)}, \quad (12^*)$$

a hol

$$\rho = \frac{f_p^2 l_p^2 l_p'^2 v_p v_p'}{f_m^2 l_m^2 l_m'^2 v_m v_m'}. \quad (12)$$

E függvény fejezi ki a csikrendszer eltolódása és a visszaverődések abszolút phasisváltozásai közötti összefüggést a reflexió minden esetére nézve.

Végül még a sugarak polározási állapotáról szölok.

A STOKES-féle feltételek (1) a természetes fény szükséges és elégséges feltételei. Ha e feltételeknek csak egyike is nem teljesül, azaz, ha az A , B , C mennyiségeknek csak egyike is zérustól különbözik, akkor a fény nem természetes, hanem általános-ságban véve természetes és poláros fény keveréke. A poláros fény polározási állapotát az A , B és C mennyiségek határozzák meg. A STOKES-féle meghatározó formulák minden nagyobb kézikönyvben megtalálhatók.¹ Itt csakis a végeredményeket idézem:

¹ M. E. MASCART: *Traité d'Optique* I. p. 547. 1889. — W. VOIGT: *Komp. d. theor. Phys.* II. p. 551. 1896.

Ha a

$$\mathfrak{B}_x = V_x e^{i(\varphi - \alpha_x)}$$

$$\mathfrak{B}_y = V_y e^{i(\varphi - \alpha_y)}$$

fényvektorokkal alkotott

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum (V_x^2 - V_y^2) \\ B &= \sum V_x V_y \cos(\alpha_x - \alpha_y) \\ C &= \sum V_x V_y \sin(\alpha_x - \alpha_y) \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (13)$$

menntiségek mindenike zérustól különbözik, akkor a természetes fény ellipszisben polározott fénnyel van keverve.

Az ellipsis főtengeleyei az x tengelylyel oly μ szögeket alkotnak, a melyek a

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{2B}{A} \quad (14)$$

egyenletnek gyökei, a tengelyek viszonyát a $\frac{\alpha_y}{\alpha_x} = \operatorname{tg} \nu$ -t a

$$\sin 2\nu = \pm \frac{2C}{\sqrt{A^2 + 4(B^2 + C^2)}} \quad (15)$$

egyenlet határozza meg, az ellipsis körülfutásának irányát pedig az

$$\Omega = -\frac{\pi}{\tau} C \quad (16)$$

területi sebesség előjele állapítja meg oly értelemben, hogy az Ω -nak positiv előjele a $+x$ -től a legrövidebb úton a $+y$ felé történő elfordulást jelent.

Ezek után az interferáló s az eredő fénysugarak polározási állapotát könnyen meghatározhatjuk.

Az *interferáló sugarak* polározási állapotának meghatározása céljából a (3) alatti négy sugárnyaláb két-két vektorával, az *eredő fény* polározási állapotának megállapítása céljából pedig a (4), illetve a (8) alatti két-két vektorral az A , B , C időbeli középértékeket az (1) vagy a (13) alatti mintára kell alkotnunk.

Az említett sugárnyalábok mindenikénél a vektorok szerkezete olyan, hogy a beesés síkjára merőleges vektorkomponensek

amplitúdói $A_m g_m$, phasisai $2\pi a_m + \Delta_m$ alakban; a beesés síkjában fekvő komponensek amplitúdói pedig $A_p g_p$, phasisai $2\pi a_p + \Delta_p$ alakban írhatók. A g_m , g_p , Δ_m és Δ_p mennyiségek értékei a szóban forgó egyes sugárnyaláboknál általában mások és mások. A keresett középértékek tehát

$$\begin{aligned} A &= g_m^2 \leq A_m^2 - g_p^2 \leq A_p^2 = (g_m^2 - g_p^2) \frac{J}{2} \\ B &= g_m g_p \leq A_m A_p \cos [2\pi(a_m - a_p) + \Delta_m - \Delta_p] = \\ &= g_m g_p \cos(\Delta_m - \Delta_p) \leq A_m A_p \cos 2\pi(a_m - a_p) - \\ &- g_m g_p \sin(\Delta_m - \Delta_p) \leq A_m A_p \sin 2\pi(a_m - a_p) \\ C &= g_m g_p \leq A_m A_p \sin [2\pi(a_m - a_p) + \Delta_m - \Delta_p] = \\ &= g_m g_p \cos(\Delta_m - \Delta_p) \leq A_m A_p \sin 2\pi(a_m - a_p) + \\ &+ g_m g_p \sin(\Delta_m - \Delta_p) \leq A_m A_p \cos 2\pi(a_m - a_p). \end{aligned}$$

Mivel pedig $g_m \neq g_p$ továbbá, mivel az (1) alatti feltételek érvényesek, ezért az említett sugárnyalábok mindenike az

$$A \neq 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

feltételeknek felel meg, melyek a (14) és (15) alapján azt jelentik, hogy ezek a hasábból kihaladott, később *interferáló sugarak*, továbbá ezek *eredői* is optikai hatásaikban *természetes és síkban poláros fény sugarak keverékével* helyettesíthetők. A polározás síkja vagy a beesés síkjával *parallel*, vagy erre merőleges, a szerint, a mint A *positív* vagy *negatív*. A síkban poláros rész abból az okból származik, mert g_m és g_p értékei különbözők, azaz mert a fény töréseinél és közönséges reflexióinál a merőleges és a parallel vektorkomponensek különböző mértékben gyengülnek.

b) *A polározó a Fresnel-féle kettős tükrök és a visszaverő prisma között van.*

Kísérleti berendezésünket az 1. ábra tünteti elő azzal a változtatással, hogy az N nikol a jelen esetben az L' lencse és a prisma között van.

Ha a nikolból kilépő síkban poláros fény polározási azimuthját, azaz azt a szöget, a melyet a fényvektor a beesés síkjával

alkot, φ -val jelöljük, akkor a két koherens fénynyalábnak vektor-komponensei közvetlenül a prisma átfogó lapján történő visszaverődés *előtt* következő alakban írhatók:

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}_m)_1 = C \sin \varphi d_m e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1''}{\lambda} + c \right)} \\ (\mathfrak{B}_p)_1 = C \cos \varphi d_p e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1''}{\lambda} + c \right)} \\ (\mathfrak{B}_m)_2 = C \sin \varphi d_m e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2''}{\lambda} + c \right)} \\ (\mathfrak{B}_p)_2 = C \cos \varphi d_p e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2''}{\lambda} + c \right)} \end{cases}$$

a hol C és c csak a φ -nek függvényei, a d_m és d_p jelentései pedig az eddigiek.

E vektorok lépnek a (2) alatti vektorok helyébe, minden más tekintetben azonban az előző megfontolások most is változatlanul érvényesek, miért is az interferáló sugarak vektorait közvetlenül a (3) alatti kifejezésekből nyerjük, ha azokban az $A_m = C \sin \varphi$, $A_p = C \cos \varphi$, $f_m = f_p = r = 1$, $a_m = a_p = c$ helyettesítéseket végezzük. Ezek:

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}_m)'_1 = C \sin \varphi d_m v_m d_m' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1}{\lambda} + c \right) + \delta_m \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)'_1 = C \cos \varphi d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1}{\lambda} + c \right) + \delta_p \right]} \\ (\mathfrak{B}_m)''_1 = C \sin \varphi d_m v_m d_m' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1}{\lambda} + c \right) + \delta_m \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)''_1 = C \cos \varphi d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_1}{\lambda} + c \right) + \delta_p \right]} \\ (\mathfrak{B}_m)'_2 = C \sin \varphi d_m v_m d_m' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2}{\lambda} + c \right) + \delta_m \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)'_2 = C \cos \varphi d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2}{\lambda} + c \right) + \delta_p \right]} \\ (\mathfrak{B}_m)''_2 = C \sin \varphi d_m v_m d_m' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2}{\lambda} + c \right) + \delta_m \right]} \\ (\mathfrak{B}_p)''_2 = C \cos \varphi d_p v_p d_p' r' e^{i \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{s_2}{\lambda} + c \right) + \delta_p \right]} \end{cases} \dots (17)$$

1. Az $'$ -vel jelölt sugarak interferenciájával könnyen végezhetünk.

Ugyanis e sugaraknál a beesés síkjára merőleges vektor-komponensek phasiskülönbsége ugyanaz, mint a beesés sík-

jával párhuzamos vektorösszetevők phasisdifferentiája, sőt e közös differentia: $2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda}$ megegyezik azzal, melyet az előbbi a) esetben a 'ös sugarak komponensei között találtunk. Ezért az intenzitás szélső értékei ugyanott vannak, a hol azokat az említett esetben találtuk.

Tehát az intenzitás maximum, ha

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = 0 \quad \pm 2\pi \quad \pm 4\pi \dots$$

és minimum, ha

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \pm \pi \quad \pm 3\pi \dots$$

Az intenzitás *maximuma*:

$$4C^2 v'^2 (d_m^2 d_m'^2 v_m^2 \sin^2 \varphi + d_p^2 d_p'^2 v_p^2 \cos^2 \varphi),$$

ellenben *minimuma*: 0, azaz az interferentiarendszer *fényes* és *egészen sötét* csíkokból áll.

2. A ''-ös sugarak interferentiájával már nem végezhetünk ily egyszerűen. E sugarak eredőjének vektorkomponensei:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_m'' &= (\mathfrak{B}_m)''_1 + (\mathfrak{B}_m)''_2 = V_m'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma_m''}{\lambda} + c \right)}; \\ \mathfrak{B}_p'' &= (\mathfrak{B}_p)''_1 + (\mathfrak{B}_p)''_2 = V_p'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma_p''}{\lambda} + c \right)}; \end{aligned}$$

a hol

$$\begin{aligned} V_m'' &= (C \sin \varphi d_m d_m' v')^2 \left[v_m^2 + v_m'^2 + 2v_m v_m' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_m' - \delta_m \right) \right]; \\ V_p'' &= (C \cos \varphi d_p d_p' v')^2 \left[v_p^2 + v_p'^2 + 2v_p v_p' \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta_p' - \delta_p \right) \right]; \end{aligned}$$

a σ_m'' és σ_p'' pedig azokat az értékeket jelentik, a melyeket a (10) alatti egyenletek határoznak meg.

Az eredő fény intenzitása:

$$J'' = V_m'' + V_p'';$$

ez ott veszi fel szélső értékeit, a hol állandó φ mellett, az

$$J'' = 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda}$$

kielégíti a

$$d_m^2 d'_m{}^2 v_m v'_m \sin^2 \varphi \sin(x''_0 + \delta'_m - \delta_m) + \\ + d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p \cos^2 \varphi \sin(x''_0 + \delta'_p - \delta_p) = 0$$

egyenletet.

Ez egyenletből

$$x''_0 = \arctg \frac{\sin(\delta_m - \delta'_m) + \frac{d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p \cos^2 \varphi}{d_m^2 d'_m{}^2 v_m v'_m \sin^2 \varphi} \sin(\delta_p - \delta'_p)}{\cos(\delta_m - \delta'_m) + \frac{d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p \cos^2 \varphi}{d_m^2 d'_m{}^2 v_m v'_m \sin^2 \varphi} \cos(\delta_p - \delta'_p)} = \xi_\varphi \pm k\pi.$$

Tehát J'' értéke maximum a

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi_\varphi, \quad \xi_\varphi \pm 2\pi, \quad \xi_\varphi \pm 4\pi, \dots$$

és minimum a

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi_\varphi \pm \pi, \quad \xi_\varphi \pm 3\pi \dots$$

értékeknél.

Az eredő fény intenzitásának (az J''_φ -nek) szerkezete, nem tekintve a konstans tényezőket, teljesen ugyanaz, mint a milyen az a) esetben az J'' volt. Ezért azonnal belátható, hogy az interferencia rendszer minimumai itt is *nem teljesen sötét* csíkok, továbbá, hogy az J''_φ változó részének maximuma

$$+ \sqrt{C_m^2 + C_p^2 + 2C_m C_p \cos(x_p - x_m)}$$

és minimuma

$$- \sqrt{C_m^2 + C_p^2 + 2C_m C_p \cos(x_p - x_m)},$$

ha x_m és x_p -nek a régi jelentésük, C_m és C_p -nek pedig a következő jelentésük van:

$$C_m = 2C_r'^2 d_m^2 d'_m{}^2 v_m v'_m \sin^2 \varphi; \\ C_p = 2C_r'^2 d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p \cos^2 \varphi.$$

Az előzőkből következik, hogy a csikok eltolódását meghatározó általános formula ismét, mint (12*)-nél

$$\xi_{\varphi} = \arctg \frac{\sin \delta_m - \delta'_m + \rho \sin (\delta_p - \delta'_p)}{\cos (\delta_m - \delta'_m) + \rho \cos (\delta_p - \delta'_p)} \quad (18^*)$$

a hol azonban ρ -nak következő jelentése van:

$$\rho = \frac{d_p d_p'^2 v_p v_p'}{d_m^2 d_m'^2 v_m v_m'} \cotg^2 \varphi. \quad (18)$$

A (17) alatti vektorkifejezések alapján könnyen beláthatjuk, hogy mind a négy, a prismából kihaladó, *később interferáló sugárnyaláb*, ha a prisma átfogólapján végbemenő reflexió *partialis*, síkban polározott, ha ellenben a reflexió *totalis*, *ellipszisben* polározott. Ugyanez érvényes az '-ős sugarak *eredőjére* nézve is. A "-ős sugarak *eredője* a polározás tekintetében az előzőktől lényegesen *eltér*, mert e sugarak *eredője* nemcsak hogy minden beesési szögnél *általánosságban ellipszisben* polározott, hanem ezenkívül a polározási állapota az interferentia-rendszer két szomszédos maximuma között, azaz a csikköz *különböző helyein más és más*. A (10) alatti formulák segítségével ugyanis könnyen kimutatható, hogy a "-ős sugarak *eredőjének* m és p összetevője közötti phasiskülönbség tangense:

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\sigma_m'' - \sigma_p''}{\lambda} =$$

$$\frac{v_m v_p \sin (\delta_p - \delta_m) + v_m v_p' \sin (x + \delta_p' - \delta_m) + v_m' v_p \sin (-x + \delta_p - \delta_m') + v_m' v_p' \sin (\delta_p' - \delta_m')}{v_m v_p \cos (\delta_p - \delta_m) + v_m v_p' \cos (x + \delta_p' - \delta_m) + v_m' v_p \cos (-x + \delta_p - \delta_m') + v_m' v_p' \cos (\delta_p' - \delta_m')};$$

mely, mint látható, az $x = 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda}$ értékektől is függ.

Lássuk a sugarak polározási állapotát a *partialis reflexió* alkalmával.

Ha a fény *partialisan* verődik vissza, akkor $\delta_p - \delta_m$, $\delta_p' - \delta_m'$, $\delta_p - \delta_m'$ és $\delta_p' - \delta_m'$ különbségek értéke vagy 0, vagy $\pm \pi$. Ez esetben az interferentia-rendszer csikkjai (a világos és sötétebb csikok) a (18*) alapján az $x=0$, $\pm \pi$, $\pm 2\pi \dots$ értékeknél van-

nak. S ha már most az x -nek és a δ -ákból alkotott különbségeknek értékeit a fenti kifejezésbe helyettesítjük, nyerjük, hogy az m és p összetevők phasiskülönbsége vagy 0, vagy π . Eszerint az eredő fény a *partialis reflexió* alkalmával az interferencia-rendszer *maximumai és minimumai helyén síkban* polározott; a maximumok és minimumok közötti *közben* ellenben, a hol x értéke 0-tól és $\pm k\pi$ -től különbözik, *ellipszisben* van polározva.

Az előzők alapján könnyen meggyőződhetünk arról is, hogy ha a fényt nem a FRESNEL-féle kettős tükör és a prisma között, hanem a FRESNEL-féle kettős tükör előtt polároztuk volna, akkor ρ -nak értéke a következő volna:

$$\rho = \frac{f_p^2 d_p^2 d_p'^2 v_p v_p'}{f_m^2 d_m^2 d_m'^2 v_m v_m'} \cotg^2 \varphi, \quad (19)$$

a hol f_m és f_p a már a (2)-ben előforduló, a kettős tükörön végbemenő reflexió folytán fellépő két FRESNEL-féle tényező.

Az interferáló és az eredő sugárnyalábok polározási állapota vonatkozólag az épen fentebb mondottak érvényesek.

c) *A polározó a prisma és az észlelő szeme között van.*

Kísérleti összeállításunkat az 1. ábra tünteti elő.

Ez az összeállítás ama berendezéstől, a melyre az a) alatti eredmények érvényesek, csak abban különbözik, hogy a (3) alatti vektorokkal definiált fénysugarak még egy analizáló nikolon is keresztülhaladnak.

Az interferáló sugarak vektorait tehát könnyen meghatározhatjuk.

Ismeretes ugyanis, hogy a nikolból kilépő fény vektorát nyerjük, ha a nikolba belépő fény vektorát a nikol rövidebb diagonálisán és a fénysugáron keresztül fektetett síkra (mely a vízszintes sikkal pl. ω szöget alkot) vetítjük s e vetületet egy az egységnél kisebb v valós számmal szorozzuk.

A nikolba belépő fény vektorkomponensei a (3) alatti kifejezések. E vektorokat kell az említett síkra vetíteni. S így az interferáló sugarak vektorai, ha $(\mathfrak{B}_m)_i^k$, $(\mathfrak{B}_p)_i^k$ $i, k=1, 2$ -nak a (3) alatti jelentésük van:

$$(\mathfrak{V}_\omega)_1' = \nu [(\mathfrak{V}_m)_1' \sin \omega + (\mathfrak{V}_p)_1' \cos \omega]$$

$$(\mathfrak{V}_\omega)_1'' = \nu [(\mathfrak{V}_m)_1'' \sin \omega + (\mathfrak{V}_p)_1'' \cos \omega]$$

$$(\mathfrak{V}_\omega)_2' = \nu [(\mathfrak{V}_m)_2' \sin \omega + (\mathfrak{V}_p)_2' \cos \omega]$$

$$(\mathfrak{V}_\omega)_2'' = \nu [(\mathfrak{V}_m)_2'' \sin \omega + (\mathfrak{V}_p)_2'' \cos \omega].$$

A ' -vel jelölt sugarak eredőjét a

$$\mathfrak{V}_\omega = \nu [(\mathfrak{V}_m)_1' + (\mathfrak{V}_m)_2'] \sin \omega + \nu [(\mathfrak{V}_p)_1' + (\mathfrak{V}_p)_2'] \cos \omega$$

vektor, a ''-ös sugarak eredőjét pedig a

$$\mathfrak{V}_\omega'' = \nu [(\mathfrak{V}_m)_1'' + (\mathfrak{V}_m)_2''] \sin \omega + \nu [(\mathfrak{V}_p)_1'' + (\mathfrak{V}_p)_2''] \cos \omega$$

vektor jellemzi.

A (4), illetve a (8) alatti értékek helyettesítésével nyerjük, hogy

$$\mathfrak{V}_\omega = \nu \mathfrak{V}_m' \sin \omega + \nu \mathfrak{V}_p' \cos \omega = \nu V_\omega' e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \mu' \right)}$$

$$\mathfrak{V}_\omega'' = \nu \mathfrak{V}_m'' \sin \omega + \nu \mathfrak{V}_p'' \cos \omega = \nu V_\omega'' e^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \mu'' \right)},$$

a melyekben

$$V_\omega'^2 = V_m'^2 \sin^2 \omega + V_p'^2 \cos^2 \omega +$$

$$+ 2 V_m' V_p' \sin \omega \cos \omega \cos \left[2\pi \left(\frac{\sigma_p' - \sigma_m'}{\lambda} + a_m - a_p \right) + \delta_m - \delta_p \right]$$

$$V_\omega''^2 = V_m''^2 \sin^2 \omega + V_p''^2 \cos^2 \omega +$$

$$+ 2 V_m'' V_p'' \sin \omega \cos \omega \cos 2\pi \left(\frac{\sigma_p'' - \sigma_m''}{\lambda} + a_m - a_p \right)$$

jelentik.

Ha már most az amplitudók eme kifejezéseibe az (5), illetve a (9) értékeket helyettesítjük, s a STOKES-féle feltételeket (1) figyelembe vesszük, könnyen beláthatjuk, hogy az ' -ös fény-nyaláb intenzitása

$$J_\omega' = \leq V_\omega'^2 =$$

$$= J \left(1 + \cos 2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} \right) r^2 r'^2 [f_m^2 d_m^2 v_m^2 d_m'^2 \sin^2 \omega + f_p^2 d_p^2 v_p^2 d_p'^2 \cos^2 \omega], \quad (20)$$

a ''-ös sugárnyalábé pedig:

$$J'' = \leq V''^2 = \\ = \frac{J}{2} r^2 r'^2 \left\{ f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 \sin^2 \omega \left[v_m^2 + v'_m{}^2 + 2v_m v'_m \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta'_m - \delta_m \right) \right] + \right. \\ \left. + f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 \cos^2 \omega \left[v_p^2 + v'_p{}^2 + 2v_p v'_p \cos \left(2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} + \delta'_p - \delta_p \right) \right] \right\}. \quad (21)$$

Tehát állandó ω mellett a (7) szerint is, J'' maximum, ha

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = 0, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 4\pi \dots$$

minimum pedig, ha

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \quad \pm \pi, \quad \pm 3\pi \dots$$

Az J'' ellenben, szintén állandó ω mellett, a (11) szerint maximális értékeket vesz fel a

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \xi_\omega, \quad \xi_\omega \pm 2\pi \dots$$

helyeken, minimálisakat pedig a

$$2\pi \frac{s_1 - s_2}{\lambda} = \quad \xi_\omega \pm \pi, \quad \xi_\omega \pm 3\pi \dots$$

helyeken, ha ξ_ω a (18*) szerint a következő függvényt jelenti:

$$\xi_\omega = \arctg \frac{\sin(\delta_m - \delta'_m) + \rho \sin(\delta_p - \delta'_p)}{\cos(\delta_m - \delta'_m) + \rho \cos(\delta_p - \delta'_p)},$$

a hol

$$\rho = \frac{f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 v_p v'_p}{f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 v_m v'_m} \cotg^2 \omega. \quad (22)$$

Tehát a csikeltolódás teljesen azonos azzal az eltolódással, mely akkor áll elő, ha a fényt a FRESNEL-féle kettős tükör előtt ugyanabban az ω azimuthban polározzuk (19).

Állandó ω mellett (20)-ból az J'' maximuma:

$$2Jr^2r'^2 (f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 v_m^2 \sin^2 \omega + f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 v_p^2 \cos^2 \omega),$$

ellenben minimuma 0, azaz a ' -ös sugarak interferentiarendszere fényes és egészen sötét csikokból áll.

Hasonlóképen *állandó* ω mellett (21)-ből az J'' változó részének maximuma a (18*)-at megelőző fejtegetések szerint:

$$+ \sqrt{G_m^2 + G_p^2 + 2G_m G_p \cos(x_p - x_m)}$$

és minimuma:

$$- \sqrt{G_m^2 + G_p^2 + 2G_m G_p \cos(x_p - x_m)},$$

a hol

$$G_m = Jr^2 r'^2 f_m^2 d_m'^2 v_m v_m' \sin^2 \omega;$$

$$G_p = Jr^2 r'^2 f_p^2 d_p'^2 v_p v_p' \cos^2 \omega.$$

Tehát a "-ős sugarak interferentiarendszerének maximumai *világosak*, de minimumai *nem egészen sötétek*.

Úgy az *interferáló*, mint az *eredő* sugárnyalábok *ugyanabban a síkban*, ugyanis a nikol polározási síkjában polározottak.

Végül még megemlítem azt, hogy ha a prizmat polározó és analizáló nikolok közé iktatjuk, akkor a csikeltolódást szolgál-tató általános (12*) formulánkban

$$\rho = \frac{d_p^2 d_p'^2 v_p v_p'}{d_m^2 d_m'^2 v_m v_m'} \cotg^2 \varphi \cotg^2 \omega, \quad (23)$$

hol φ a polározó, ω pedig az analizáló nikol azimuthját jelenti.

5. §. Az elméleti formulák elemzése.

Előző eredményeinkből kitűnik, hogy a csikok eltolódását minden esetben, akár polározzuk a fényt, akár pedig nem, fenti (12*)

$$x = \arctg \frac{\sin(\delta_m - \delta_m') + \rho \sin(\delta_p - \delta_p')}{\cos(\delta_m - \delta_m') + \rho \cos(\delta_p - \delta_p')} \quad (24)$$

szerkezetű függvény fejezi ki, melyben a ρ értéke egy és ugyanannál a beesési szögnél a fény polározási állapotának megfelelőleg különböző.

Ha tehát kísérleti egybeállításunkban mindent változtatlanul megtartva, csak a polározó nikolt különböző helyen iktatjuk közbe, vagy azt teljesen eltávolítjuk, akkor a csikok eltolódása csak annyiban változik meg, a mennyiben a nikol helyzetének meg-

változtatásával a ρ értéke is megváltozik. E ρ három különböző értékű lehet:

a) Ha a fényt nem polározzuk:

$$\rho = \frac{f_p^2 d_p^2 v_p v'_p}{f_m^2 d_m^2 v_m v'_m}. \quad (12)$$

b) Ha a fényt a FRESNEL-féle kettős tükör és a prisma között ω azimuthban polározzuk:

$$\rho = \frac{d_p^2 d_p'^2 v_p v'_p}{d_m^2 d_m'^2 v_m v'_m} \cotg^2 \omega. \quad (18)$$

c) S végül, ha bárhol csaknem a FRESNEL-féle kettős tükör és a prisma között polározzuk:

$$\rho = \frac{f_p^2 d_p^2 v_p v'_p}{f_m^2 d_m^2 v_m v'_m} \cotg^2 \omega. \quad (19), \text{ illetve } (22)$$

Jelöljük az $\omega=0^\circ$ azimuthhoz tartozó, tehát a beesés síkjára merőlegesen polározott fénnyel létrehozott eltolódást, a $\delta_p - \delta'_p$ -t x_p -vel; hasonlóan az $\omega=90^\circ$ -hoz tartozó, tehát a beesés síkjában polározott fénnyel előállított eltolódást, a $\delta_m - \delta'_m$ -t x_m -mel, akkor x fenti (24) értéke

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\sin x_m + \rho \sin x_p}{\cos x_m + \rho \cos x_p}$$

alakban írható, a hol x -nek csak a megfelelő x_m és x_p közé eső értéke jön tekintetbe.

Ez x_p és x_m értékeit idézett dolgozatomban meghatároztam és ez értékeknek a fény beesésszögétől való függését rajzban is előtűnttettem.

Ez x_p és x_m értékei a következők (Math. és Természettud. Ért. XXXII. köt. 25—26. old.):

1. Ha a folyadék optikailag ritkább, mint az üveg, akkor a

$$\begin{array}{ll} 0 \leq i \leq P & \text{intervallumban } x_p = 0, \quad x_m = 0; \\ P \leq i \leq \Phi & \text{„} \quad x_p = +\pi, \quad x_m = 0; \\ \Phi \leq i \leq P' & \text{„} \quad x_p = \pi + \vartheta_p, \quad x_m = \vartheta_m; \\ P' \leq i \leq \Phi' & \text{„} \quad x_p = \vartheta_p, \quad x_m = \delta_m; \\ \Phi' \leq i \leq \frac{\pi}{2} & \text{„} \quad x_p = \vartheta_p - \vartheta'_p, \quad x_m = \delta_m - \delta'_m; \end{array} \quad (25)$$

2. ha pedig a folyadék optikailag sűrűbb mint az üveg, akkor a

$$\begin{array}{ll} 0 \leq i \leq P & \text{intervallumban } x_p = -\pi, \quad x_m = -\pi; \\ P \leq i \leq \phi & \text{" } x_p = 0, \quad x_m = -\pi; \quad (26) \\ \phi \leq i \leq P' & \text{" } x_p = \vartheta_p, \quad x_m = \vartheta_m - \pi; \\ P' \leq i \leq \frac{\pi}{2} & \text{" } x_p = \vartheta_p - \pi, \quad x_m = \vartheta_m - \pi; \end{array}$$

a hol P az üveg-levegő, P' az üveg-folyadék határfelületről történő visszaverődéshez tartozó polározás-szögleteket, ϕ illetve ϕ' pedig az idetartozó totális reflexió határszögleiteit jelenti.

Az x_m és x_p ez értékei abban az esetben érvényesek, ha a közegek határfelületén külön felületi réteg nincs.

Ily felületi rétegek csakis a polározási szögletek közelében befolyásolhatják észrevehetően a jelenséget, a totális reflexiónál ellenben hatásuk elenyésző csekély.¹ Ez az oka annak, hogy előző dolgozatunkban e hatást figyelembe nem vettük. Most azonban, midőn e jelenség általános elméletéről szólnunk, e hatást is tekintetbe kell vennünk.

E felületi réteg zavaró hatása csakis a fény partialis reflexiója alkalmával, és ott is csupán az x_p értékeiben nyilvánul, még pedig abban, hogy az x_p értékének a polározási szögletnél bekövetkező π nagyságú változása nem ugrásszerűen, hanem folytonosan, bár igen gyorsan történik. Az x_p -t meghatározó ϑ_p és ϑ_p' phasisváltozásoknak a fény partialis reflexiója alkalmával a fény beesési szögétől való függését CAUCHY² s utána még mások állapították meg.

A CAUCHY-féle formulának a tapasztalattal való egyeztetését többek között QUINCKE³ végezte oly módon, hogy egy üvegháromszög határfelületének egy részét fémtükrrel vonta be, s a prizmanak a levegővel érintkező határfelületéről visszavert fény phasisát e fémtükréről reflektált fény phasisával hasonlította össze.

¹ P. DRUDE: Wied. Ann. 43. 146. 1891. .

² A. CAUCHY: Compt. Rend. 9 p. 730. 1839.

³ G. QUINCKE: Pogg. Ann. 142. p. 177. 1871.

E QUINCKE-féle dolgozat felemlítését megelőző dolgozatomban elmulasztottam, mit ezennel pótlók.

Az x_p és x_m értékeire vonatkozó eme kitérésünk után ráterhetünk az x (24) értékeinek tárgyalására.

Az x értéke mindenütt a megfelelő x_p és x_m értékek közé esik, tehát az x görbe mindenütt az idézett hely 27 lapján előtüntetett x_p és x_m görbék között halad. Könnyű tehát az x értékének a beesés szögétől való függését követni.

Az x értéke P -nél csak kevéssel is kisebb beesési szögek-nél, ω minden értékénél, az üvegnél optikailag ritkább folyadék esetén zérustól, az üvegnél optikailag sűrűbb folyadék esetén pedig $-\pi$ -től észrevehetően nem tér el (felületi rétegtől teljesen ment közegek esetén az x értéke szigorúan 0, illetőleg $-\pi$).

A csikeltolódást meghatározó (24) formula a P és ϕ közötti intervallumban határozatlan, mert e képlet itt a csikeltolódás számára több értéket, ugyanis 0 és $\pm\pi$ értéket nyújt. Hogy ez értékek melyike felel meg a valóságnak, azt némi meg gondolással könnyen meghatározhatjuk.

Az eredő interferentiarendszer két interferentiarendszerből tevődik össze.

Ugyanis az eredő fénynek úgy az m , mint a p összetevője egymástól függetlenül egy-egy interferentiarendszert nyújt. Ez interferentiarendszerek egyikének maximumai (25), illetve (26) szerint a P és ϕ közötti intervallumban a másik rendszer minimumaival esnek egybe és viszont. Ezért az eredő interferentiarendszer intenzitása e két interferentiarendszer intenzitásának algebrai összegével egyenlő. A szerint tehát, a mint az m komponens interferentiarendszerének maximumai helyén az eredő fény intenzitása nagyobb vagy kisebb a p komponens interferentiarendszerének maximumai helyén lévő eredő intenzitás-nál, az eredő interferentiarendszer maximumai az m , illetve a p komponens interferentiarendszerének maximumaival esnek egybe.

Hogy meghatározott ténybeli körülményekhez kössük gondolatmenetünket, vegyük fel, hogy a folyadék optikai sűrűsége kisebb az üvegénél.

A ω -ös sugarak eredőjének intenzitását a (21) alatti képlet nyújtja, mely a P és ϕ közötti intervallumban

$$(\text{hol } x_m = \delta_m - \delta'_m = 0, \quad x_p = \delta_p - \delta'_p = \pi)$$

a következőkép állítható elő:

$$J'' = \frac{J}{2} r^2 r'^2 \{ f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 \sin^2 \omega (v_m^2 + v'_m{}^2 + 2v_m v'_m \cos x) + \\ + f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 \cos^2 \omega (v_p^2 + v'_p{}^2 - 2v_p v'_p \cos x) \}.$$

Ez eredő fény intenzitása: az $x = \pm 2k\pi$ helyeken

$$\left. \begin{aligned} I_{x=0} &= \frac{J}{2} r^2 r'^2 \{ f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 (v_m + v'_m)^2 \sin^2 \omega + f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 (v_p - v'_p)^2 \cos^2 \omega \}, \\ \text{az } x &= \pm k\pi \text{ helyeken:} \\ I_{x=\pi} &= \frac{J}{2} r^2 r'^2 \{ f_m^2 d_m^2 d'_m{}^2 (v_m - v'_m)^2 \sin^2 \omega + f_p^2 d_p^2 d'_p{}^2 (v_p + v'_p)^2 \cos^2 \omega \}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Forgassuk a nikolt s vizsgáljuk meg e két intenzitás egymáshoz való viszonyát.

Az $\omega = 0^\circ$ -nál

$$\left(\frac{I_{x=0}}{I_{x=\pi}} \right)_{\omega=0} = \left(\frac{v_p - v'_p}{v_p + v'_p} \right)^2$$

kisebb az egységnél, ellenben az $\omega = 90^\circ$ -nál

$$\left(\frac{I_{x=0}}{I_{x=\pi}} \right)_{\omega=90^\circ} = \left(\frac{v_m + v'_m}{v_m - v'_m} \right)^2$$

nagyobb az egységnél.

Tehát $\omega = 0^\circ$ -nál az intenzitás maximumai $x = \pm k\pi$ -nél vannak, azaz itt a csikeltolódás π ; $\omega = 90^\circ$ -nál ellenben az intenzitás maximumai az $x = \pm 2k\pi$ helyeken fekszenek, azaz itt a csikeltolódás 0.

Ha a nikolt $\omega = 0^\circ$ -ból kiindulólág elforgatjuk, akkor az intenzitások (27) alatti kifejezéseiben szereplő első összeadandók folytonosan nőnek, a második összeadandók ellenben folytonosan fogynak. A két intenzitás közötti különbség mindinkább kisebbedik s végre bizonyos ω_0 azimuthnál teljesen eltűnik. Az

$$I_{x=0} = I_{x=\pi}$$

egyenlőség a nikolnak azt az

$$\omega_0 = \arctg \sqrt{\frac{f_p^2 d_p^2 d_p'^2 v_p v_p'}{f_m^2 d_m^2 d_m'^2 v_m v_m'}} \quad (28)$$

azimuthját határozza meg, melynél a " -ős interferentiarendszer teljesen eltűnik s helyén egyenletesen megvilágított látótér keletkezik. Minthogy a $v_p v_p'$ szorzat a P és P' polározási szögeklet között a $v_m v_m'$ -hoz képest igen csekély, ezért az ω_0 csak igen kis szög lehet.

A nikol további elforgatásánál az intenzitás-különbség ismét előáll, de most az $I_{x=0}$ nagyobb az $I_{x=\pi}$ -nél, azaz a csikeltolódás állandóan 0.

Hasonlóan állapítjuk meg azt, hogy ha a folyadék az üvegnél optikailag sűrűbb, akkor a csikeltolódás az $0 \leq \omega < \omega_0$ intervallumban mindenütt 0, az $\omega_0 < \omega \leq 90^\circ$ közben pedig $-\pi$.

Összefoglalva a két esetet, nyerjük, hogy a csikeltolódás értéke, az x az ω_0 határazimuthnál nagyobb összes ω -kra nézve ($\omega_0 < \omega \leq 90^\circ$) az x -nek az $\omega = 90^\circ$ -hoz tartozó értékével (azaz, az üvegnél optikailag ritkább folyadék esetén $x_m = 0$ -val, az üvegnél optikailag sűrűbb folyadék esetén pedig $x_m = -\pi$ -vel) egyenlő; az ω_0 -nál kisebb minden azimuthban pedig az $\omega = 0^\circ$ -hoz tartozó (x_p -nek a $+\pi$ -től, illetve a 0-tól kevéssel különböző) értékével egyenlő. A $+\pi$ -től illetve a 0-tól való eltérést a felületi réteg okozza.

Mivel e két értékrendszer határát alkotó ω_0 szög igen kicsiny, ezért az átmenetnél az

$$\frac{I_{x=0}}{I_{x=\pi}} = \frac{f_m d_m^2 d_m' (v_m + v_m')^2 + f_p^2 d_p^2 d_p' (v_p - v_p')^2 \cotg^2 \omega}{f_m^2 d_m^2 d_m' (v_m - v_m')^2 + f_p^2 d_p^2 d_p' (v_p + v_p')^2 \cotg^2 \omega}$$

viszony értéke rohamosan változik. Ennek következménye az, hogy az egyik rendszerből a másikba való átmenet a nikol forgatásakor szinte ugrásszerűen történik.

A P' szögletnél nagyobb beesési szögek esetén az x értéke az ω azimuth-tal az x_m és x_p között folytonosan és monoton változik.

6. §. Kísérleti igazolások.

A következőkben kísérleti megfigyeléseimet ismertetem.

Kísérleteimhez több üvegprismát és különböző folyadékot

(vizet, alkoholt, æthert, benzolt, toluolt, petroleumæthert, szénkéneget, α -bromnaphtalint, metylenjodidot) használtam. E folyadékok közül a hat első folyadék optikailag ritkább, a három utóbbi ellenben optikailag sűrűbb a használt üvegprizmáknál.

a. Előbb azt a jelenséget ismertetjük, mely akkor észlelhető, ha az edényke az üvegnél optikailag *ritkább* folyadékot tartalmaz.

A normális beesés és a P polározás-szöglet közötti intervallum kevésbé érdekes, mert itt a két csikrendszer maximumai és minimumai függetlenül a fény polározásbeli állapotától egymás folytatásába esnek, úgy, miként azt a kifejtett elmélet is kívánja.

Sokkal tanulságosabb a P és P' polározási szögletek közötti intervallum. Ez intervallumban a következő érdekes jelenséget észleltük:

Induljunk ki a nikolnak abból az állásából, a melynél a fény a beesés síkjában polározott; forgassuk ezután a nikolt lassan a fénysugár körül, mint tengely körül, és figyeljük meg a csikok eltolódásának változását egy teljes körülforgatása közben.

A kiindulást képező állásban a két csikrendszer csikjai egymás folytatásába esnek. A nikol lassú forgatásakor, nem tekintve a fény intenzitásának változását, jó ideig semmi változás sem észlelhető, egyszerre azonban, mikor a nikolt a kiindulást képező állásából már csaknem 90° -kal forgattuk el, mikor tehát a fény polározás-síkja már csak néhány fokot, az előbbi §-ban a (28) képlettel definiált ω_0 -t alkot a beesés síkjának normálisával, akkor a "-ös interferentiarendszer csikjai eltűnnek és ugrásszerűen körülbelül $\frac{1}{2}$ csikközzel a *folyadékról visszavert fény felé* tolódnak el. E csikeltolódás a nikol további elforgatásakor változatlanul megmarad mindaddig, a míg a fény polározás-síkja a beesés síkjának fent említett normálisával (a normálison túl) ugyanakkora szöget ω_0 alkot, a mekkorát a normálison innen a hirtelen változás alkalmával alkotott. A csikok e szögletnél ismét ugrásszerűen megváltoznak, még pedig az előbbi állásukba, a *levegőről visszavert fénynyaláb felé* tolódnak vissza. Ha a nikolt a kiindulást képező állásából számítva már $270^\circ - \omega_0$ szöglettel forgattuk el, akkor az előbbi jelenség ismétlődik: a csikok $270^\circ - \omega_0$ -nál ugrásszerűen körülbelől

$\frac{1}{2}$ hullámhosszal ismét a folyadékról visszavert fény felé tolód-
nak el, a $270^\circ + \omega_0$ foknál pedig ismét a levegőről visszavert
fény felé tolódnak vissza; szóval a jelenség ugyanolyan, mint
a $90^\circ - \omega_0$ és a $90^\circ + \omega_0$ polározási azimuthok között.

Különböző folyadékkal végzett kísérleteim azt igazolták,
hogy a csikoknak az imént leírt $\frac{1}{2}$ hullámhosszal való eltoló-
dása mindenkor a folyadékról visszavert fény felé, azaz elmé-
leti fejtegetéseinknek megfelelőleg pozitív irányban történik.

Az üvegprismának accidentális kettős törése nagy mérték-
ben befolyásolhatja a jelenséget. Ha azonban oly prismát hasz-
nálunk, mely e kettős töréstől mentes (két ily prismával kísérle-
teztem), akkor e jelenségre már csak a felületi réteg a CAUCHY-
féle elméletnek megfelelőleg (miként azt quantitativ méréseimből
következtetem) okozhat észrevehető befolyást.

A csikok a I' polározásszöglet közelében az interferáló su-
garak nagy intenzitás-különbsége folytán teljesen határozatlanok,
de a szöglettől csak kissé is távolabb oly élesek és határozot-
tak, hogy a csikok eltolódása quantitativ mérésre is igen alkalmas.

A csikeltolódás, x , az üveg-folyadék határfelületről történő
visszaverődéshez tartozó polározás szöglet, I'' , és a rasans be-
esés között a nikol forgatásával folytonosan megy át az x_m érté-
kéből az x_p értékebe és viszont.

Az x_m és az x_p értékeit előző dolgozatomban (Math. és
Természettud. Ért. XXXII. köt. 29. old.) több beesés-szögnél
meghatároztam. A következő táblázatos összeállításban pedig
azokat a mérési eredményeket foglalom össze, a melyeket a 45°
azimuthban polározott és a nem polározott fény esetében ész-
leltem.

Quantitativ észleléseimhez vizet és ugyanazt az üvegprismát
használtam, melylyel a teljes fényvisszaverődés abszolút phasis-
változását vizsgáltam.

A két táblázat négy mérési sorozatot tartalmaz. Mindkét
táblázatban az első mérési sorozat eredményei nem polározott
fény esetére érvényesek. A táblázatok második csoportja ellen-
ben 45° azimuthban polározott fényre vonatkozik. Az egyik
esetben a prismából kilépő, a másik esetben pedig a prismába
belépő fényt polároztuk.

| A csikeltolódás szögmértékben | | | | | | |
|-------------------------------|------------------------|-----------|---------|---|-----------|---------|
| Beesés- szög | A fény nincs polározva | | | A prismából kilépő fény 45° azimuthban van polározva | | |
| | észlelt | számított | különb. | észlelt | számított | különb. |
| 45° | + 48.6° | + 43.5° | +5.1° | + 48.9° | + 43.5° | +5.4° |
| 50° | 73.6 | 69.1 | +4.5 | 72.9 | 69.1 | +3.8 |
| 55° | 89.0 | 89.6 | —0.6 | 93.7 | 89.6 | +4.1 |
| 59° | 107.7 | 104.1 | +3.6 | 109.9 | 104.1 | +5.8 |
| 60° | 108.4 | 107.8 | +0.6 | 111.4 | 107.8 | +3.6 |
| 61° | 100.1 | 95.3 | +4.8 | 99.4 | 95.3 | +4.1 |
| 65° | 59.7 | 57.9 | +1.8 | 60.2 | 57.9 | +2.3 |
| 70° | 42.0 | 39.2 | +2.8 | 41.3 | 39.2 | +2.1 |
| 75° | 27.4 | 26.9 | +0.5 | 26.7 | 26.9 | —0.2 |
| 80° | 18.6 | 17.1 | +1.5 | 16.8 | 17.1 | —0.3 |

| A csikeltolódás szögmértékben | | | | | | |
|-------------------------------|------------------------|-----------|---------|---|-----------|---------|
| Beesés- szög | A fény nincs polározva | | | A prismába belépő fény 45° azimuthban polározott | | |
| | észlelt | számított | különb. | észlelt | számított | különb. |
| 45° | + 46.0° | + 45.3° | +0.7° | + 44.3° | + 46.8° | —2.5° |
| 50° | 71.3 | 73.0 | —1.7 | 77.3 | 75.7 | +1.6 |
| 55° | 95.6 | 94.9 | +0.7 | 94.6 | 98.2 | —3.6 |
| 60° | 111.7 | 113.5 | —1.8 | 114.4 | 116.8 | —2.4 |
| 65° | 59.2 | 60.9 | —1.7 | 62.2 | 62.6 | —0.4 |
| 70° | 41.1 | 41.2 | —0.1 | 40.9 | 42.2 | —1.3 |
| 75° | 28.7 | 28.3 | +0.4 | 29.4 | 29.0 | +0.4 |
| 80° | 18.1 | 18.0 | +0.1 | 17.6 | 18.4 | —0.8 |

A számított értékeket előző formuláimból és a FRESNEL-féle képletekből a fény beesés-szögeinek és a közegek törésmutatóinak ismeretével számítottam ki.

Az első táblázat eredményei oly megfigyelésekre vonatkoznak, melyekben a fény 79°16' alatt esett a FRESNEL-féle tükörrre. E beesési szöghöz tartozó FRESNEL-féle tényezők viszonya

$$\frac{f_p}{f_m} = 0.6306$$

az egységtől jelentékenyen eltér s ezenkívül e szög közelében e viszony rohamosan változik. Valószínűleg ennek tulajdonítandó, hogy az észlelt és számított értékek között bár kicsiny, de kevés kivétellel egyirányú eltérés van.

A második táblázat eredményei a FRESNEL-féle tükörré $86^{\circ}15'$ alatt eső fényre, azaz az $\frac{f_p}{f_m} = 0.8583$ értékre vonatkoznak; itt az eltérés egyirányú volta már alig van meg.

b. Az előzők után könnyen végezhetünk azzal az esettel, a melyben az edényke az üvegnél optikailag *sűrűbb* folyadékot tartalmaz.

Megfigyeléseim a következők:

A $0 < i < P$ intervallumban mindenütt a csíkok a fény polárizációs állapotától függetlenül a *levegőről visszavert fény felé*, tehát előbbi megállapodásunk értelmében *negatív* irányban, körülbelöl $\frac{1}{2}$ hullámhosszal vannak eltolva.

A $P < i < P'$ közben a csíkok a nikol forgatásakor épen úgy, mint az optikailag ritkább folyadékoknál szintén ugrásszerűen tolnak el. Ha a fény a beesés síkjában polárizott, akkor a csíkok a *levegőről visszavert fény felé* körülbelöl $\frac{1}{2}$ hullámhosszal vannak eltolva; az eltolódás a nikol forgatásával egy jó ideig nem változik, mikor azonban a polárizás síkja a beesés síkjának normálisával ω_0 szöget alkot, akkor a csíkok ugrásszerűen a *folyadékról visszavert fény felé* körülbelöl $\frac{1}{2}$ csíkközszel tolnak el úgy, hogy a csíkeltolódás 0; a nikol további elforgatásakor a csíkok állandóan egymás folytatásában maradnak, majd mikor a nikolt az ugrásszerű változás azimuthjától $2\omega_0$ szöggel tovább forgattuk, a csíkok ismét a *levegőről visszavert fény felé* $\frac{1}{2}$ hullámhosszal tolnak vissza s. i. t.

A $P < i < \frac{\pi}{2}$ intervallumban a csíkeltolódás folytonosan az x_m és x_p értékek között változik.

Ha az itt ismertetett kísérleti eredményeket elméleti eredményeinkkel (5. §.) összevetjük, azonnal belátjuk az *elmélet és a tapasztalat közötti teljes harmóniát*.

De megfigyeléseinkből az optikailag sűrűbb közegről vissza-

vert fény 1_2 hullámhosszal való phasisváltozásának *előjelére* vonatkozólag is fontos következtetést vonhatunk.

Kísérleti megfigyeléseim igazolták a (25) és (26) alatti értékek és előjelek helyességét.

Az előjel megállapításakor fontos az eltolódás irányának pontos ismerete.

Az eltolódás irányát jól észlelhettem, mert az interferenciacsíkok középső maximumától jobbra és balra eső első minimum fekete, a többi ellenben többé-kevésbé színes. Ezenkívül a *csíkeltolódásnak megfelelő phasisváltozások előjelét nemcsak theoretikus úton, hanem külön kísérletileg is megállapítottam* oly módon, hogy az egyik fénynyaláb útjába vékony csillám lemezt iktattam. A csíkrendszer ekkor ama fénynyaláb felé tolódott el, mely a csillámon haladt keresztül.

Láttuk azonban azt, hogy ha az optikailag sűrűbb közegről reflektálódó fénynyaláb az optikailag ritkább közegről ugyanakkora szög alatt reflektálódó fénynyalábbal interferál, akkor az interferenciacsíkok az optikailag ritkább közegről visszaverődő fény felé tolódnak el. Az eltolódás iránya tehát ellentett azzal az iránnyal, a melybe a csíkok eltolódnának, ha az optikailag sűrűbb közegről reflektálódó fény útjába csillámlemezt iktatnánk. A csillámlemez a fény phasisát késlelteti, ezért az optikailag sűrűbb közegről történő reflexió a fény phasisát az optikailag ritkább közegről reflektálódó fény phasisához képest *sietteti*.

Szigorúan ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a csíkeltolódások (25) és (26) alatti egyenleteit egyesítjük s azokból az üveg-levegő határfelületről visszaverődő fény phasisváltozásait, a δ_p és δ_m -et elimináljuk.

Ha tehát megállapodunk abban, a mi bizonyos tekintetben önkényes, hogy az optikailag ritkább közegről partialisan visszaverődő fény a visszaverődés alkalmával phasisváltozást nem szenved, akkor az előzőkből következik, hogy az optikailag sűrűbb közegről visszaverődő fény phasisa a beeső fény phasisához képest 1_2 hullámhosszal előre siet.

Ez eredményemet különösképen azért emelem ki, mert az irodalom majdnem mindenütt *phasiskésésről* szól, holott megfigyeléseim (legalább is az eddig megvizsgált közegeknél) ép az

ellenkezőt, a 1_2 hullámhosszal való pházisváltozás *pozitív* előjelét bizonyítják.

★

Végezetül legyen szabad hálás köszönetemet kifejezni báró EÖRVÖS LÓRÁND tanár úrnak mindazon támogatásért, a melylyel munkamat elmozdítani sziveskedett. Hálával tartozom továbbá FRÖBLICH IZIDOR tanár úrnak, ki szintén segített értékes tanácsaival.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 április 27.-én tartott üléséből.)

AZ EGÉSZ SZÁMOK TÖBBSZÖRÖS PARTICZIÓI.

CSORBA GYÖRGY-től.

I.

Többszörös particziókon az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$ egész számoknak a megfelelő

$$\begin{array}{l} a_{1i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ a_{2i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{ri} \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{array}$$

elemekből való olyan szimultán additív előállításait értjük, melyek mindenkében a megfelelő $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ri}$ elemek előfordulásának többszörössége egyenlő.

E feladat úgy is fogalmazható, hogy állítsuk elő nem negatív egész számokban az

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2i}x_i + \dots + a_{2n}x_n = A_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{ri}x_i + \dots + a_{rn}x_n = A_r \end{array}$$

lineáris határozatlan egyenletrendszer megoldásait, illetve határozzuk meg e megoldások számát.

Analytikailag a kérdéses szám, melyet

$$\varphi(A_1 A_2 \dots A_r)\text{-rel}$$

jelölhetünk, nem egyéb, mint

$$z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r}$$

coëfficiense az

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})}$$

raczionális egész törtfüggvénynek a z_1, z_2, \dots, z változók hatványai szerinti végtelen sorba fejtésében.

Ugyanis a tényezők kifejtéséből:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{x_i=0}^{\infty} z_1^{a_{1i} x_i} z_2^{a_{2i} x_i} \dots z_r^{a_{ri} x_i} \right) = \\ &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_n=0}^{\infty} z_1^{\sum a_{1i} x_i} z_2^{\sum a_{2i} x_i} \dots z_r^{\sum a_{ri} x_i}. \end{aligned}$$

Vonjuk össze mindazokat a tagokat, melyekben

$$\sum_i a_{1i} x_i = A_1$$

$$\sum_i a_{2i} x_i = A_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_i a_{ri} x_i = A_r,$$

és jelöljük ezek számát $\varphi(A_1 A_2 \dots A_r)$ -rel, akkor

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\ &= \sum_{A_1} \sum_{A_2} \dots \sum_{A_r} \varphi(A_1 A_2 \dots A_r) z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r}, \end{aligned} \quad (1)$$

és így valóban a $z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r}$ hatványszorzat coëfficiense egyezik az előbbi lineáris határozatlan egyenletrendszer *nem negatív* ($x_i \geq 0$) megoldásai számával.

Ugyanilyen kifejtés érvényes akkor is, ha az a_{ik} számok némelyike *negatív*, csakhogy akkor az A_k számok negatív értékeket is felvehetnek.

Az alapfüggvény másfele módon is kifejezhető a következő átalakítással:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\
& = \frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^n (z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}} - 1)} = \\
& = (-1)^n \prod_{i=1}^n \left(\sum_{x_i=1}^{\infty} z_1^{-a_{1i} x_i} z_2^{-a_{2i} x_i} \dots z_r^{-a_{ri} x_i} \right) = \\
& = (-1)^n \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=1}^{\infty} \dots \sum_{x_r=1}^{\infty} z_1^{-\sum_i a_{1i} x_i} z_2^{-\sum_i a_{2i} x_i} \dots z_r^{-\sum_i a_{ri} x_i}.
\end{aligned}$$

Vonjuk össze itt mindazokat a tagokat, melyekben

$$\sum_i a_{1i} x_i = B_1,$$

$$\sum_i a_{2i} x_i = B_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_i a_{ri} x_i = B_r;$$

és jelöljük ezek számát $\phi(B_1 B_2 \dots B_r)$ -rel, akkor

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\
& = (-1)^n \sum_{B_1} \sum_{B_2} \dots \sum_{B_r} \phi(B_1 B_2 \dots B_r) z_1^{-B_1} z_2^{-B_2} \dots z_r^{-B_r}, \quad (2)
\end{aligned}$$

és $\phi(B_1 B_2 \dots B_r)$ jelenti a fenti lineáris határozatlan egyenletrendszer *pozitív* ($x_i \geq 1$) egész számokban való megoldásai számát.

Ha az a_{ki} számok némelyike negatív, akkor a B_k számok negatívak is lehetnek.

A kétféle kifejtés együtthatói, illetve a kétféle particzionális kifejezés közt olyan reláció található, melynél fogva elegendő csak az egyik tárgyalásával foglalkozni.

Írjunk ugyanis az (1)-ben z_k helyébe z_k^{-1} -et ($k=1, 2, \dots, r$) úgy a törtfüggvényben, mint a kifejtésben. Lesz

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\prod_i (1 - z_1^{-a_{1i}} z_2^{-a_{2i}} \dots z_r^{-a_{ri}})} = \\
& = \frac{(-1)^n z_1^{\sum a_{1i}} z_2^{\sum a_{2i}} \dots z_r^{\sum a_{ri}}}{\prod_i (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\
& = \sum_{A_1} \sum_{A_2} \dots \sum_{A_r} \varphi(A_1 A_2 \dots A_r) z_1^{-A_1} z_2^{-A_2} \dots z_r^{-A_r}.
\end{aligned}$$

Szorozzuk mindkét oldalt

$$(-1)^n z_1^{-\sum a_{1i}} z_2^{-\sum a_{2i}} \dots z_r^{-\sum a_{ri}} \text{-vel,}$$

akkor előáll

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\prod_i (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\
& = \sum_{A_1} \sum_{A_2} \dots \sum_{A_r} (-1)^n \varphi(A_1 A_2 \dots A_r) z_1^{-(A_1 + \sum a_{1i})} z_2^{-(A_2 + \sum a_{2i})} \dots z_r^{-(A_r + \sum a_{ri})}.
\end{aligned}$$

Vagy más elrendezésben :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\prod_i (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\
& = \sum_{A_1} \sum_{A_2} \dots \sum_{A_r} (-1)^n \varphi(A_1 - \sum a_{1i}, A_2 - \sum a_{2i}, \dots, A_r - \sum a_{ri}) z_1^{-A_1} z_2^{-A_2} \dots z_r^{-A_r}.
\end{aligned}$$

Most írjunk A_k helyébe B_k -t a $k=1, 2, \dots, r$ esetek mindegyikében, akkor

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\prod_i (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\
& = \sum_{B_1} \sum_{B_2} \dots \sum_{B_r} (-1)^n \varphi(B_1 - \sum a_{1i}, B_2 - \sum a_{2i}, \dots, B_r - \sum a_{ri}) z_1^{-B_1} z_2^{-B_2} \dots z_r^{-B_r}. \quad (3)
\end{aligned}$$

A (2) és (3) kifejtés egyenlő hatványszorzatú tagjai összehasonlításából nyilvánvaló, hogy

$$\varphi(B_1 B_2 \dots B_r) = \varphi(B_1 - \sum a_{1i}, B_2 - \sum a_{2i}, \dots, B_r - \sum a_{ri}).$$

Nevezetes relációt kapunk továbbá, ha az (1)-ben az A_k összegezési betű helyébe $(-B_k)$ -t írunk a $k=1, 2, \dots, r$ esetek mindegyikében. Előáll ugyanis :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\prod_i (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\
& = \sum_{B_1} \sum_{B_2} \dots \sum_{B_r} \varphi(-B_1, -B_2, \dots, -B_r) z_1^{-B_1} z_2^{-B_2} \dots z_r^{-B_r} \quad (4)
\end{aligned}$$

A (3) és (4) összehasonlításából előáll a következő függvényösszefüggés:

$$\varphi(-B_1, -B_2, \dots, -B_r) = (-1)^n \varphi(B_1 - \sum a_{1i}, B_2 - \sum a_{2i}, \dots, B_r - \sum a_{ri}).$$

Közelebbről meg kell határoznunk, hogy az alapfüggvény (1) és (2) sorba fejtésekor az összegezési betűk milyen határolásban veendők és vehetők? Például a (2) kifejtésekor B_k ? E végett alakítsuk át az alkotó függvényt úgy, hogy nevezőbeli tényezőiben z_k -nak csak pozitív hatványkitevői szerepeljenek.

Különböztessük meg e végett az alkotó függvény ama tényezőiben, melyekben z_k kitevője a_{ki} pozitív, az összes hatványkitevőket (π) mutatóval, azokban, melyekben z_k kitevője a_{ki} negatív, az összes hatványkitevőket (ν) mutatóval, akkor az alkotó függvény így írható:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(1 - \prod_{s=1}^{r(k)} z_s^{a_{si}^{(\pi)}} z_k^{a_{ki}^{(\pi)}} \right)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(1 - \prod_{s=1}^{r(k)} z_s^{a_{si}^{(\pi)}} z_k^{a_{ki}^{(\pi)}} \right) \prod_{i=1}^n \left(1 - \prod_{s=1}^{r(k)} z_s^{a_{si}^{(\nu)}} z_k^{a_{ki}^{(\nu)}} \right)}.$$

Ha a negatív jellegű, (ν) mutatós tényezők száma l , szorozzuk a tört számlálóját és nevezőjét

$$(-1)^l \prod_{i=1}^n \left(\prod_{s=1}^{r(k)} z_s^{-a_{si}^{(\nu)}} \right) z_k^{-a_{ki}^{(\nu)}} \text{-vel,}$$

ekkor előáll:

$$\frac{(-1)^l \prod_{i=1}^n \left(\prod_{s=1}^{r(k)} z_s^{-a_{si}^{(\nu)}} \right) z_k^{-a_{ki}^{(\nu)}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 - \prod_{s=1}^{r(k)} z_s^{a_{si}^{(\pi)}} z_k^{a_{ki}^{(\pi)}} \right) \prod_{i=1}^n \left(1 - \prod_{s=1}^{r(k)} z_s^{a_{si}^{(\nu)}} z_k^{a_{ki}^{(\nu)}} \right)},$$

mely törtfüggvénynek a (2) módjára való kifejtése azonosan egvezetethető a (2) alatti következő kifejtéssel:

$$\sum_{B_1} \sum_{B_2} \dots \sum_{B_r} (-1)^n \phi(B_1 B_2 \dots B_r) z_1^{-B_1} z_2^{-B_2} \dots z_r^{-B_r}.$$

Szorozzuk még úgy a törtfüggvényt, mint az utóbbi kifejtést

$$(-1)^l \sum_{s=1}^{r(k)} z_s^{\Sigma a_{st}^{(p)}} z_k^{\Sigma a_{kt}^{(p)}} \text{-vel,}$$

akkor lesz:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(1 - \prod_{s=1}^{r(k)} z_s^{a_{si}^{(p)}} z_k^{a_{ki}^{(p)}}\right) \prod_{i=1}^n \left(1 - \prod_{s=1}^{r(k)} z_s^{-a_{si}^{(p)}} z_k^{-a_{ki}^{(p)}}\right)} = \\ = \sum_{B_1} \sum_{B_2} \dots \sum_{B_r} (-1)^{n+l} \phi(B_1 B_2 \dots B_r) z_1^{-(B_1 - \Sigma a_{1i}^{(p)})} z_2^{-(B_2 - \Sigma a_{2i}^{(p)})} \dots z_r^{-(B_r - \Sigma a_{ri}^{(p)})}.$$

A baloldalon olyan törtfüggvény van, melynek minden nevezőbeli tényezője z_k -nak csupán *pozitív* hatványait tartalmazza, ennél fogva ennek a (2) módjára való kifejtésében z_k -nak csupán *negatív* hatványai jöhetnek elő, még pedig a legmagasabb negatív hatvány, mely mellett az illető tag coefficiense zérustól különbözhetik:

$$z_k^{-(\Sigma a_{ki}^{(p)} - \Sigma a_{ki}^{(n)})}.$$

E kifejtéssel az egyenlet jobboldalán jelzett kifejtés azonosan, tehát tagonként egyező lévén, ott a kifejtési együttható:

$$(-1)^{n+l} \phi(B_1 B_2 \dots B_r)$$

a z_k -nak csak oly *negatív* hatványai mellett különbözhetik zérustól, mikor

$$-(B_k - \Sigma a_{ki}^{(p)}) \leq -(\Sigma a_{ki}^{(p)} - \Sigma a_{ki}^{(n)}),$$

azaz

$$B_k \geq \Sigma a_{ki}^{(n)}.$$

A z_k oly *negatív* hatványai mellett pedig, mikor

$$-(\Sigma a_{ki}^{(p)} - \Sigma a_{ki}^{(n)}) < -(B_k - \Sigma a_{ki}^{(p)}) \leq 0,$$

azaz, mikor

$$\Sigma a_{ki}^{(n)} \leq B_k < \Sigma a_{ki}^{(p)},$$

a kifejtési együttható elenyészik, tehát ily esetekben

$$\phi(B_1 B_2 \dots B_r) = 0.$$

E következtetések érvényesek a $k=1, 2, \dots, r$ esetek mindegyikében, úgy, hogy a (2) hatványsorba fejtés összeg — határai így írhatók:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} =$$

$$= \sum_{B_1=0}^{\infty} \sum_{B_2=0}^{\infty} \dots \sum_{B_r=0}^{\infty} (-1)^n \phi(B_1 B_2 \dots B_r) z_1^{-B_1} z_2^{-B_2} \dots z_r^{-B_r},$$

azonban

$$\phi(B_1 B_2 \dots B_r) = 0,$$

mihelyt a

$$\sum a_{ki}^{(v)} \leq B_k < \sum a_{ki}^{(\pi)} \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

feltételek valamelyike beáll.

Teljesen hasonló menetű tárgyalással kimutatható, hogy az (1) hatványsorba fejtéskor a kifejtési együttható

$$\varphi(A_1 A_2 \dots A_r)$$

a z_k -nak csak oly pozitív hatványai mellett különbözhetik zérustól, mikor

$$A_k + \sum a_{ki}^{(v)} \geq 0,$$

illetve

$$A_k \geq -\sum a_{ki}^{(v)} \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

Ennélfogva az A_1, A_2, \dots, A_r -re vonatkozó összegezés határai:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} =$$

$$= \sum_{A_1=-\sum a_{1i}^{(v)}}^{\infty} \sum_{A_2=-\sum a_{2i}^{(v)}}^{\infty} \dots \sum_{A_r=-\sum a_{ri}^{(v)}}^{\infty} \varphi(A_1 A_2 \dots A_r) z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r}.$$

A

$$\varphi(A_1 A_2 \dots A_r) = \phi(A_1 + \sum a_{1i}, A_2 + \sum a_{2i}, \dots, A_r + \sum a_{ri})$$

függvényösszefüggésnél fogva:

$$\varphi(A_1 A_2 \dots A_r) = 0,$$

ha a

$$\sum a_{ki}^{(v)} \leq A_k + \sum a_{ki} < \sum a_{ki}^{(\pi)},$$

illetve ha az innen adandó

$$\sum a_{ki}^{(\pi)} \leq A_k < \sum a_{ki}^{(v)} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

feltételek valamelyike teljesül.

A $\varphi(A_1 A_2 \dots A_r)$ függvény e tulajdonsága alapján a fenti kifejtésben az A_k összegezési határát le lehet szállítani olyan ε_k számig, mely a

$$-\sum a_{ki}^{(\pi)} \leq \varepsilon_k \leq -\sum' a_{ki}^{(\pi)}$$

feltételnek megfelel, és így írható:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1''^i z_2''^i \dots z_r''^i)} = \\ & = \sum_{A_1=\varepsilon_1}^{\infty} \sum_{A_2=\varepsilon_2}^{\infty} \dots \sum_{A_r=\varepsilon_r}^{\infty} \varphi(A_1 A_2 \dots A_r) z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r}. \end{aligned}$$

A $\varphi(A_1 A_2 \dots A_r)$ értelmezése tehát a következő:

$$\varphi(A_1 A_2 \dots A_r) = \text{coeff. } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r} \text{ in } \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1''^i z_2''^i \dots z_r''^i)}.$$

$A_k \geq \varepsilon_k$
($k=1, 2, \dots, r$)

Másféle $A_1 A_2 \dots, A_r$ számok esetén a $\varphi(A_1 A_2 \dots A_r)$ függvény értéke általában teljességgel nem zérus, a mint az már a

$$\begin{aligned} & \varphi(-A_1, -A_2, \dots, -A_r) = \\ & = (-1)^n \varphi(A_1 - \sum a_{1i}, A_2 - \sum a_{2i}, \dots, A_r - \sum a_{ri}) \end{aligned}$$

relációból is látható, hanem zérustól különböző. Ha tehát az

$$\frac{1}{\prod_i (1 - z_1''^i z_2''^i \dots z_r''^i)}$$

függvény kifejtésekor az A_1, A_2, \dots, A_r betűk összeghatárait *tetszés szerinti*eknek akarjuk hagyni, akkor a $\varphi(A_1 A_2 \dots A_r)$ függvényhez olyan függvényszorzót kell csatolni, mely a nem lehetséges A_1, A_2, \dots, A_r értékek mellett *elenyészik* és ezzel az egész coefficiens zérussá válik.

Legyen $p(M)$ oly függvény, melynek értéke 1, ha $M \geq 0$ és 0, ha $M < 0$, például legyen

$$p(M) = \frac{M + \text{abs}.M}{2M},$$

akkor a keresett függvényfaktor lesz:

$$\prod_{k=1}^r p(A_k - \varepsilon_k)$$

és ezzel a sorbafejtés alakja:

$$\frac{1}{\prod_i (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} =$$

$$= \sum_{A_1} \sum_{A_2} \dots \sum_{A_r} \prod_{k=1}^r p(A_k - \varepsilon_k) \varphi(A_1 A_2 \dots A_r) z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r},$$

hol most már A_1, A_2, \dots, A_r tetszés szerinti pozitív vagy negatív egész számok lehetnek.

Tetszés szerinti A_k értékek mellett tehát

$$\text{Coëff. } z_1^{A_1} z_2^{A_2} z_r^{A_r} \text{ in } \frac{1}{\prod_i (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} =$$

$$= \prod_{k=1}^r p(A_k - \varepsilon_k) \varphi(A_1 A_2 \dots A_r),$$

$$\sum a_{ki}^{(\tau)} \geq \varepsilon_k \geq - \sum a_{ki}^{(\lambda)}.$$

Ezek után hozzáfoghatunk a feladat megoldásához olyan formán, hogy azt egy fokkal alacsonyabb rendű feladatra redukáljuk. Ezzel ki lesz mutatva annak egyszerű particziókra való visszavezethetősége és meghatározhatjuk a particziók, illetve a megoldások száma kifejezésének karakterisztikus alakját.

Tekintve, hogy a közönséges particziókban ($r=1$), mikor egyetlen szám additív előállításairól, illetve egyetlen lineáris határozatlan egyenlet megoldásairól van szó, a kérdés már minden irányban tisztázva van,¹ e dolgozat így módon a kitűzött nem csekély algebrai feladatot teljesen megfejti.

II.

Feladat a

$$\varphi(A_1 A_2 \dots A_r) =$$

$$= \text{Coëff. } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r} \text{ in } \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} \quad (1)$$

$$A_k \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

kifejtési együttható meghatározása.

¹ CSORBA Gy.: «Adalék az egész számok additív előállításának elméletéhez». A M. T. Akadémia Math. és Term. Értesítője, XVII. kötet, 189—249 ll. 1899.

A kérdés redukálásának útja az lesz, hogy igyekezzünk az alkotó függvényt úgy átalakítani, hogy nevezőjében a z_r változó kitevői az egyes tényezőknél egyenlők legyenek. Ekkor ugyanis e változó szerint könnyen végezhetünk parciális törtekre bontást.

Eleve feltehetjük, hogy az

$$a_{s_1}, a_{s_2}, \dots, a_{s_n}$$

számcsoportnak az $s=1, 2, \dots, r$ esetek mindenikében legnagyobb közös osztója 1, mert ha nem az volna, az illető határozatlan egyenlet könnyen olyanná alakítható.

Legyen most az

$$a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$$

pozitív számok valamely közös többsége λ , úgy hogy

$$k_1 a_{r1} = k_2 a_{r2} = \dots = k_n a_{rn} = \lambda;$$

akkor

$$\begin{aligned} & 1 - z_1^{k_1 a_{r1}} z_2^{k_2 a_{r2}} \dots z_r^{k_r a_{ri}} \\ &= 1 - z_1^{a_{r1}} z_2^{a_{r2}} \dots z_r^{a_{ri}} \\ &= 1 + z_1^{a_{r1}} z_2^{a_{r2}} \dots z_r^{a_{ri}} + z_1^{2a_{r1}} z_2^{2a_{r2}} \dots z_r^{2a_{ri}} + \dots \\ &+ z_1^{(k_1-1)a_{r1}} z_2^{(k_2-1)a_{r2}} \dots z_r^{(k_r-1)a_{ri}} \end{aligned}$$

és az

$$U \equiv \prod_{i=1}^n \left(\frac{1 - (z_1^{a_{r1}} z_2^{a_{r2}} \dots z_r^{a_{ri}})^{k_i}}{1 - z_1^{a_{r1}} z_2^{a_{r2}} \dots z_r^{a_{ri}}} \right) \quad (2)$$

szorzat egész kifejezés, melyet így jelölhetünk:

$$U \equiv \sum_{M=0}^{n\lambda-1} F(M; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) z_r^M,$$

vagy ha az

$$M = \nu + k\lambda \quad (\nu < \lambda)$$

helyettesítést végezzük,

$$U \equiv \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) z_r^{\nu+k\lambda}. \quad (3)$$

Szorozzuk az (1) alatti raczionális tört számlálóját U -nak (3) alatti kifejtett alakjával, nevezőjét ugyanannak (2) alatti kifejtetlen alakjával, akkor

$$\begin{aligned} & \varphi(A_1 A_2 \dots A_n) = \\ & = \text{coeff. } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r} \text{ in } \frac{\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) z_r^{\nu+k\lambda}}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{k_i a_{1i}} z_2^{k_i a_{2i}} \dots z_{r-1}^{k_i a_{r-1,i}} z_r^\lambda)}. \quad (4) \end{aligned}$$

Legyen most az egyváltozós törtfüggvények végtelen sorba fejtése alapján:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{k_i a_{1i}} z_2^{k_i a_{2i}} \dots z_{r-1}^{k_i a_{r-1,i}} z_r^\lambda)} = \sum_{h=0}^{\infty} \Psi(R) u^h; \quad (5)$$

akkor

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{k_i a_{1i}} z_2^{k_i a_{2i}} \dots z_{r-1}^{k_i a_{r-1,i}} z_r^\lambda)} = \sum_{h=0}^{\infty} \Psi(R) z_r^{\lambda h},$$

és

$$\begin{aligned} & \varphi(A_1 A_2 \dots A_r) = \\ & = \text{coeff. } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r} \text{ in } \left(\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) z_r^{\nu+k\lambda} \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \Psi(R) z_r^{\lambda h} \right). \end{aligned}$$

Rövidség kedvéért vezessük be a következő jelzést. Legyen:

$$\begin{aligned} \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) & \equiv \text{coeff. } z_r^{A_r} \text{ in } \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\ & = \text{coeff. } z_r^{A_r} \text{ in } \left(\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) z_r^{\nu+k\lambda} \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \Psi(R) z_r^{\lambda h} \right), \quad (6) \end{aligned}$$

akkor

$$\varphi(A_1 A_2 \dots A_r) = \text{coeff. } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_{r-1}^{A_{r-1}} \text{ in } \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}). \quad (7)$$

Végezzük el a (6) alatt jelzett szorzást, úgy lesz:

$$\begin{aligned} & \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ & = \text{coeff. } z_r^{A_r} \text{ in } \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda, z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) \Psi(R) z_r^{\nu+\lambda(k+h)}. \end{aligned}$$

Legyen itt

$$k + R = S,$$

akkor

$$\begin{aligned} & \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ & = \text{coeff. } z_r^{A_r} \text{ in } \sum_{S=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} [\sum F(\nu+k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) \Psi(S-k)] z_r^{\nu+\lambda S}, \end{aligned}$$

hol mindig

$$S - k \geq 0;$$

ha tehát $S < n$, akkor k értékei csak

$$0, 1, 2, \dots, S$$

lehetnek.

Tegyük fel, hogy

$$A_r = \nu + \lambda S, \quad \nu < \lambda$$

akkor $A_r > n\lambda$ esetén

$$\Phi(A_r; z_1 z_2 \dots z_{r-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu - k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) \Psi\left(\frac{A_r - (\nu + k\lambda)}{\lambda}\right). \quad (8)$$

Ha pedig $A < n\lambda$, akkor

$$\Phi(A_r; z_1 z_2 \dots z_{r-1}) = \sum_{k=0}^{\frac{A_r - \nu}{\lambda}} F(\nu + k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) \Psi\left(\frac{A_r - (\nu + k\lambda)}{\lambda}\right), \quad (9)$$

hol tehát

$$A_r \equiv \nu \pmod{\lambda}. \quad (\nu < \lambda)$$

Következik most az (5) alatti kifejtés, vagyis $\Psi(R)$ kiszámítása.

Könnyebbség kedvéért jelöljük átmenetileg az

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{k_m a_{1m}} z_2^{k_m a_{2m}} \dots z_{r-1}^{k_m a_{r-1,m}} u)}$$

raczionális törtet $B(u)$ -val.

Akkor némi átalakítással:

$$B(u) = \frac{(-1)^n z_1^{-\sum k_s a_{1s}} z_2^{-\sum k_s a_{2s}} \dots z_{r-1}^{-\sum k_s a_{r-1,s}}}{\prod_{m=1}^n (1 - z_1^{-k_m a_{1m}} z_2^{-k_m a_{2m}} \dots z_{r-1}^{-k_m a_{r-1,m}})}$$

Ebből a parciális törtekre bontás szabályai szerint

$$B(u) = \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{(-1)^u z_1^{-\frac{\Sigma k_m a_{1s}}{s}} z_2^{-\frac{\Sigma k_m a_{2s}}{s}} \dots z_{r-1}^{-\frac{\Sigma k_m a_{r-1, m}}{s}}}{\prod_{i=1}^{n(m)} (z_1^{-k_m a_{1i} m} z_2^{-k_m a_{2i} m} \dots z_{r-1}^{-k_m a_{r-1, i} m} - z_1^{-k_i a_{1i}} z_2^{-k_i a_{2i}} \dots z_{r-1}^{-k_i a_{r-1, i}})} \cdot \frac{1}{(u - z_1^{-k_m a_{1i} m} z_2^{-k_m a_{2i} m} \dots z_{r-1}^{-k_m a_{r-1, i} m})} \right\}.$$

Innen a törtekre vonatkozó megengedett változtatással:

$$B(u) = \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n(m)} (1 - z_1^{-k_i a_{1i} - k_m a_{1i} m} z_2^{-k_i a_{2i} - k_m a_{2i} m} \dots z_{r-1}^{-k_i a_{r-1, i} - k_m a_{r-1, i} m}) (1 - z_1^{-k_m a_{1i} m} \dots z_{r-1}^{-k_m a_{r-1, i} m} u)} \right\}.$$

Mintegy itt

$$(1 - z_1^{-k_m a_{1i} m} z_2^{-k_m a_{2i} m} \dots z_{r-1}^{-k_m a_{r-1, i} m} u) = \sum_{l=0}^{\infty} z_1^{-k_m a_{1i} m l} z_2^{-k_m a_{2i} m l} \dots z_{r-1}^{-k_m a_{r-1, i} m l} u^l,$$

ennek az előbbibe helyettesítésével lesz

$$B(u) = \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_1^{-k_m a_{1i} m l} z_2^{-k_m a_{2i} m l} \dots z_{r-1}^{-k_m a_{r-1, i} m l} u^l}{\prod_{i=1}^{n(m)} (1 - z_1^{-k_i a_{1i} - k_m a_{1i} m} \dots z_{r-1}^{-k_i a_{r-1, i} - k_m a_{r-1, i} m})}.$$

A tagok más elrendezésével:

$$B(u) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^n \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-k_m a_{sm} R}}{\prod_{i=1}^{n(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-k_i a_{si} - k_m a_{si} m})} \right\} u^R.$$

Innen az (5) tekintetbe vételével kitűnik, hogy

$$\Psi(R) = \sum_{m=1}^n \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-k_m a_{sm} R}}{\prod_{i=1}^{n(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-k_i a_{si} - k_m a_{si} m})}. \quad (10)$$

Most már a (8) szerint lesz

$$\begin{aligned} & \Phi(A_r, z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) \sum_{m=1}^n \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{k m' \alpha_{sm}} \frac{A_r - (\nu+k\lambda)}{\lambda}}{\prod_{i=1}^{n(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{(k i \alpha_{si} - k m' \alpha_{sm})})}, \end{aligned}$$

vagy a tagok másféle csoportosításával:

$$\begin{aligned} & \Phi(A_r; z_1 z_2 \dots z_{r-1}) = \\ & = \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-\frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}} (\nu+k\lambda)} F(\nu+k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) \right\} \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}} A_r}}{\prod_{i=1}^{n(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{(k i \alpha_{si} - k m' \alpha_{sm})})}. \end{aligned}$$

Jelöljük az itt szereplő zárójeles kifejezést következőkép:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-\frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}} (\nu+k\lambda)} F(\nu+k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) \equiv G^{(m)}(\lambda; \nu), \quad (11)$$

akkor

$$\begin{aligned} & \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ & = \sum_{m=1}^n G^{(m)}(\lambda, \nu) \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}} A_r}}{\prod_{i=1}^{n(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{(k i \alpha_{si} - k m' \alpha_{sm})})}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ha a (11) alatti $G^{(m)}(\lambda, \nu)$ -vel jelölt kifejezést a (3) alatti

$$U \equiv \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) z_r^{\nu+k\lambda}$$

kifejezéssel egybevetjük, nyilvánvalóan kitűnik, hogy

$$G^{(m)}(\lambda, \nu) = \text{coeff. } \omega_\varepsilon^\nu \text{ in } [U]_{z_r = \omega_\varepsilon \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-\frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}}}},$$

hol $\omega_\varepsilon^\lambda = 1$, azaz ω_ε valamely λ -dik egységgyök.

E szerint

$$\begin{aligned} & G^{(m)}(\lambda, 0) \omega_\varepsilon^0 + G^{(m)}(\lambda, 1) \omega_\varepsilon^1 + \dots + G^{(m)}(\lambda, \nu) \omega_\varepsilon^\nu + \dots + \\ & + G^{(m)}(\lambda, \lambda-1) \omega_\varepsilon^{\lambda-1} = [U]_{z_r = \omega_\varepsilon \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-\frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}}}}. \end{aligned}$$

Ilyen egyenletekből az $\varepsilon=1, 2, 3, \dots, \lambda$ esetek felvételével olyan lineáris egyenletrendszer áll elő, mely a LAGRANGE-féle interpolatio-formulával megoldható és a következő eredményre vezet

$$G^{(m)}(\lambda, \nu) = \frac{1}{\lambda} \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda} [U]_{z_r=\omega_\varepsilon \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-\frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}}}} \frac{\omega_\varepsilon^{\nu}}{\omega_\varepsilon^{\alpha_{rm}}}, \quad (13)$$

hol U -nak most már a (2) alatti

$$U = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1 - z_1^{k_i \alpha_{1i}} z_2^{k_i \alpha_{2i}} \dots z_{r-1}^{k_i \alpha_{(r-1)i}} z_r^\lambda}{1 - z_1^{\alpha_{1i}} z_2^{\alpha_{2i}} \dots z_r^{\alpha_{ri}}} \right\}$$

szorzatalakját tekintjük alkalmazottnak.

Az

$$[U]_{z_r=\omega_\varepsilon \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-\frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}}}}$$

szorzatban a számláló egyik tényezője mindig zérus, az, hol $i=m$. Csakis olyan ω_ε értékekre különböztethetünk tehát a szorzat zérustól, melyekre nézve a nevező is zérus, ez pedig akkor történhetik, ha $\omega_\varepsilon^{\alpha_{rm}}=1$, azaz, ha ω_ε valamely α_{rm} -edik egységgyök. Elég ezekre nézve az ω_ε értékekre vonatkozó összegezést kiterjeszteni. Ekkor az $i=m$ -nek megfelelő tényező értéke lesz:

$$\left[\frac{1 - z_1^{k_m \alpha_{1m}} z_2^{k_m \alpha_{2m}} \dots z_{r-1}^{k_m \alpha_{(r-1)m}} z_r^\lambda}{1 - z_1^{\alpha_{1i}} z_2^{\alpha_{2i}} \dots z_r^{\alpha_{ri}}} \right]_{z_r=\omega_\varepsilon \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{-\frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}}}} = \frac{\lambda}{\alpha_{rm}},$$

és ezzel

$$G^{(m)}(\lambda, \nu) = \frac{1}{\alpha_{rm}} \sum_{\varepsilon=1}^{\alpha_{rm}} \frac{1}{\omega_\varepsilon^{\nu}} \frac{\prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{k_i \alpha_{si} - \lambda \frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}}})}{\prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\alpha_{si} - \alpha_{ri}} \frac{\alpha_{sm}}{\alpha_{rm}} \omega_\varepsilon^{\alpha_{ri}})}$$

Ez így írható:

$$G^{(m)}(\lambda, \nu) = \frac{1}{\alpha_{rm}} \sum_{\varepsilon=1}^{\alpha_{rm}} \frac{1}{\omega_\varepsilon^{\nu}} \frac{\prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{k_i \alpha_{si} - k_m \alpha_{sm}})}{\prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\alpha_{si} \alpha_{rm} - \alpha_{sm} \alpha_{ri}} \omega_\varepsilon^{\alpha_{ri}})}$$

Vagy ha rövidség kedvéért bevezetjük a

$$\delta_s(i, m) = \begin{vmatrix} a_{si} & a_{sm} \\ a_{ri} & a_{rm} \end{vmatrix} = a_{si}a_{rm} - a_{sm}a_{ri}$$

jelölést,

$$G^{(m)}(\lambda, \nu) = \frac{1}{a_{rm}} \sum_{\epsilon=1}^{arm} \frac{1}{\omega_{\epsilon}^{\nu}} \frac{\prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{k_i a_{si} - k_m a_{sm}})}{\prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} \frac{\delta_s(im)}{z_s^{arm}} \omega_{\epsilon}^{a_{ri}})} \quad (14)$$

Ezzel most már

$$\begin{aligned} & \Phi(A_r, z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{a_{rm}} \sum_{\epsilon=1}^{arm} \frac{1}{\omega_{\epsilon}^{\nu}} \frac{\prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{k_i a_{si} - k_m a_{sm}}) \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{a_{sm} A_r}}{\prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} \frac{\delta_s(im)}{z_s^{arm}} \omega_{\epsilon}^{a_{ri}}) \prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{k_i a_{si} - k_m a_{sm}})} \end{aligned}$$

A lehető egyszerűsítés elvégzésével:

$$\begin{aligned} & \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{a_{rm}} \sum_{\epsilon=1}^{arm} \frac{1}{\omega_{\epsilon}^{\nu}} \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{a_{sm} A_r}}{\prod_i^{(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} \frac{\delta_s(im)}{z_s^{arm}} \omega_{\epsilon}^{a_{ri}})} \end{aligned}$$

Itt

$$\frac{1}{\frac{\delta_s(im)}{(1 - \prod_s z_s^{arm} \omega_{\epsilon}^{a_{ri}})}} = \sum_{kim=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{k_{im} \delta_s(im)}{arm}} \omega_{\epsilon}^{k_{im} a_{ri}}.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} & \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{a_{rm}} \sum_{\epsilon=1}^{arm} \frac{1}{\omega_{\epsilon}^{\nu}} \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{a_{sm} A_r} \prod_i^{(m)} \left(\sum_{kim=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{k_{im} \delta_s(im)}{arm}} \omega_{\epsilon}^{k_{im} a_{ri}} \right). \end{aligned}$$

Az egységgyökök tulajdonságaiból folyólag:

$$\omega_{\epsilon}^{k_{im} a_{ri}} = \omega_{\epsilon}^{k'_{im} a_{ri}},$$

ha

$$k_{im}a_{ri} \equiv k'_{im}a_{ri} \pmod{a_{rm}},$$

vagy az a_{ri} és a_{rm} számok legnagyobb közös osztóját

$$d_{im}\text{-mel}$$

jelölve, ha

$$k_{im} - k'_{im} = \frac{a_{rm}}{d_{im}}.$$

Hogy az ilyen egyenlő értékű hatványokat összevonhassuk, írjunk k_{im} helyébe

$$\left(\nu_{im} + \tau_{im} \frac{a_{rm}}{d_{im}} \right)\text{-et,}$$

hol τ_{im} lehet

$$0, 1, 2, \dots, \infty$$

és ν_{im} lehet

$$0, 1, 2, \dots, \left(\frac{a_{rm}}{d_{im}} - 1 \right).$$

Bevezetve az új jelzést, lesz:

$$\omega_i^{\left(\nu_{im} + \tau_{im} \frac{a_{rm}}{d_{im}} \right) a_{ri}} = \omega_i^{\nu_{im} a_{ri}}$$

és

$$\begin{aligned} & \phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ & = \sum_{m=1}^n \frac{1}{a_{rm}} \sum_{\epsilon=1}^{a_{rm}} \frac{1}{\omega_\epsilon^\nu} \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{a_{sm}}{a_{rm}} A_r} \prod_i^{(m)} \left(\sum_{\nu_{im}=0}^{\frac{a_{rm}}{d_{im}}-1} \sum_{\tau_{im}=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\left(\nu_{im} + \tau_{im} \frac{a_{rm}}{d_{im}} \right) \frac{\delta_s(im)}{a_{rm}}} \omega_\epsilon^{\nu_{im} a_{ri}} \right). \end{aligned}$$

Itt azonban

$$\sum_{\tau_{im}=0}^{\infty} \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\tau_{im} \frac{\delta_s(im)}{d_{im}}} = \frac{1}{\left(1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{\delta_s(im)}{d_{im}}} \right)}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} & \phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ & = \sum_{m=1}^n \frac{1}{a_{rm}} \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{a_{sm}}{a_{rm}} A_r} \sum_{\epsilon=1}^{a_{rm}} \frac{1}{\omega_\epsilon^\nu} \prod_i^{(m)} \sum_{\nu_{im}=0}^{\frac{a_{rm}}{d_{im}}-1} \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\nu_{im} \frac{\delta_s(im)}{a_{rm}}} \omega_\epsilon^{\nu_{im} a_{ri}}}{\left(1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{\delta_s(im)}{d_{im}}} \right)}. \end{aligned}$$

Összevonva ω_ε különféle hatványait:

$$\begin{aligned} \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ = \prod_{m=1}^n \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{a_{sm} A_r}}{a_{rm}} \prod_{\substack{\varepsilon=1 \\ i \neq m}}^{a_{rm}} \prod_{s=1}^{r-1} \frac{z_s^{\sum_{i=1}^{r-1} \nu_{im} a_{si} - \nu}}{\omega_\varepsilon^{\sum_{i=1}^{r-1} \nu_{im} a_{si} - \nu}} \cdot \end{aligned}$$

Az

$$\sum_{\varepsilon=1}^{a_{rm}} \omega_\varepsilon^{\sum_{i=1}^{r-1} \nu_{im} a_{si} - \nu}$$

összeg mindazokra a ν_{im} értékesoportokra nézve zérus, melyek nem olyanok, hogy

$$\sum_i \nu_{im} a_{ri} \nu_{im} \equiv 0 \pmod{a_{rm}},$$

hol

$$\nu_{im} < \frac{a_{rm}}{d_{im}}.$$

Ebben az esetben pedig értéke éppen a_{rm} .

E szerint

$$\begin{aligned} \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \\ = \prod_{m=1}^n \prod_{\substack{\nu_{im} \dots \\ i \neq m}} \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{a_{sm} A_r + \sum_{i=1}^{r-1} \nu_{im} a_{si}}{a_{rm}}}}{\prod_i (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{d_s(i m)}{d_{im}}})}, \end{aligned} \quad (15)$$

hol

$$\sum_i \nu_{im} a_{ri} \nu_{im} \equiv \nu \pmod{a_{rm}},$$

$$\nu_{im} < \frac{a_{rm}}{d_{im}}.$$

A mennyiben

$$A_r \equiv \nu \pmod{\lambda}$$

és

$$\lambda \equiv 0 \pmod{a_{rm}},$$

tehát

$$A_r \equiv \nu \pmod{a_{rm}}.$$

és a ν_{im} számok körét határoló relatio alakja:

$$\sum_{i=1}^{n(m)} a_{ri} \nu_{im} \equiv A_r \pmod{a_{rm}},$$

$$\nu_{im} < \frac{a_{rm}}{d_{im}}.$$

Minthogy a (7) szerint volt

$\varphi(A_1 A_2 \dots A_r) = \text{coeff. } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_{r-1}^{A_{r-1}} \text{ in } \Phi(A_r; z_1, z_2, \dots, z_{r-1})$,
ennélfogva a talált eredmények felhasználásával lesz:

$$\begin{aligned} \varphi(A_1 A_2 \dots A_r) = \\ = \text{coeff. } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_{r-1}^{A_{r-1}} \text{ in } \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{i \neq m \\ \dots \nu_{im} \dots}} \frac{\prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{a_{sm} A_r + \sum_i^{(m)} \nu_{im} \delta_s(im)}{a_{rm}}}}{\prod_{i=1}^{n(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{\delta_s(im)}{d_{im}}})}. \end{aligned}$$

Ez végre még így alakítható:

$$\begin{aligned} \varphi(A_1 A_2 \dots A_r) = \\ = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{i \neq m \\ \dots \nu_{im} \dots}} \text{coeff. } \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{a_{rm} A_s - a_{sm} A_r - \sum_i^{(m)} \nu_{im} \delta_s(im)}{a_{rm}}} \\ \text{in } \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n(m)} (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s^{\frac{\delta_s(im)}{d_{im}}})} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

hol a ν_{im} változókra vonatkozó összegezés kiterjed a

$$\sum_{i=1}^{n(m)} a_{ri} \nu_{im} \equiv A_r \pmod{a_{rm}}$$

$$\left(0 \leq \nu_{im} < \frac{a_{rm}}{d_{im}} \right).$$

határozatlan kongruencia összes megoldásaira, melyek száma

$$\frac{a_{rm}^{n-2}}{\prod_{i=1}^{n(m)} d_{im}},$$

és

$$\delta_s(im) = \begin{vmatrix} a_{si} & a_{sm} \\ a_{ri} & a_{rm} \end{vmatrix}.$$

Ezzel elvégeztük az r változós partizionális törtfüggvénynek $(r-1)$ változós törtfüggvényekre való redukálását. Még csak a bevezető részben foglaltak értelmében az új, $(r-1)$ változós kifejtési együtthatók elé azt a függvényszorzót kell odaírunk, mely az elhagyandó összegtagok elkülönítését biztosítja. A kérdéses faktor:

$$\prod_{s=1}^{r-1} p\left(\frac{a_{rm}A_s - a_{sm}A_r - \sum_{i=1}^n \nu_{im} \delta_s(im)}{a_{rm}} - \varepsilon_s\right),$$

hol

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta_s^{(\pi)}(im)}{a_{im}} < \varepsilon_s < - \sum_{i=1}^n \frac{\delta_s^{(\nu)}(im)}{a_{im}},$$

melyben a (π) mutatós δ tagok pozitív, a (ν) mutatós δ tagok negatív előjelűek.

Válasszuk ε_s -et úgy, hogy legyen

$$\varepsilon_s = - \frac{\sum_{i=1}^n \nu_{im} \delta_s(im)}{a_{rm}},$$

akkor a szorzófüggvény lesz:

$$\prod_{s=1}^{r-1} p\left(\frac{a_{rm}A_s - a_{sm}A_r}{a_{rm}}\right),$$

vagy ha a_{rm} a feltevés szerint pozitív,

$$\prod_{s=1}^{r-1} p\left(\begin{vmatrix} A_s & a_{sm} \\ A_r & a_{rm} \end{vmatrix}\right).$$

Igazolnunk kell azonban, hogy ε_s választott értéke a kellő határok közé esik, azaz, hogy

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i=1}^n \nu_{im}^{(m)} \delta_s^{(\pi)}(im) &< \frac{- \sum_{i=1}^n \nu_{im}^{(m)} \delta_s^{(\pi)}(im) - \sum_{i=1}^n \nu_{im}^{(m)} \delta_s^{(v)}(im)}{a_{rm}} < \\
 &< - \sum_{i=1}^n \nu_{im}^{(m)} \delta_s^{(v)}(im) \frac{1}{a_{im}}.
 \end{aligned}$$

Innen némi átalakulással előáll:

$$- \sum_{i=1}^n \nu_{im}^{(m)} \delta_s^{(\pi)}(im) + \sum_{i=1}^n \nu_{im}^{(m)} \delta_s^{(v)}(im) \left(\frac{a_{rm}}{a_{im}} - \nu_{im} \right) < 0,$$

és

$$0 < \sum_{i=1}^n \nu_{im}^{(m)} \delta_s^{(\pi)}(im) \left(\frac{a_{rm}}{a_{im}} - \nu_{im} \right) - \sum_{i=1}^n \nu_{im}^{(m)} \delta_s^{(v)}(im),$$

a melyek nyilvánvalóan helyesek, és így ε_s választása megfelelő volt.

Ezek folytán a redukeziós formula a maga teljes alakjában lesz:

$$\begin{aligned}
 \text{Coëfficiens } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \dots z_r^{A_r} \text{ in } \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} \dots z_r^{a_{ri}})} = \\
 = \sum_{m=1}^n \prod_{s=1}^{n-1} p \left(\begin{vmatrix} A_s & a_{sm} \\ A_r & a_{rm} \end{vmatrix} \right) \sum_{\substack{\dots \nu_{im} \dots \\ i \neq m}} \\
 \text{coëff. } \prod_{s=1}^{r-1} z_s \frac{1}{a_{rm}} \left\{ \begin{vmatrix} A_s & a_{sm} \\ A_r & a_{rm} \end{vmatrix} - \sum_{i=1}^n \nu_{im} \delta_s(im) \right\} \\
 im \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - \prod_{s=1}^{r-1} z_s \frac{\delta_s(im)}{a_{im}})}, \tag{17}
 \end{aligned}$$

hol a ν_{im} változók határföltétele:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n a_{ri} \nu_{im} &\equiv A_r \pmod{a_{rm}} \\
 \left(0 \leq \nu_{im} < \frac{a_{rm}}{a_{im}} \right).
 \end{aligned}$$

Itt

$$\frac{\partial_s(im)}{d_{im}} = \left| \frac{a_{si} \ a_{sm}}{a_{ri} \ a_{rm}} \right|$$

egész számot jelent, mert d_{im} az a_{ri} és a_{rm} számok legnagyobb közös osztója.

E levezetésben az a_{ri} számok mind pozitívnak voltak feltételezve. Lehetne a formulát külön bizonyítás alapján arra a esetre is kiterjeszteni, mikor az a_{ri} számok némelyike negatív, azonban az alkalmazásokban mindig egyszerű módon lehet az utolsó függvényt úgy átalakítani, hogy a sorban utolsónak vett z változó kitevői mind pozitívak lesznek.

Jegyzet. Oly kivételes esetben, mikor a $\partial_s(im)$ számok némelyike zérus, a parciális törtre bontás másféle módon végeztetik és a fenti redukeziós formula helyébe más teendő.

A formula világosan mutatja, hogy azok a kifejtési együtthatók, melyekre az eredeti alkotó függvény kifejtési együtthatói vissza vannak vezetve, olyan hatványszorzatokhoz tartoznak, melyek kitevői az adott kifejtési együtthatóhoz tartozó hatványszorzat kitevőinek (A_1, A_2, \dots, A_r) lineáris összetételei. Az új alkotó függvények továbbá egygyel kevesebb változót és egygyel kevesebb tényezőt tartalmaznak. A redukezió többszörös alkalmazásával tehát végre ú. n. egyszerű particziókhoz jutunk, hol az alkotó függvénynek csak egy változója van, tényezői száma $n-(r-1)$ és a kifejtési együtthatóhoz tartozó hatványszorzat kitevője az eredeti kitevőknek (A_1, A_2, \dots, A_r) valamely lineáris összetétele.

Minthogy m tagú egyszerű particziókban a kifejtési együtthatók a numerusnak $(n-1)$ fokú egész kifejezése oly együtthatókkal, melyek A -ban periodikusok, ennél fogva az r -szeres particziók száma az A_1, A_2, \dots, A_r mennyiségeknek $(n-r)$ fokú egész kifejezése, ily alakban:

$$\varphi(A_1 A_2 \dots A_r) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n-r} C(A_1 A_2 \dots A_r) A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_r^{\alpha_r}, \quad (18)$$

hol a

$$C(A_1 A_2 \dots A_r)$$

együtthatók r változós periodikus függvények.

Ez a kifejezés mutatja az r -szeres particziók számát kifejező függvénynek karakterisztikus alakját.

III.

Mielőtt a redukziós formulát néhány algebrai és numerikus feladat megoldására alkalmaznánk, avval a határozatlan lineáris kongruenciával kell foglalkoznunk, mely a képletben szerepel.

E kongruencia ilyen mintájú:

$$a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + \dots + a_{n-1}\nu_{n-1} \equiv A \pmod{a_n},$$

$$\left(0 \leq \nu_i < \frac{a_n}{d_{in}} \right),$$

hol d_{in} az a_i és a_n legnagyobb közös osztója.

Feltételezzük még, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ számok legnagyobb közös osztója 1.

Első kérdés az, hogy hány megoldása van e kongruenciának?

Ha $n=2$, akkor az

$$a_1\nu_1 \equiv A \pmod{a_2}, \quad \left(0 \leq \nu_1 < \frac{a_2}{d_{12}} \right)$$

határozott kongruenciának *egy* megoldása van, melyet további gyakori alkalmazásai miatt jelöljünk meg külön jelvényvel következőkép:

$$\nu_1 = \eta_{a_1 a_2}(A).$$

Most az általános esetben jelöljük az

$$a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_n$$

számok legnagyobb közös osztóját

$$d_i\text{-vel,}$$

akkor nyilvánvaló, hogy kell lenni:

$$a_i\nu_i \equiv A \pmod{d_i}.$$

Ennek folytán ν_i ilyen alakban írható:

$$\nu_i = \eta_{a_i d_i}(A) + \sigma_i d_i,$$

hol, minthogy

$$0 \leq \nu_i < \frac{a_n}{d_{in}},$$

a σ_i értékhatárai lesznek

$$0 \leq \sigma_i < \frac{a_n}{d_i d_{in}}.$$

A ν_i előfordulható különféle értékeinek száma tehát:

$$\frac{a_n}{d_i d_{in}}.$$

Most az $n=3$ esetben ν_2 lehetséges értékeinek száma

$$\frac{a_3}{d_1 d_2}.$$

Adott ν_2 mellett ν_1 értékét az

$$a_1 \nu_1 \equiv A - a_2 \nu_2 \pmod{a_3} \quad \left(\nu_1 < \frac{a_3}{d_2} \right)$$

kongruencia adja meg, mely így írható:

$$\frac{a_1}{d_2} \nu_1 \equiv \frac{A - a_2 \nu_2}{d_2} \pmod{\frac{a_3}{d_2}}, \quad \left(\nu_1 < \frac{a_3}{d_2} \right).$$

Minthogy itt $\frac{a_1}{d_2}$ és $\frac{a_3}{d_2}$ már relativ primek, innen ν_1 számára csak egy érték kapható. Az összes megoldások száma tehát egyezik a ν_2 különböző lehetséges értékei számával, azaz:

$$\frac{a_3}{d_1 d_2}.$$

Az $n=4$ esetén ν_3 lehetséges különböző értékeinek száma

$$\frac{a_4}{d_3 d_{34}}.$$

Minden egyes ν_3 mellett ν_1 és ν_2 értékeit a következő kongruencia adja:

$$a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2 \equiv A - a_3 \nu_3 \pmod{a_4},$$

mely így alakítható:

$$\frac{a_1}{d_3} \nu_1 + \frac{a_2}{d_3} \nu_2 \equiv \frac{A - a_3 \nu_3}{d_3} \left(\text{mod } \frac{a_4}{d_3} \right),$$

$$\left(0 \leq \nu_1 < \frac{a_4}{d_{14}} \right), \quad \left(0 \leq \nu_2 < \frac{a_4}{d_{24}} \right).$$

Mínthogy a_1 és a_4 legnagyobb közös osztója d_{14} ,

$$\frac{a_1}{d_3} \quad \text{és} \quad \frac{a_4}{d_3}$$

legnagyobb közös osztója $\frac{d_{14}}{d_3}$ lesz, hasonlókép

$$\frac{a_2}{d_3} \quad \text{és} \quad \frac{a_4}{d_3}$$

legnagyobb közös osztója $\frac{d_{24}}{d_3}$.

A ν_1 és ν_2 értékhatárai így írhatók:

$$0 \leq \nu_1 < \frac{a_4}{d_3} : \frac{d_{14}}{d_3},$$

$$0 \leq \nu_2 < \frac{a_4}{d_3} : \frac{d_{24}}{d_3}.$$

Ezzel adott ν_3 mellett a ν_1 és ν_2 lehetséges változatait megadó kongruencia olyan jellegűnek bizonyul, a milyennek megoldásai számát már ismerjük, lesz ugyanis ez:

$$\frac{a_4}{d_3} : \frac{d_{14}}{d_3} \frac{d_{24}}{d_3} = \frac{a_4 d_3}{d_{14} d_{24}}.$$

Az összes megoldások száma így $n=4$ esetén:

$$\frac{a_4}{d_3 d_{34}} \cdot \frac{a_4 d_3}{d_{14} d_{24}} = \frac{a_4^2}{d_{14} d_{24} d_{34}}.$$

Teljes indukció alkalmazása végett tegyük fel most, hogy

$$n = k - 1$$

esetben a kongruencia megoldásainak száma :

$$\frac{a_{k-1}^{k-3}}{d_{1, k-1} d_{2, k-1} \dots d_{k-2, k-1}} ;$$

az

$$n = k$$

esetben ν_{k-1} különböző értékeinek száma

$$\frac{a_k}{d_{k-1} d_{k-1, k}} .$$

Minden egyes ν_{k-1} érték mellett a többi változó értékeit meghatározó kongruencia :

$$a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2 + \dots + a_{k-2} \nu_{k-2} = A - a_{k-1} \nu_{k-1} \pmod{a_k},$$

vagy

$$\frac{a_1}{d_{k-1}} \nu_1 + \frac{a_2}{d_{k-1}} \nu_2 + \dots + \frac{a_{k-2}}{d_{k-1}} \nu_{k-2} \equiv \frac{A - a_{k-1} \nu_{k-1}}{d_{k-1}} \pmod{\frac{a_k}{d_{k-1}}},$$

hol

$$0 \leq \nu_i < \frac{a_k}{d_{ik}} = \frac{a_k}{d_{k-1}} : \frac{d_{ik}}{d_{k-1}}.$$

Itt, minthogy a_i és a_k legnagyobb közös osztója d_{ik} , az $\frac{a_i}{d_{k-1}}$ és $\frac{a_k}{d_{k-1}}$ legnagyobb közös osztója lesz

$$\frac{d_{ik}}{d_{k-1}} .$$

Látható, hogy az utóbbi kongruencia olyan, melynek megoldásai számát már ismerjük, ugyanis :

$$\left(\frac{a_k}{d_{k-1}} \right)^{k-3} : \frac{d_{1k}}{d_{k-1}} \frac{d_{2k}}{d_{k-1}} \dots \frac{d_{k-2, k}}{d_{k-1}} =$$

$$= \frac{a_k^{k-3} d_{k-1}}{d_{1k} d_{2k} \dots d_{k-2, k}} .$$

A ν_{k-1} minden egyes értéke mellett ennyi különféle értékcsoporthot vehet a többi változó. Ennélfogva az összes megoldások száma :

$$\frac{a_k}{d_{k-1}d_{k-1,k}} \cdot \frac{a_k^{k-3}d_{k-1}}{d_{1k}d_{2k} \dots d_{k-2,k}} =$$

$$= \frac{a_k^{k-2}}{d_{1k}d_{2k} \dots d_{k-1,k}}.$$

Ez ugyanolyan szerkezetű kifejezés, mint az $n = k - 1$ esetben való volt; ki lehet tehát mondani, hogy az

$$a_1\nu_1 + a_2\nu_2 + \dots + a_{n-1}\nu_{n-1} \equiv \nu \pmod{a_n}, \quad \left(0 \leq \nu_i < \frac{a_n}{d_{in}}\right)$$

határozatlan kongruencia megoldásainak száma:

$$\frac{a_n^{n-2}}{d_{1n}d_{2n} \dots d_{n-1,n}}.$$

Nem nehéz kiszámítani a $\sum_{\nu_i} a_i\nu_i$ összeget sem, értve az összegezést a kongruencia összes megoldásaira.

Mínthogy ugyanis

$$\nu_i = \gamma_{a_id_i}^{(A)} + \sigma_i d_i,$$

lesz

$$\sum_{\nu_i} a_i\nu_i = \frac{a_n^{n-2}a_i}{d_{1n}d_{2n} \dots d_{n-1,n}} \gamma_{a_id_i}^{(A)} +$$

$$+ \frac{a_id_i}{2} \frac{a_n}{d_id_{in}} \left(\frac{a_n}{d_id_{in}} - 1 \right) \frac{a_n^{n-3}d_id_{in}}{d_{1n}d_{2n} \dots d_{n-1,n}} =$$

$$= \frac{a_n^{n-2}}{d_{1n}d_{2n} \dots d_{n-1,n}} \left(a_i\gamma_{a_id_i}^{(A)} - \frac{a_id_i}{2} \right) + \frac{a_n^{n-1}a_i}{2d_{1n}d_{2n} \dots d_{n-1,n}d_{in}}.$$

1. Példa.

$$\frac{\nu_1 + \nu_2 \equiv A \pmod{2}}{\nu_1 = \gamma_{12}^{(A)}, \gamma_{12}^{(A-1)}} \\ \nu_2 = 0, \quad 1.$$

2. Példa.

$$\frac{\nu_1 + 3\nu_2 \equiv A \pmod{2}}{\nu_1 = \gamma_{12}^{(A)}, \gamma_{12}^{(A-1)}} \\ \nu_2 = 0, \quad 1.$$

3. Példa.

$$\frac{\nu_1 + 2\nu_2 \equiv A \pmod{3}}{\nu_1 = \gamma_{13}^{(A)}, \gamma_{13}^{(A-2)}, \gamma_{13}^{(A-1)}} \\ \nu_2 = 0, \quad 1, \quad 2.$$

4. Példa.

$$\begin{array}{c} \nu_1 + 2\nu_2 + 4\nu_3 \equiv A \pmod{3} \\ \hline \nu_1 = \eta_{13}^{(A)}, \eta_{13}^{(A-2)}, \eta_{13}^{(A-1)}, \eta_{13}^{(A-1)}, \eta_{13}^{(A)}, \eta_{13}^{(A-2)}, \eta_{13}^{(A-2)}, \eta_{13}^{(A-1)}, \eta_{13}^{(A)} \\ \nu_2 = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 0, \quad 1, \quad 2 \\ \nu_3 = 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 2. \end{array}$$

5. Példa.

$$\begin{array}{c} 2\nu_1 + 3\nu_2 \equiv A \pmod{4} \\ \hline \nu_1 = 0, \quad 1 \\ \nu_2 = \eta_{34}^{(A)}, \eta_{34}^{(A-3)}. \end{array}$$

IV.

Kettős particziók esetén ($r=2$) a redukeziós képlet:

$$\begin{aligned} \varphi(A_1 A_2) &\equiv \text{Coëff } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \text{ in } \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}})} = \\ &= \sum_{m=1}^n p \left(\begin{array}{c} A_1 a_{1m} \\ A_2 a_{2m} \end{array} \right) \sum_{\substack{im \\ i \nparallel m}} \text{coëff } z_1^{a_{1im}} \left\{ \begin{array}{c} A_1 a_{1m} \\ A_2 a_{2m} \end{array} \right\} \sum_i^{(m)} \nu_{im} \delta_1(im) \Big\} \\ &\text{in } \frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(1 - z_1^{\frac{\delta_1(im)}{d_{im}}} \right)}, \end{aligned}$$

hol

$$\sum_{i=1}^{n, (m)} a_{2i} \nu_{im} \equiv A_2 \pmod{a_{2m}}, \quad \left(0 \leq \nu_{im} < \frac{a_{2m}}{d_{im}} \right).$$

A kongruenzia megoldásainak száma:

$$\frac{a_{2m}^{n-2}}{d_{1m} d_{2m} \dots d_{m-1, m} d_{m+1, m} \dots d_{nm}}.$$

A teljes végső képlet felírása igen hosszadalmas volna, azért itt csak a legmagasabb, $(n-2)$ fokú részét a kifejezésnek állítjuk elő.

Az egyszerű particziók elmélete szerint ugyanis:

$$\text{Coëff } z_1^M \text{ in } \frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{(m)} \left(1 - z_1 \frac{\delta_1(im)}{d_{im}}\right)} = \frac{M^{n-2}}{(n-2)! \prod_{i=1}^n \prod_{(m)} \frac{\delta_1(im)}{d_{im}}} + \dots$$

Ennélfogva $\varphi(A_1 A_2)$ -ben az A_1 és A_2 -ben $(n-2)$ fokú rész lesz:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n p \left\{ \frac{A_1 a_{1m}}{A_2 a_{2m}} \right\} \frac{\left| \frac{A_1 a_{1m}}{A_2 a_{2m}} \right|^{n-2} a_{2m}^{n-2} \prod_i \prod_{(m)} d_{im}}{a_{2m}^{n-2} (n-2)! d_{1m} d_{2m} \dots d_{m-1, m} d_{m+1, m} \dots d_{nm} \prod_i \prod_{(m)} \delta(im)} + \dots = \\ = \sum_{m=1}^n p \left\{ \frac{A_1 a_{1m}}{A_2 a_{2m}} \right\} \frac{\left| \frac{A_1 a_{1m}}{A_2 a_{2m}} \right|^{n-2}}{(n-2)! \prod_{i=1}^n \prod_{(m)} \delta_1(im)} + \dots \end{aligned}$$

A $\varphi(A_1 A_2)$ teljes kiszámítását csak néhány numerikus példán végezzük el.

Az ezekben szükséges egyszerű particziók képletei:

$$\text{Coëff } z_1^A \text{ in } \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1)} = A+1,$$

$$\text{Coëff } z_1^A \text{ in } \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1^2)} = \frac{A+2-\gamma_{12}^{(A)}}{2},$$

$$\text{Coëff } z_1^A \text{ in } \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1)(1-z_1^2)} = \frac{A^2+4A+4-\gamma_{12}^{(A)}}{4},$$

$$\begin{aligned} \text{Coëff } z_1^A \text{ in } \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1^2)(1-z_1^3)} = \\ = \frac{3A^2+18A+28-9\gamma_{12}^{(A)}-4\gamma_{13}^{(A)}+4\gamma_{13}^{(A-1)}}{36}. \end{aligned}$$

Most a kettős particziókra vonatkozó példák:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Coëff } z_1^A z_2^B \text{ in } \frac{1}{(1-z_1^2 z_2)(1-z_1^2 z_2)(1-z_1 z_2)} = \\ = p(A-3B) \text{ coëff } z_1^{A-3B} \text{ in } \frac{1}{(1-z_1^{-1})(1-z_1^{-2})} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p(A-2B) \text{ coeff } z_1^{A-2B} \text{ in } \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1^{-1})} + \\
& + p(A-B) \text{ coeff } z_1^{A-B} \text{ in } \frac{1}{(1-z_1^2)(1-z_1)} = \\
& = p(A-3B) \text{ coeff } z_1^{A-3B-3} \text{ in } \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1^2)} - \\
& - p(A-2B) \text{ coeff } z_1^{A-2B-1} \text{ in } \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1)} + \\
& + p(A-B) \text{ coeff } z_1^{A-B} \text{ in } \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1^2)} = \\
& = p(A-3B) \left[\frac{A-3B-1-\eta_{12}(A-B-1)}{2} \right] - \\
& - p(A-2B) [A-2B] + \\
& + p(A-B) \left[\frac{A-B+2-\eta_{12}(A-B)}{2} \right] = \\
& = \left\{ \frac{1}{2} p(A-3B) - p(A-2B) + \frac{1}{2} p(A-B) \right\} A + \\
& + \left\{ -\frac{3}{2} p(A-3B) + 2p(A-2B) - \frac{1}{2} p(A-B) \right\} B + \\
& + \left\{ [-p(A-3B) + p(A-B)] + \left[\frac{1}{2} p(A-3B) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} p(A-B) \right] \eta_{12}(A-B) \right\}.
\end{aligned}$$

Álesetek:

Ha

$$B < A < 2B,$$

akkor

$$\varphi(AB) = \frac{A}{2} - \frac{B}{2} + 1 - \frac{1}{2} \eta_{12}(A-B).$$

Ha

$$2B < A < 3B,$$

akkor

$$\varphi(AB) = -\frac{A}{2} + \frac{3}{2} B + 1 - \frac{1}{2} \eta_{12}(A-B).$$

Ha

$$A < B, \text{ vagy } A \geq 3B,$$

akkor

$$\varphi(AB) = 0.$$

Helyettesítés. Legyen $A = 67$, $B = 48$,

$$\varphi(AB) = \frac{67 - 48 + 2 - \eta_{12}^{(19)}}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Ennyi a

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 67 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 48 \end{aligned} \right\}$$

határozatlan egyenletrendszer megoldásainak száma.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Coeff } z_1^A z_2^B \text{ in } & \frac{1}{(1 - z_1^3 z_2)(1 - z_1^5 z_2^2)(1 - z_1^2 z_2)} = \\ & = p(A - 3B) \text{ coeff } z_1^{A-3B-2} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1)(1 - z_1)} - \\ & - p(2A - 5B) \left| \text{coeff } z_1^{\frac{2A-5B-\eta_{12}^{(9)}}{2}-1} + \right. \\ & + \left. \text{coeff } z_1^{\frac{2A-5B-\eta_{12}^{(6-1)}}{2}-1} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1)(1 - z_1)} \right| + \\ & + p(A - 2B) \text{ coeff } z_1^{A-2B} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1)(1 - z_1)} = \\ & = p(A - 3B)(A - 3B - 1) - p(2A - 5B)(2A - 5B) + \\ & + p(A - 2B)(A - 2B + 1). \end{aligned}$$

Aleset:

Ha

$$5 \cdot B < A < 3B,$$

akkor

$$\varphi(A, B) = -A + 3B + 1.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Coeff } z_1^A z_2^B \text{ in } & \frac{1}{(1 - z_1^3 z_2)(1 - z_1^8 z_2^3)(1 - z_1^5 z_2^2)} = \\ & = p(A - 3B) \text{ coeff } z_1^{A-3B-2} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1)(1 - z_1)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -p(3A-8B) \left\{ \text{coeff } z_1 \frac{3A-8B-\eta_{13}^{(8)}}{3} - 1 \right. + \\
& + \text{coeff } z_1 \frac{3A-8B-\eta_{13}^{(8-2)}+1}{3} - 1 + \\
& \left. + \text{coeff } z_1 \frac{3A-8B-\eta_{13}^{(8-1)}+2}{3} - 1 \right\} \ln \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1)} + \\
& + p(2A-5B) \left\{ \text{coeff } z_1 \frac{2A-5B-\eta_{13}^{(8)}}{2} + \right. \\
& + \text{coeff } z_1 \frac{2A-5B-\eta_{13}^{(8-1)}-1}{2} \left. \ln \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1)} \right\} = \\
& = p(A-3B)(A-3B-1) - p(3A-8B)(3A-8B) + \\
& + p(2A-5B)(2A-5B+1).
\end{aligned}$$

Aléset :

Ha

$$8/8 B < A < 3B,$$

akkor

$$\varphi(AB) = -A + 3B + 1.$$

$$\begin{aligned}
& 4. \text{ Coeff } z_1^A z_2^B \ln \frac{1}{(1-z_1^4 z_2)(1-z_1^3 z_2)(1-z_1^2 z_2)(1-z_1 z_2)} = \\
& = -p(A-4B) \text{coeff } z_1^{A-4B-6} \ln \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1^2)(1-z_1^3)} + \\
& + p(A-3B) \text{coeff } z_1^{A-3B-3} \ln \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1)(1-z_1^2)} - \\
& + p(A-2B) \text{coeff } z_1^{A-2B-1} \ln \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1)(1-z_1^2)} - \\
& - p(A-B) \text{coeff } z_1^{A-B} \ln \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1^2)(1-z_1^3)} = \\
& = -p(A-4B) \left\{ \frac{3(A-4B-6)^2 + 18(A-4B-6) + 28}{36} \right. \\
& \quad \left. - \frac{9\eta_{12}^{(A)} - 4\eta_{13}^{(A-B)} + 4\eta_{13}^{(A-B-1)}}{36} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ p(A-3B) \left\{ \frac{(A-3B-3)^2 + 4(A-3B-3) + 4 - \gamma_{12}^{(A-B-1)}}{4} \right\} - \\
 &- p(A-2B) \left\{ \frac{(A-2B-1)^2 + 4(A-2B-1) + 4 - \gamma_{12}^{(A-1)}}{4} \right\} - \\
 &+ p(A-B) \left\{ \frac{3(A-B)^2 + 18(A-B) + 28 - 9\gamma_{12}^{(A-B)} - 4\gamma_{13}^{(A-B)} + 4\gamma_{13}^{(A-B-1)}}{36} \right\}.
 \end{aligned}$$

Rendezés után ez ily alakot vesz fel:

$$A^2 a_{11}(A, B) + AB a_{12}(A, B) + B^2 a_{22}(A, B) + A a_{13}(AB) + B a_{23}(AB) + a_{33}(AB).$$

Áleset:

Ha

$$2B < A < 3B,$$

akkor

$$\begin{aligned}
 \varphi(AB) = & -\frac{A^2}{6} + \frac{5}{6}AB - \frac{11}{12}B^2 + \frac{A}{2} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}\gamma_{12}^{(A)} - \\
 & - \frac{1}{4}\gamma_{12}^{(A-B)} - \frac{1}{9}\gamma_{13}^{(A-B)} + \frac{1}{9}\gamma_{13}^{(A-B-1)}.
 \end{aligned}$$

Helyettesítés: Legyen $A = 20$, $B = 6$,

akkor

$$\varphi(AB) = -\frac{400}{6} + \frac{600}{6} - \frac{11.36}{12} + \frac{20}{2} + \frac{7}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = 11.$$

Ennyi a

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

határozatlan egyenletrendszer megoldásainak száma. —

Már e numerikus példák is mutatják, de algebrailag is bizonyítható (mely bizonyítással itt nem foglalkozunk), hogy a ket-
tős particziók száma $\varphi(A_1, A_2)$ zérus, mihamint az

$$\begin{vmatrix} A_1 a_{1m} \\ A_2 a_{2m} \end{vmatrix} \quad (m=1, 2, \dots, n)$$

determinánsok mindenike negatív, és akkor is, ha ezek minde-
nike pozitív; zérustól tehát csak akkor, azaz olyan A_1, A_2 ér-
tékpárok mellett különbözhetik, amikor a fenti determinánsok
részben pozitívok, részben negatívok.

A kettős particziók tulajdonságainak részletesebb taglalását
itt mellőzzük. —

Hármas particziók esetén ($r = 3$) a redukziós képlet:

$$\begin{aligned} \varphi(A_1 A_2 A_3) &= \text{coeff } z_1^{A_1} z_2^{A_2} z_3^{A_3} \text{ in } \frac{1}{\prod_i (1 - z_1^{a_{1i}} z_2^{a_{2i}} z_3^{a_{3i}})} = \\ &= \sum_{m=1}^n p \left| \frac{A_1 a_{1m}}{A_3 a_{3m}} \right| p \left| \frac{A_2 a_{2m}}{A_3 a_{3m}} \right| \sum_{\substack{i \neq m \\ i \neq 1, 2}} \nu_{im} \dots \\ \text{coeff } z_1 &\frac{1}{a_{3m}} \left\{ \frac{A_1 a_{1m}}{A_3 a_{3m}} - \sum_i^{(m)} \nu_{im} \delta_1(im) \right\} \frac{1}{z_2} \frac{1}{a_{3m}} \left\{ \frac{A_2 a_{2m}}{A_3 a_{3m}} - \sum_i^{(m)} \nu_{im} \delta_2(im) \right\} \\ &\text{in } \frac{1}{\prod_{i=1}^{n(m)} \left(1 - z_1 \frac{\delta_1(im)}{a_{im}} z_2 \frac{\delta_2(im)}{a_{im}} \right)}, \end{aligned}$$

hol

$$\sum_i^{(m)} a_{3i} \nu_{im} \equiv A_3 \pmod{a_{3m}}, \quad 0 \leq \nu_{im} < \frac{a_{3m}}{a_{im}}.$$

Példa.

$$\begin{aligned} &\text{Coeff } z_1^{A_1} z_2^{A_2} z_3^{A_3} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1^8 z_2^3 z_3^1) (1 - z_1^5 z_2^2 z_3^1) (1 - z_1^3 z_2^1 z_3^1) (1 - z_1^0 z_2^0 z_3^1)} = \\ &= p(A_1 - 8A_3) p(A_2 - 3A_3) \text{coeff } z_1^{A_1 - 8A_3} z_2^{A_2 - 3A_3} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1^{-3} z_2^{-1}) (1 - z_1^{-5} z_2^{-2}) (1 - z_1^{-3} z_2^{-1})} + \\ &+ p(A_1 - 5A_3) p(A_2 - 2A_3) \text{coeff } z_1^{A_1 - 5A_3} z_2^{A_2 - 2A_3} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1^3 z_2^1) (1 - z_1^{-2} z_2^{-1}) (1 - z_1^{-5} z_2^{-2})} + \\ &+ p(A_1 - 3A_3) p(A_2 - A_3) \text{coeff } z_1^{A_1 - 3A_3} z_2^{A_2 - A_3} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1^5 z_2^2) (1 - z_1^3 z_2^1) (1 - z_1^{-3} z_2^{-1})} + \\ &+ p(A_1) p(A_2) \text{coeff } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1^8 z_2^3) (1 - z_1^5 z_2^2) (1 - z_1^3 z_2^1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -p(A_1 - 8A_3) p(A_2 - 3A_3) \text{coeff } z_1^{A_1 - 8A_3 - 16} z_2^{A_2 - 3A_3 - 6} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1^3 z_2^1) (1 - z_1^8 z_2^3) (1 - z_1^5 z_2^2)} + \\
 &+ p(A_1 - 5A_3) p(A_2 - 2A_3) \text{coeff } z_1^{A_1 - 5A_3 - 7} z_2^{A_2 - 2A_3 - 3} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1^3 z_2^1) (1 - z_1^5 z_2^2) (1 - z_1^2 z_2^1)} - \\
 &- p(A_1 - 3A_3) p(A_2 - A_3) \text{coeff } z_1^{A_1 - 3A_3 - 3} z_2^{A_2 - A_3 - 1} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1^3 z_2^1) (1 - z_1^5 z_2^2) (1 - z_1^2 z_2^1)} + \\
 &+ p(A_1) p(A_2) \text{coeff } z_1^{A_1} z_2^{A_2} \text{ in } \frac{1}{(1 - z_1^3 z_2^1) (1 - z_1^8 z_2^3) (1 - z_1^5 z_2^2)} = \\
 &= -p(A_1 - 8A_3) p(A_2 - 3A_3) \{p(A_1 - 3A_2 + A_3 + 2) (A_1 - 3A_2 + A_3 + 1) - p(3A_1 - 8A_2) (3A_1 - 8A_2) + \\
 &\quad + p(2A_1 - 5A_2 - A_3 - 2) (2A_1 - 5A_2 - A_3 - 1)\} + \\
 &+ p(A_1 - 5A_3) p(A_2 - 2A_3) \{p(A_1 - 3A_2 + A_3 + 2) (A_1 - 3A_2 + A_3 + 1) - p(2A_1 - 5A_2 + 1) (2A_1 - 5A_2 + 1) + \\
 &\quad + p(A_1 - 2A_2 - A_3 - 1) (A_1 - 2A_2 + A_3)\} - \\
 &- p(A_1 - 3A_3) p(A_2 - A_3) \{p(A_1 - 3A_2) (A_1 - 3A_2 - 1) - p(2A_1 - 5A_2 - A_3 - 1) (2A_1 - 5A_2 - A_3 - 1) + \\
 &\quad + p(A_1 - 2A_2 - A_3 - 1) (A_1 - 2A_2 + A_3)\} + \\
 &+ p(A_1) p(A_2) \{p(A_1 - 3A_2) (A_1 - 3A_2 - 1) - p(3A_1 - 8A_2) (3A_1 - 8A_2) + \\
 &\quad + p(2A_1 - 5A_2) (2A_1 - 5A_2 + 1)\}.
 \end{aligned}$$

Ez rendezés után ily alakba jön:

$$\varphi(A_1 A_2 A_3) = A_1 a_1 (A_1 A_2 A_3) + A_2 a_2 (A_1 A_2 A_3) \\ + A_3 a_3 (A_1 A_2 A_3) + a_4 (A_1 A_2 A_3).$$

1. Helyettesítés. Ha

$$A_1 = 23, A_2 = 9, A_3 = 5, \text{ akkor: } \varphi(A_1 A_2 A_3) = 2.$$

2. Helyettesítés. Ha

$$A_1 = 33, A_2 = 12, A_3 = 7, \text{ akkor: } \varphi(A_1 A_2 A_3) = 2.$$

3. Helyettesítés. Ha

$$A_1 = 48, A_2 = 18, A_3 = 10, \text{ akkor: } \varphi(A_1 A_2 A_3) = 5.$$

A

$$\left. \begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 48 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned} \right\}$$

határozatlan egyenletrendszernek valóban 5 megoldása van, ezek:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 6, & 5, & 4, & 5, & 2 \\ x_2 &= 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \\ x_3 &= 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \\ x_4 &= 4, & 3, & 2, & 1, & 0 \end{aligned} \right\}$$

E példa is jelzi, a formula segítségével általánosan is ki-mutatható (bár e bizonyítással itt nem foglalkozunk), hogy a hármas particziók száma zérus, ha az

$$\begin{vmatrix} A_1 a_{1m} \\ A_3 a_{3m} \end{vmatrix} \text{ és } \begin{vmatrix} A_2 a_{2m} \\ A_3 a_{3m} \end{vmatrix}$$

determinánsok mindenike negatív, vagy mindenike pozitív, vagy az

$$\begin{vmatrix} A_1 a_{1m} \\ A_3 a_{3m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2 a_{2m} \\ A_3 a_{3m} \end{vmatrix}$$

szorzatok mindenike negatív. Hármas particzió csak úgy lehet tehát, ha az



$$\begin{vmatrix} A_1 a_{1m} \\ A_3 a_{3m} \end{vmatrix} \text{ és } \begin{vmatrix} A_2 a_{2m} \\ A_3 a_{3m} \end{vmatrix}$$

determináns párok némelyike pozitív.

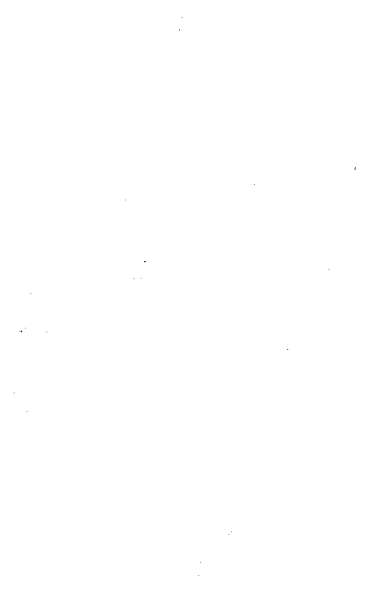
A hármas particziók száma egyéb sajátságainak általános kifejtése, így például a legmagasabb, $(n-3)$ fokú kifejezésrész algebrai kiszámítása és ennek alapján a többszörös particziók abszolút formulájának szerkezetébe való bővebb bepillantás különálló részletes tárgyalásoknak lehet a feladata.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1913 nov. 17.-én tartott üléséből.)

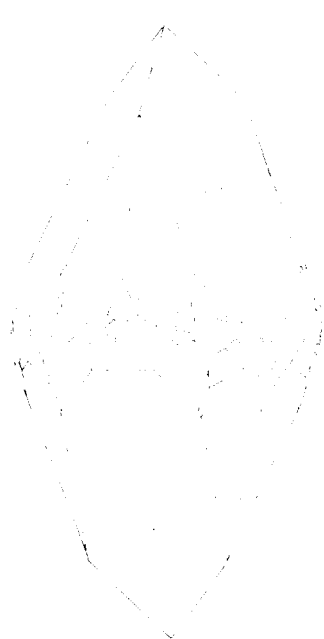
1.



2.



3.



4.





VIZSGÁLATOK A FOLYADÉKOK SURLÓDÁSÁRÓL.

(Harmadik közlemény.)

Cseppfolyós testek belső surlódása és csuszamlása.

ZEMPLÉN GYÖZŐ I. t. és POGÁNY BÉLA-tól.

TARTALOMJEGYZÉK.

- 13. §. Bevezetés.
- 14. §. A kísérletek leírása és eredményei.
- 15. §. A kísérletek eredményeinek az elmélettel való egybevetése.
- 16. §. A víz csuszamlása vörösrézén.
- 17. §. Összefoglalás.

13. §. Bevezetés.

A szerzők egyike több megelőző közleményében számolt be arról a módszeréről, a melyet folyadékok belső surlódásának megvizsgálására kidolgozott.¹ Legutolsó közleményében elméleti úton levezette azt a forgató nyomatékot, a melyet bármekkora sebesség mellett a belső surlódás egy gömbre kifejt akkor, ha a drótra felfüggesztett gömb körül egy másik, vele concentrikus gömbhéj forog egyenletes sebességgel függélyes átmérője körül; végre ezt az elméleti eredményt levegő és széndioxyd esetében igen tág sebességi határok között kísérlettel megvizsgálta és kielégítő pontossággal igazolta.

¹ *Zemplén Győző*, ez *Értesítő XXVII. kötete 77—137. l. (1909) és XXIX. k. 645—718 l. (1911).* A jelen dolgozatban a §-ok számozása a második közleményhez csatlakozik. A jelöléseket is változtatlanul megtartottuk.

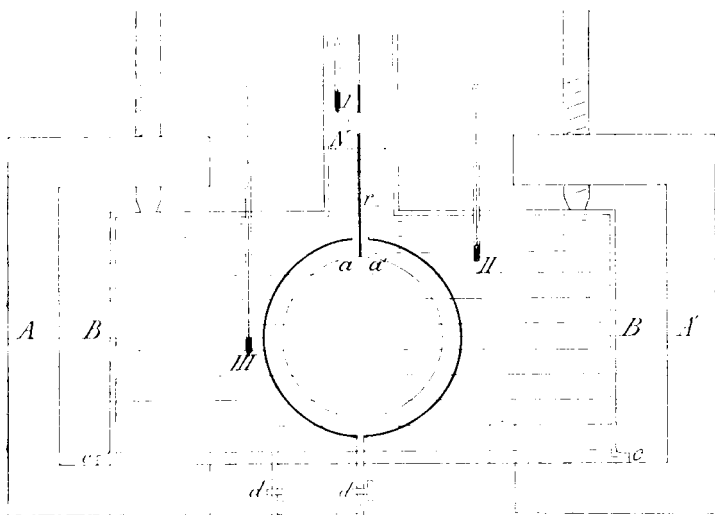
A hydrodynamika alapegyenleteiből levezetett törvényszerűségnek az elmélet értelmében az anyag minőségétől függetlenül bármilyen folyadékra érvényesnek kell lennie, hacsak a folyadék összenyomhatatlan. Nem lehet tehát érdektelen annak megvizsgálása, vajjon érvényessége az eddig meg nem vizsgált *cseppfolyós* testekre is kiterjed. E kérdésnek kísérleti úton való megoldására vállalkoztak a szerzők, kik ezúttal vizsgálatuk tárgyává a *víz* választották. A víz belső surlódásának együtthatója több mint 50-szer akkora, mint a levegőé, míg sűrűsége majdnem 800-szorosan múlja fölül a levegőét, érdekes tehát megtudni, hogy ennyire különböző quantitativ sajátágú, sőt különböző halmazállapotú anyagok mechanikai tekintetben hogyan viselkednek. Mindjárt előre bocsátjuk azt a végeredményt, hogy a levegő, a széndioxyd és a víz az elméleti úton levezetett törvényt az általunk megvizsgált igen tág sebességi határok között egyaránt követi; ugyanis a vízzel végzett kísérleteinkben is körülbelül ugyanazokat a sebességeket állítottuk elő, mint a levegővel és széndioxyddal végzetekben (a külső gömbhéj egy körülfordulásának ideje $\varrho = 0.17$ sec. és $\varrho = 9400$ sec. között változott) és a vízre vonatkozó mérési eredmények egészen jól beilleszkednek a gázokra vonatkozó eredmények közé.

Különösen figyelemre méltónak tartjuk, hogy sem a gázok, sem pedig a víz esetében a belső surlódás forgató nyomatékának a sebességgel való ugrásszerű változását nem tapasztaltuk; e nyomaték a sebességgel mindig fokozatosan, egyazon törvényszerűség szerint változott; a folyadékok mozgásánál turbulencia e szerint nem állott be, pedig a beálló sebességek, különösen víz esetében, messze túlhaladták azokat a sebességeket, a melyek mellett csövekben már bekövetkezik a turbulencia.

Másik feladatunk annak a máig véglegesen még nem tisztázott kérdésnek kísérleti megvizsgálása volt, vajjon a víz mozgása közben teljesen odatapad-e a vele érintkező szilárd test felszínéhez, avagy pedig sebességkülönbség áll be (csuszamlás) a szilárd test és a vele érintkező vízréteg közt. Kísérleteink arra az eredményre vezettek, hogy az általunk megvizsgált esetekben csuszamlás nincs.

14. §. A kísérletek leírása és eredményei.

A víz belső surlódására vonatkozó méréseinket az úgynevezett eltérítési módszerrel végeztük, melyet ZEMPLÉN használt először régebbi vizsgálataiban és melyet ott részletesen ismertetett is. A használt eszköz is, és ez a későbbiekre nézve fontos, ugyanaz volt, melylyel ZEMPLÉN a levegő és CO_2 belső surlódását vizsgálta. Magának az eszköznek vázlatos keresztmetszete az 1. ábrán látható.



1. ábra.

A külső gömbhéjat óraművel vagy motorral forgásba hozva, a két koncentrikus gömbhéj közti folyadék réteg forgató nyomatékot gyakorol a belső, dróton függő, lengő gömbhéjra, mely ennek következtében δ szöggel elfordul. Ha a δ szögnek megfelelő n kitérést egy A távolságban levő skálán leolvassuk, meghatározzuk továbbá a külső gömb egy körülfordulásának idejét, Q -t, végre a lengő rendszer lengési idejét, T -t levegőben, akkor a belső surlódás együtthatóját az alább közölt képlettel kiszámíthatjuk.

Tekintve, hogy méréseink anyaga ezúttal víz volt, az esz-

közön néhány lényegtelen változtatást tettünk. Az eszközt az 1. ábrán jelzett N felszínig töltöttük meg vízzel. Az így beálló hydrostatikus nyomás az egész készüléket borító B fémburát c -nél felemelte és ott a víz kifolyhatott. Ennek megakadályozására alkalmaztuk A , A' szorító-csavarokat, melyek segítségével a bura tökéletesen zárt. Továbbá a lengő gömbhéjon a és a' -nél egy-egy lyukat fúrtunk. Mindkét nyílást egészen a gömbhéj felfüggesztési pontja mellett helyeztük el; az átmérőjük valamivel kisebb volt 0.5 mm-nél. Erre a két nyílásra azért volt szükségünk, hogy a lengő gömbhéjban foglalt levegő az eszköznek vízzel való megtöltésekor, a mi légbuborékok elkerülése czéljából alulról, a d , d' csapokon keresztül történt, a gömbhéjból kényelmesen és biztosan távozhasson.

Méréseinkhez destillált vizet használtunk, melyet az egyetemi I. sz. chemiai intézetből szereztünk be. Nemcsak a két koncentrikus gömbhéj által határolt teret, hanem az egész eszközt úgy, a mint az az 1. ábrán jelezve van, vízzel töltöttük meg. Ily módon körülbelül 22 liter víz volt az eszközben és a két gömbhéjat körülvevő vastag vízréteg kitűnő védelmet nyújtott a hőmérséklet esetleges ingadozásai ellen. Egy-egy töltéssel átlag 2—3 mérést végeztünk. Kifogástalanabb lett volna a mérés, ha az eszközt a felfüggesztési dróttal együtt teljesen víz alá merítjük, mert ezáltal a capillaritas zavaró hatásait teljesen kiküszöböltük volna; a tükör víz alá merítése alkalmával azonban a leolvasás okozott volna nehézségeket, azért a víznívót csak a tükör alsó széléig emeltük. Meggyőződünk azonban arról, hogy a capillaritas észrevehető zavart nem okoz; még pedig oly módon, hogy méréseket végeztünk két különböző vastagságú (1 mm és 3 mm) tükörtartó r rúd mellett; a két esetben különbség nem volt tapasztalható.

Kísérleteink két fő csoportra oszolnak. Az első csoportban úgy a külső, forgó, mint a belső, lengő gömbhéj ugyanaz volt, melyet ZEMPLÉN is használt levegőre és CO_2 -re vonatkozó vizsgálataiban. Méréseink másik csoportjában, melyet a csuszamlás jelenségének vizsgálása czéljából végeztünk, a belső lengő gömbhéjat kicseréltük egy másikkal, melynek sugara a régi gömbhéj sugaránál kb. 1 cm-rel kisebb volt. Két különböző sugarú lengő

gömbhéjjal végzett mérés kombinációja ugyanis lehetővé teszi a csuszamlási állandó meghatározását. Az új gömbhéjat ugyan-csak SÜSS NÁNDOR mechanikai intézete készítette. A gömbhéj külső $2r$ átmérőjét kathetometerrel határoztuk meg, még pedig felületének nagyon sok pontján. A mérések azt mutatták, hogy a gömbfelület esztergályozása kitűnően sikerült. Mutatóba közöl-jük az egymástól 90° -nyira fekvő két meridián különböző pont-jain lemért $2r$ értékeket.

Az egyik meridián mentén r_2 értékei:

4.1790, 4.1757, 4.1772, 4.1753, 4.1762 cm.

A másik meridián mentén r_2 értékei:

4.1740, 4.1760, 4.1757, 4.1754, 4.1762, 4.1760 cm.

Az összes mérések eredményeinek középértékét véve, a kisebb, belső, lengő gömbhéj külső sugara:

$$r_2 = 4.1757 \text{ cm} \quad (0.1^\circ/\text{oo} \text{ hibával}).$$

Az

$$\eta = \frac{(R^3 - r_2^3)K}{16R^3r_2^3} \cdot \frac{\Omega n^4}{T^2 A} \quad (1)$$

képlet, melynek segítségével a lemért kísérleti adatokból: Ω , n , T és A -ból η -t, a belső surlódás együtthatóját kiszámítottuk [Ω a külső gömbhéj egy körülfordulásának az ideje, n a skálán észlelt kitérés, T a belső, lengő gömbhéj lengési ideje a levegőben, A a skálatávolság fél skálárészekben mérve], csak nagyon lassú forgások esetében érvényes, illetve csakis Ω nagy értékei mellett szolgáltatja magát η -t. Gyorsabb mozgásokra alkalmazva, tehát Ω kisebb értékei mellett, az (1) képlet a *látszólagos belső surlódási együtthatót*, $\bar{\eta}$ -t adja.² Mint állandók szerepelnek az (1) kép-

¹ ZEMPLÉN: Math. Term. Ért. 27. köt. 87. l. (12) képlet.

² ZEMPLÉN: Math. Term. Ért. 29. köt. 698. l. (34) képlet.

letben: R , a külső, forgó gömb belső sugara, r_2 a belső, lengő gömbhéj külső sugara és K , a lengő gömbhéj tehetetlenségi nyomatéka. A kisebbik gömbhéj külső sugarának meghatározásáról már szözlöttünk. Hogy tehát a kisebbik gömbhéj alkalmazása esetében érvényes képletet fölírassuk, szükségünk volt még K értékére. A kisebbik gömbhéj tehetetlenségi nyomatékát, K -t az ismert módon lengésidő-meghatározásokkal mértük meg úgy, hogy egy és ugyanarra a drótra felfüggesztve lengettük az ismert tehetetlenségi nyomatékkal bíró régi, nagyobbik gömbhéjat és azután az újat.

Nagyobb forgás-sebességeknél a belső, lengő gömbhéjat tehetetlenségi nyomatékának tetemes növelése céljából 0.4 mm átmérőjű ólomsöréttel töltöttük meg. A söréttel telt gömbhéj tehetetlenségi nyomatékát ugyancsak az előbbi módon határoztuk meg. Mindegyik esetben a mérést több különböző anyagú és átmérőjű dróton megismételtük és az eredmények 3—4 ezredrészig egyeztek.

Ezek alapján a kisebbik lengő gömbhéj tehetetlenségi nyomatéka üresen

$$K_u = 2682.62 \text{ c. g. s.}$$

és seréttel telve

$$K_t = 15133 \text{ c. g. s.}$$

R értéke még ZEMPLÉN régebbi méréseiből¹ ismeretes:

$$R = 5.5645 \text{ cm.}$$

Ha már most R , r_2 és K_u illetve K_t értékeit az (1) képletbe helyettesítjük, akkor a kisebbik lengő gömbhéj esetében $\bar{\gamma}$ számára a következő:

$$\log \bar{\gamma} = 0.123754 + \log Q + \log n - \log A - 2 \log T, \quad (2)$$

illetve

$$\log \bar{\gamma} = 0.875118 + \log Q + \log n - \log A - 2 \log T \quad (3)$$

képletet kapjuk.

¹ ZEMPLÉN Győző: ez Értesítő 27. k. 96. l.

A régi, nagyobbik gömbbel végzett mérések kiszámítására természetesen a régi

$$\log \bar{\gamma} = 0.762562 - 1 + \log Q + \log n - \log A - 2 \log T,^1 \quad (4)$$

illetve

$$\log \bar{\gamma} = 0.707227 + \log Q + \log n - \log A - 2 \log T^1 \quad (5)$$

képleteket használtuk.

Minthogy a vízbe merülő gömbhéj lengése közben bizonyos vízréteget is magával ragad, tehetetlenségi nyomatóka vízben más mint levegőben; minthogy továbbá a lengési idő méréséből a drót torsio-momentumára akarunk — állandó tehetetlenségi nyomatók mellett — következtetni, T lemérését mindenkor levegőben eszközöltük, minthogy a K tehetetlenségi nyomatókok meghatározása is levegőben történt. T -t vízben amúgy sem lehetett volna kielégítő pontossággal lemérni, minthogy a jelentékeny csillapodás mellett nem sikerült elég sok átmeneti időt megfigyelni.

Egyébként próbaképpen közvetlen méréssel összehasonlítottuk néhány esetben a levegőben és a vízben mért lengési időket, még pedig a seréttel megtöltött gömb esetében, a mikor a serétszemek közé szorult víz is hozzájárul a tehetetlenségi nyomatók növeléséhez; mindamellet a vízben és a levegőben észlelt lengési idő között a különbség egy ezredrésznél kisebb volt.

E mérések részletes eredményeit a XI. és XII. táblázat tartalmazza.

¹ ZEMPLÉN: Math. Term. Ért. 27. kötete 97. lap és 29. köt. 667. lap.

XI. táblázat. Nagyblik

| A kísérlet sor-száma | A kísérlet kelte | A drót minősége és átmérője | A [fél skálárészekben] | n |
|----------------------|------------------|--------------------------------|------------------------|--------|
| 201 | 1912 márc. 25 | 0·1 $\frac{m'}{m}$ nickelin | 18000 ¹ | 198·10 |
| 202 | " 27 | " | " | 182·95 |
| 205 | " 30 | " | " | 181·33 |
| 206 | " 30 | " | " | 185·04 |
| 203 | " 29 | " | 9000 | 493·45 |
| 204 | " 29 | " | " | 508·67 |
| 207 | " 30 | " | " | 487·66 |
| 212 | ápr. 18 | " | 9008 | 521·05 |
| 208 | " 15 | " | " | 784·88 |
| 209 | " 16 | " | " | 781·35 |
| 210 | " 16 | " | " | 756·02 |
| 211 | " 17 | " | " | 758·76 |
| 213 | " 18 | " | 8975 | 582·43 |
| 216 | máj. 16 | Másik 0·1 $\frac{m'}{m}$ nick. | 8979 | 592·02 |
| 219 | " 18 | " | " | 591·47 |
| 220 | " 18 | " | " | 602·24 |
| 214 | ápr. 24 | " | 8975 | 900·48 |
| 215 | " 26 | " | " | 911·87 |
| 217 | máj. 17 | " | 8979 | 939·11 |
| 218 | " 18 | " | " | 953·70 |
| 221 | " 24 | " | 4087 | 766·24 |
| 222 | " 25 | " | " | 765·35 |
| 223 | " 27 | " | 4084 | 737·14 |
| 224 | " 27 | " | " | 730·49 |
| 225 | " 29 | 0·3 $\frac{m'}{m}$ platina | 9081 | 430·45 |
| 226 | jun. 1 | " | " | 373·62 |
| 228 | " 3 | " | 9085 | 345·44 |
| 229 | " 3 | " | " | 376·05 |
| 227 | " 1 | " | 9081 | 834·63 |
| 230 | " 3 | " | 9085 | 878·65 |

¹ 1 skálárész = ¹/₂ $\frac{m'}{m}$

lengő gömbhéj.

| Ω sec. | T sec. | θ víz | θ levegő | $\bar{\eta}_\theta \cdot 10^2$ | $\eta_{18^\circ} \cdot 10^2$ |
|---------------|----------|--------------|-----------------|--------------------------------|------------------------------|
| 9019.4 | 71.727 | 16.92° | 19.00° | 1.1168 | 1.0894 |
| 9027.0 | " | 18.53° | 19.00° | 1.0323 | 1.0462 |
| 9383.6 | " | 17.95° | 19.08° | 1.0635 | 1.0630 |
| 9264.8 | " | 17.88° | 19.70° | 1.0716 | 1.0682 |
| 3460.0 | " | 18.42° | 18.60° | 1.0672 | 1.0779 |
| 3457.1 | " | 16.96° | 18.84° | 1.0992 | 1.0718 |
| 3473.7 | " | 18.10° | 20.50° | 1.0588 | 1.0614 |
| 3461.8 | " | 18.32° | 20.39° | 1.1264 | 1.1340 |
| 2380.9 | " | 16.40° | 19.37° | 1.1714 | 1.1280 |
| 2382.1 | " | 16.81° | 20.44° | 1.1624 | 1.1300 |
| 2377.5 | " | 18.11° | 18.81° | 1.1225 | 1.1253 |
| 2380.9 | " | 17.90° | 19.58° | 1.1282 | 1.1256 |
| 1534.0 | " | 18.69° | 18.90° | 1.1200 | 1.1381 |
| 1587.40 | 71.387 | 17.71° | 18.40° | 1.1888 | 1.1808 |
| 1600.05 | " | 17.51° | 18.03° | 1.1972 | 1.1843 |
| 1564.30 | " | 17.61° | 17.88° | 1.1918 | 1.1814 |
| 975.5 | " | 19.36° | 19.75° | 1.1012 | — |
| 979.6 | " | 18.74° | 20.90° | 1.1198 | — |
| 1004.8 | " | 17.68° | 17.42° | 1.1937 | — |
| 993.33 | " | 17.45° | 17.70° | 1.1956 | — |
| 552.67 | " | 18.01° | 18.70° | 1.1769 | — |
| 554.59 | " | 18.05° | 18.06° | 1.1796 | — |
| 547.30 | " | 17.66° | 18.50° | 1.1221 | — |
| 546.90 | " | 17.77° | 18.75° | 1.1111 | — |
| 18.037 | 6.6611 | 17.83° | 18.29° | 1.1154 | — |
| 20.114 | " | 18.13° | 18.40° | 1.0810 | — |
| 22.490 | " | 19.57° | 19.10° | 1.1171 | — |
| 20.894 | " | 19.52° | 19.22° | 1.1298 | — |
| 9.587 | " | 18.18° | 18.89° | 1.1511 | — |
| 9.895 | " | 19.00° | 19.00° | 1.2502 | — |

XI. táblázat. Folytatás. Nagyobbik

| A kísérlet sor-száma | A kísérlet kelte | A drót minősége és átmérője | A [féliskálárészekben] | n |
|----------------------|------------------|-----------------------------|------------------------|--------|
| 231 | 1912 jun. 3 | 0·3 m_m platina | 9085·0 | 891·26 |
| 232 | " 3 | " | " | 887·44 |
| 233 | " 4 | " | 4272·2 | 889·48 |
| 234 | " 4 | " | " | 862·58 |
| 235 | " 5 | " | " | 901·83 |
| 236 | " 5 | " | " | 900·08 |
| 237 | " 21 | 0·46 m_m angol | 4271·2 | 746·60 |
| 238 | " 21 | acél zongorahúr | " | 787·61 |
| 239 | " 22 | 0·7 m_m aczél | " | 358·57 |
| 240 | " 23 | " | " | 413·20 |
| 241 | " 24 | " | " | 361·27 |
| 243 | " 24 | " | " | 422·80 |
| 242 | " 24 | " | " | 772·22 |
| 244 | " 24 | " | " | 812·04 |
| 245 | " 24 | " | " | 838·85 |
| 246 | " 24 | " | " | 858·60 |
| 247 | 1913 decz. 31 | 1 m_m aczél | 4484·0 | 308·02 |
| 248 | " 31 | " | " | 303·77 |
| 249 | " 31 | " | " | 310·82 |
| 250 | " 31 | " | " | 270·73 |
| 251 | " 31 | " | " | 436·15 |
| 252 | " 31 | " | " | 450·35 |
| 253 | " 31 | " | " | 458·87 |
| 254 | " 31 | " | " | 462·10 |
| 255 | " 29 | " | " | 894·99 |
| 256 | " 29 | " | " | 979·57 |
| 257 | " 29 | " | " | 949·60 |
| 258 | " 29 | " | " | 926·52 |

lengő gömbhéj.

| Ω sec. | T sec. | θ víz | θ levegő | $\eta_0 \cdot 10^2$ | $\bar{\eta}_{180} \cdot 10^2$ |
|---------------|----------|--------------|-----------------|---------------------|-------------------------------|
| 10.044 | 6.6611 | 19.00° | 19.05° | 1.2873 | — |
| 9.730 | " | 19.00° | 19.32° | 1.2399 | — |
| 5.224 | " | 18.60° | 19.20° | 1.4189 | — |
| 5.340 | " | 18.62° | 19.24° | 1.4066 | — |
| 4.820 | " | 18.45° | 19.00° | 1.3299 | — |
| 4.870 | " | 18.52° | 18.90° | 1.3385 | — |
| 2.757 | 11.3705 | 20.48° | 21.00° | 1.8995 | — |
| 2.679 | " | 20.43° | 21.20° | 1.4471 | — |
| 1.0340 | 3.0348 | 19.68° | 20.57° | 2.8571 | — |
| 0.1261 | " | 19.75° | 20.57° | 2.9488 | — |
| 1.0104 | " | 19.56° | 20.00° | 2.8129 | — |
| 0.9410 | " | 19.78° | 20.77° | 3.0659 | — |
| 0.5950 | " | 19.66° | 20.00° | 3.5407 | — |
| 0.5773 | " | 19.82° | 20.84° | 3.6125 | — |
| 0.5670 | " | 19.99° | 20.46° | 3.6652 | — |
| 0.5553 | " | 20.01° | 20.81° | 3.6741 | — |
| 0.3685 | 1.6649 | 18.00° | 18.50° | 4.6536 | — |
| 0.3739 | " | 18.00° | 18.40° | 4.6568 | — |
| 0.3631 | " | 18.00° | 18.35° | 4.6272 | — |
| 0.3994 | " | 18.00° | 18.25° | 4.4333 | — |
| 0.2526 | " | 17.92° | 19.00° | 5.2323 | — |
| 0.2848 | " | 17.96° | 18.90° | 5.2587 | — |
| 0.2815 | " | 17.99° | 18.80° | 5.2961 | — |
| 0.2805 | " | 18.00° | 18.69° | 5.3144 | — |
| 0.1780 | " | 18.51° | 21.00° | 6.5316 | — |
| 0.1762 | " | 18.65° | 20.40° | 7.0746 | — |
| 0.1731 | " | 18.76° | 20.10° | 6.7394 | — |
| 0.1752 | " | 18.80° | 20.00° | 6.6539 | — |

XII. táblázat. Kisebbik

| A kísérlet sor-száma | A kísérlet kelte | A drót minősége és átmérője | A [fél skálárészekben] | η |
|----------------------|------------------|-----------------------------|------------------------|--------|
| 263 | 1913 máj. 27 | 0·06 m_m nickelin | 7614 | 331·24 |
| 264 | " 28 | " | " | 324·26 |
| 259 | " 21 | " | " | 594·03 |
| 260 | " 23 | " | " | 580·68 |
| 261 | " 24 | " | " | 628·52 |
| 262 | " 24 | " | " | 586·21 |
| 269 | jun. 7 | 0·1 m_m nickelin | 7943·0 | 290·27 |
| 270 | " 7 | " | " | 302·45 |
| 271 | " 9 | " | " | 300·28 |
| 272 | " 9 | " | " | 316·15 |
| 265 | máj. 30 | 0·15 m_m platina | 7614 | 205·18 |
| 266 | " 31 | " | " | 212·48 |
| 267 | " 31 | " | " | 212·08 |
| 268 | " 31 | " | " | 204·83 |
| 269 | jun. 2 | " | 3857·4 | 872·93 |
| 270 | " 2 | " | " | 876·93 |
| 271 | " 2 | " | " | 858·25 |
| 272 | " 2 | " | " | 834·99 |
| 273 | márc. 19 | 0·3 m_m platina | 7699 | 375·30 |
| 274 | " 19 | " | " | 340·05 |
| 275 | " 19 | " | " | 357·46 |
| 276 | " 19 | " | " | 406·55 |
| 277 | " 15 | 0·3 m_m aczél | " | 273·80 |
| 278 | " 15 | " | " | 273·40 |
| 279 | " 15 | " | " | 294·55 |
| 280 | " 15 | " | " | 291·08 |
| 281 | " 14 | " | 4321 | 527·01 |

lengő gömbhéj.

| Ω sec. | T sec. | θ víz | θ levegő | $\eta \cdot 10^2$ | $\eta_{18^\circ} \cdot 10^2$ |
|---------------|----------|--------------|-----------------|-------------------|------------------------------|
| 4114.75 | 149.190 | 16.85° | 18.00° | 1.0694 | 1.0389 |
| 4129.75 | " | 17.27° | 19.00° | 1.0507 | 1.0317 |
| 2248.06 | " | 17.20° | 18.30° | 1.0478 | 1.0268 |
| 2292.00 | " | 16.68° | 18.00° | 1.0443 | 1.0090 |
| 2186.0 | " | 16.56° | 17.85° | 1.0780 | 1.0390 |
| 2305.3 | " | 16.83° | 17.82° | 1.0603 | 1.0300 |
| 647.12 | 56.877 | 21.35° | 22.00° | 0.9720 | 1.0555 |
| 635.20 | " | 21.29° | 22.10° | 0.9941 | 1.0761 |
| 664.80 | " | 19.80° | 21.34° | 1.0330 | 1.0796 |
| 626.20 | " | 19.82° | 21.50° | 1.0245 | 1.0711 |
| 123.827 | 20.3566 | 18.49° | 19.40° | 1.0707 | 1.0842 |
| 121.100 | " | 17.84° | 18.36° | 1.0844 | 1.0804 |
| 121.137 | " | 17.87° | 18.40° | 1.0827 | 1.0797 |
| 126.175 | " | 17.92° | 18.52° | 1.0892 | 1.0872 |
| 21.994 | " | 18.59° | 19.50° | 1.597 | — |
| 21.800 | " | 18.60° | 19.50° | 1.590 | — |
| 22.398 | " | 18.63° | 19.60° | 1.599 | — |
| 22.733 | " | 18.71° | 19.77° | 1.579 | — |
| 9.526 | 5.2670 | 17.15° | 19.35° | 2.225 | — |
| 10.050 | " | 17.58° | 18.20° | 2.127 | — |
| 9.782 | " | 17.58° | 18.22° | 2.177 | — |
| 9.024 | " | 17.58° | 18.25° | 2.284 | — |
| 5.4744 | 3.1076 | 17.02° | 21.17° | 2.675 | — |
| 5.5056 | " | 17.12° | 21.11° | 2.692 | — |
| 5.2020 | " | 17.23° | 21.02° | 2.740 | — |
| 5.2550 | " | 17.29° | 21.00° | 2.735 | — |
| 2.2294 | " | 16.91° | 20.10° | 3.743 | — |

XII. táblázat. Folytatás. Kisebbik

| A kísérlet sor-száma | A kísérlet kelte | A drót minősége és átmérője | A [fél skálárészekben] | n |
|----------------------|------------------|-----------------------------|------------------------|--------|
| 282 | 1913 márc. 14 | 0·3 m_{mm} aczél | 4321 | 517·19 |
| 283 | „ 14 | „ | „ | 521·62 |
| 284 | „ 15 | „ | „ | 534·62 |
| 285 | febr. 25 | „ | 4319 | 1114·3 |
| 286 | „ 25 | „ | „ | 1119·5 |
| 287 | „ 25 | „ | „ | 1104·8 |
| 288 | márc. 14 | „ | 4321 | 1077·1 |
| 289 | febr. 13 | 0·5 m_{mm} aczél | 4329 | 301·45 |
| 290 | „ 13 | „ | „ | 329·77 |
| 291 | „ 13 | „ | „ | 330·11 |
| 292 | „ 13 | „ | „ | 326·50 |
| 293 | „ 12 | „ | „ | 544·2 |
| 294 | „ 12 | „ | „ | 498·8 |
| 295 | „ 12 | „ | „ | 559·5 |
| 296 | „ 12 | „ | „ | 517·0 |
| 297 | „ 12 | „ | „ | 770·2 |
| 298 | „ 12 | „ | „ | 759·5 |
| 299 | „ 12 | „ | „ | 809·2 |
| 300 | „ 12 | „ | „ | 723·8 |
| 301 | „ 17 | 0·7 m_{mm} aczél | „ | 868·61 |

engő gömbhéj.

| Ω sec. | T sec. | θ víz | θ levegő | $\bar{\eta}_0 \cdot 10^2$ | $\bar{\eta}_{180} \cdot 10^2$ |
|---------------|----------|--------------|-----------------|---------------------------|-------------------------------|
| 2·2740 | 3·1076 | 16·98° | 20·10° | 3·747 | — |
| 2·2600 | « | 17·09° | 20·10° | 3·756 | — |
| 2·3770 | « | 16·26° | 19·37° | 4·049 | — |
| 1·3589 | « | 15·07° | 16·20° | 4·827 | — |
| 1·3201 | « | 15·08° | 16·05° | 4·711 | — |
| 1·3446 | « | 15·09° | 15·90° | 4·736 | — |
| 1·3401 | « | 16·83° | 20·05° | 4·599 | — |
| 0·7292 | 2·5376 | 17·00° | 20·55° | 5·915 | — |
| 0·6856 | « | 17·11° | 20·67° | 6·083 | — |
| 0·6869 | « | 17·28° | 20·85° | 6·102 | — |
| 0·6914 | « | 17·40° | 21·00° | 6·074 | — |
| 0·4860 | « | 16·88° | 19·25° | 7·116 | — |
| 0·5150 | « | 16·99° | 19·25° | 6·911 | — |
| 0·4745 | « | 17·06° | 19·15° | 7·143 | — |
| 0·5040 | « | 17·13° | 19·12° | 7·011 | — |
| 0·3843 | « | 15·86° | 18·99° | 7·964 | — |
| 0·3839 | « | 16·70° | 19·05° | 7·846 | — |
| 0·3701 | « | 16·73° | 19·09° | 8·058 | — |
| 0·4000 | « | 16·76° | 19·09° | 7·790 | — |
| 0·2058 | 1·7832 | 14·61° | 18·20° | 9·741 | — |

A XI. táblázat a nagyobbik lengő gömbhéjjal végzett mérések eredményeit tünteti fel; a XII. táblázat a kisebbik lengő gömbhéjra vonatkozik. A táblázatok 8. oszlopában található a kísérletek anyagául használt víz θ hőmérséklete a kísérletek alatt. Ezt az 1. ábrán látható II. és III. számú $1/8^\circ$ -ra osztott hőmérőkön olvastuk le. θ víz = $\frac{\theta_{II} + \theta_{III}}{2}$. A 9. oszlopban van feljegyezve az eszközben lévő levegő θ hőmérséklete, melyet az I. számú hőmérőn észleltünk.

A leglassúbb sebességű mérést a nagyobbik gömbbel körülbelül 9200 másodperces forgásidő mellett végeztük; a kisebbik gömbnél a legnagyobb forgásidő körülbelül 4100 sec. volt. Tekintve, hogy a kisebbik lengő gömbhéj alkalmazása mellett a külső és belső gömbök közti vígréteg körülbelül 3-szor akkora, mint a nagyobbik lengő gömbhéj esetében, a leglassúbb forgások sugármenti sebességi gradiense a kisebb belső gömb alkalmazása mellett már 4100 másodperces forgásidővel is kisebb, mint a nagyobbik gömbbel észlelt 9200 másodperces forgás sebességi gradiense. A leggyorsabb mozgások forgási ideje körülbelül 0.17 sec. volt. Ennél gyorsabb forgások létrehozása az eszköz eddigi összeállításában nem volt lehetséges. Ily nagy forgássebességeknél ugyanis még a seréttel telt gömbök tehetetlensége is kicsinynek bizonyul; a lengő gömbök erős nutatiós mozgásba jönnek és a külső, forgó gömbhöz ütődnek. Általában mindig négy mérést végeztünk körülbelül egyforma nagy forgássebesség mellett.

A lassú forgások esetében [mikor a hydrodynamika alap-egyenleteiben az $u \frac{\partial u}{\partial x}$ és hasonló szerkezetű tagok elhagyhatók] a lengő gömbhéjra gyakorolt forgató nyomaték még egyszerűen arányos η -val és η nem függ Ω -tól. Ily lassú forgásoknál $\bar{\eta} = \eta$, vagyis az (1) képlet magát η -t szolgáltatja. η -nak Ω -tól való függetlensége kritériumot nyújt arra nézve, hogy mely forgások tekinthetők még elég lassúnak; nyilvánvalóan azok, a melyeknél az (1) képletből számított η értékek a forgássebesség növekedésével észrevehető növekedést nem mutatnak. Ezeknek a leglassúbb forgásokra vonatkozó méréseknek egy és ugyanazon hőmérsékletre,

18°C-ra korrigált eredményei szolgáltatják η -nak azt az értékét, amely további számításainkban alapul szolgál.

A hőmérsékleti redukeziót a v. HELMHOLTZ-féle ¹

$$\eta = \frac{0.0178}{1 + 0.0337 \theta + 0.000221 \theta^2} \quad (6)$$

képlettel végeztük úgy, hogy az észlelt η_θ értékhez hozzáadtuk a képletből számított $\eta_{18^\circ} - \eta_\theta$ különbséget.

Az így módon redukált értékek a táblázatok 11. oszlopában találhatók. Mindkét táblázatban a legnagyobb forgásidőnek megfelelő η -értékek összefoglaló jellel vannak jelezve. Ezek az η -értékek közel állandók, a sebesség növekedésével észrevehető növekedést nem mutatnak. Ezeknek tehát középértékét véve, méréseink alapján η -nak legvalóbbszínű értéke

$$\eta_{18^\circ} = 1.0562 \cdot 10^{-2}.$$

Látható tehát, hogy az általunk talált η érték nagyon jó megegyezésben van mások észleléseivel, mint azt az alábbi kimutatás ² tanúsítja.

| Megfigyelő | Módszer | A víz belső surlódási együtthatója 17.5°C-nál |
|--------------------------------|-----------------------------------|---|
| <i>Poiseuille</i> 1846. | Kapilláris csőből való kifolyatás | 0.01076 |
| <i>Sprung</i> 1876. | " | 0.01065 |
| <i>Slotte</i> 1883. | " | 0.01075 |
| <i>Thorpe és Rodger</i> 1894. | " | 0.01067 |
| <i>König W.</i> 1887. | Tömör golyó lengetése | 0.01099 |
| <i>Mützel K.</i> 1891. | Üres henger lengetése | 0.01082 |
| <i>Ladenburg R.</i> 1908. | Üres gömb lengetése | 0.01065 |
| <i>Zemplén és Pogány</i> 1914. | Eltérítési módszer | 0.01069 |

Az $\bar{\eta}$ értékek, melyek a XI. és XII. táblázat 10. oszlopában láthatók, természetesen nem szolgálhatnak alapul az egyes mérések közötti százalékos eltérések megítélésében, mert $\bar{\eta}$ úgy a hőmérséklettel, mint Ω -val tetemesen változik, egy-egy négy

¹ LAMB: Lehrbuch der Hydrodynamik. 663. l. 1907.

² R. LADENBURG; Annalen der Physik. 4 Folge. 27. 182. l. 1908.

mérésből álló csoporton belül pedig a víz hőmérséklete is ingadozott, valamint a motorral is lehetetlen volt tökéletesen egyenletes sebességű forgásokat előállítani.

16. §. A kísérletek eredményeinek az elmélettel való egybevetése.

Igen lassú, úgynevezett végtelen kicsiny sebességek esetén a forgató nyomaték, melyet a két koncentrikus gömb közötti folyadék a külső gömb egyenletes forgása alkalmával a belső gömbre gyakorol, arányos magával η -val, a belső surlódás együtthatójával. Véges sebességek esetén ez megszűnik és a forgató nyomaték $\bar{\eta}$ -val, a látszólagos surlódási együtthatóval lesz arányos, mely $\bar{\eta}$ függvénye Ω -nak. ZEMPLÉN egy megelőző dolgozatában¹ bizonyos feltételek mellett, melyeket az általunk vizsgált mozgások kielégítenek, meghatározta ennek a függvénynek szerkezetét. E szerint

$$\bar{\eta} = \eta \left(1 + B_2 \frac{\rho^2}{\eta^2 \Omega^2} + B_4 \frac{\rho^4}{\eta^4 \Omega^4} + \dots \right), \quad (7)$$

ahol ρ az illető gáz vagy folyadék sűrűsége, η a belső surlódási együttható, Ω a külső gömb egy körülfordulásának az ideje, a $B_2, B_4, \dots, B_{2k} \dots$ állandók pedig függetlenek a használt gáz vagy cseppfolyós test anyagi minőségétől és állapotától és csak az eszköz méreteitől függenek. Nagyon lassú mozgások esetében, vagyis ha $\Omega = \infty$, $\bar{\eta} = \eta$.

Ha η -val a (7) egyenlőség mindkét oldalán osztunk és

$$\frac{\rho}{\eta \Omega} = x$$

írunk, akkor lesz

$$\frac{\bar{\eta}}{\eta} = 1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + \dots = H(x). \quad (8)$$

Az elméletből tehát az következik, hogy x -nek (8) alatti függvénye az általunk használt eszközre nézve jellemző, még

¹ Math. Term. Ért. 29. kötet 703. lap, (35) képlet, amelyben azonban az alábbi $B_2, B_4 \dots$ együtthatók $C_3, C_5 \dots$ -vel vannak jelezve.

pedig addig a sebességi határig, a meddig a hydrodynamika alapegyenletei érvényesek. Ezen a határon túl a B_{2k} állandók általában nem lesznek már függetlenek a használt gáz vagy cseppfolyós test anyagi minőségétől, vagyis x -nek ugyanazon értéke mellett két különböző gázzal vagy folyadékkal határozva meg az $\frac{\bar{\eta}}{\eta}$ - viszonyt, más és más értéket fogunk kapni.

Vizsgálataink czélja volt ezeket az elméleti következtetéseket kísérletileg igazolni, elsősorban tehát azt, hogy különböző anyagokon meghatározva $\frac{\bar{\eta}}{\eta}$ -t mint x függvényét, egy és ugyanazt az $H(x)$ függvényt kapjuk. ZEMPLÉN levegővel és széndioxyddal végzett méréseivel az $H(x)$ függvény egy darabját a nagyobbik belső gömb esetében meghatározta, még pedig úgy, hogy a B_2 , B_4 , B_6 együtthatókat a legkisebb négyzetek módszerével határozta meg; ennél a számításnál azonban $\bar{\eta}$ -nak hőmérsékleti redukciója okozott nehézséget, mert a míg a B_2 , B_4 , B_6 nem voltak ismeretesek, addig az $\bar{\eta}$ -kat nem lehetett közös hőmérsékletre redukálni, viszont a redukció nélkül a B -k pontos számértékei nem voltak meghatározhatók. ZEMPLÉN e miatt kénytelen volt elég fáradságos, fokozatosan közelítő eljáráshoz folyamodni.¹ Minthogy a víz belső surlódási együtthatója a hőmérséklettel igen rohamosan változik, ez az eljárás viznél alig vezetett volna eredményre.

Jelen dolgozatunkban úgy a régi ZEMPLÉN-féle, valamint az újabb méréseinket sokkal egyszerűbb és áttekinthetőbb eljárással dolgoztuk fel, még pedig úgy kezelve az egyazon anyagon különböző hőfok mellett végzett méréseket, mintha különféle anyagokra vonatkoznának; hiszen a H csakis $x = \rho : \eta Q$ függvénye, tehát — hacsak ρ és η ugyanarra a hőfokra vonatkozik — az így nyert $H(x)$ -nek függetlennek kell lenni a folyadék anyagától és hőfokától, hőmérsékleti redukcióra tehát egyáltalában nincs szükség. Bármilyen folyadékkal, bármilyen hőfokon megállapított $H(x)$ értékeknek tehát egy és ugyanazon görbe mentén kell feküdniök, a mit legjobban grafikus úton lehet ellenőrizni.

¹ ZEMPLÉN Győző: Math. és Természettud. Értesítő 29. kötete 706. és következő lapjai. 1911.

Az egymáshoz tartozó x és $\frac{\bar{\eta}}{\eta}$ értékek a XIII. táblázatban vannak összeállítva.

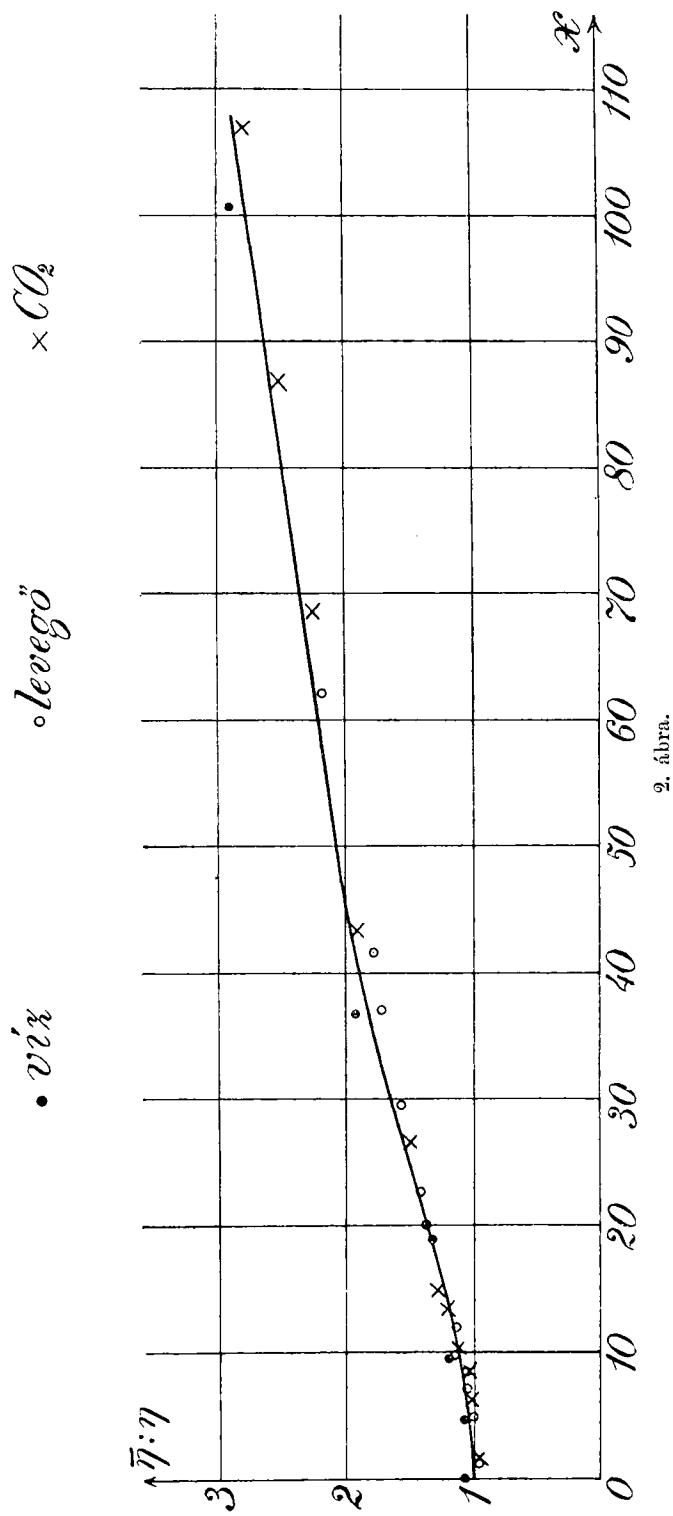
XIII. táblázat.

| Levegő | | CO_2 | | Víz | | | |
|--------|---------------------------|--------|---------------------------|-------|---------------------------|----------|---------------|
| x | $\frac{\eta}{\bar{\eta}}$ | x | $\frac{\eta}{\bar{\eta}}$ | x | $\frac{\eta}{\bar{\eta}}$ | θ | Ω sec. |
| 1·2 | 0·98 | 1·8 | 0·96 | 0·17 | 1·08 | — | — |
| 5·0 | 1·03 | 6·3 | 1·01 | 4·73 | 1·08 | — | — |
| 7·1 | 1·06 | 8·5 | 1·04 | 9·8 | 1·19 | 18·76° | 20·383 |
| 8·3 | 1·07 | 10·2 | 1·12 | 18·9 | 1·32 | 18·79° | 9·814 |
| 9·7 | 1·16 | 13·3 | 1·21 | 36·80 | 1·92 | 18·54° | 5·065 |
| 11·9 | 1·13 | 14·9 | 1·28 | 100·9 | 2·88 | 19·69° | 0·9779 |
| 20·0 | 1·37 | 26·7 | 1·50 | 172·9 | 3·59 | 19·87° | 0·5736 |
| 22·7 | 1·41 | 43·3 | 1·90 | 251·7 | 4·35 | 18·00° | 0·3762 |
| 29·5 | 1·57 | 68·5 | 2·24 | 332·5 | 5·00 | 17·97° | 0·2848 |
| 37·0 | 1·71 | 86·9 | 2·50 | 545·5 | 6·60 | 18·7° | 0·1766 |
| 41·6 | 1·78 | 197·0 | 2·78 | — | — | — | — |
| 62·2 | 2·17 | — | — | — | — | — | — |

Az első két oszlopban vannak a levegőre, a harmadik és negyedik oszlopban a CO_2 -re vonatkozó értékek, melyeket ZEMPLÉN régebbi méréseiből számítottunk, az ötödik és hatodik oszlopban pedig a jelen méréseinkkel vízen meghatározott értékek.

A XIII. táblázatban természetesen csak azok a mérések vannak felvéve, melyeknél Ω már oly kicsiny volt, hogy η , illetve $\bar{\eta}$ a forgássebesség növekedésével már észrevehető növekedést mutatott. Minden egyes x és $\frac{\bar{\eta}}{\eta}$ négy mérésből a következő módon adódó középérték. Legelőször kiszámítottuk a négy különböző mérésnél leolvasott vízhőmérsékletek közepét, θ -t, mely a XIII. táblázat 7. oszlopában található, és a forgássebességek középértékét, Ω át, mely a 8 oszlopban van. Azután az általunk meghatározott $\eta_{18^\circ} = 1\cdot0562\cdot10^{-2}$ értékét a HELMHOLTZ-féle (6) képlettel redukáltuk η_θ -ra. Akkor

$$\frac{\rho}{\eta_\theta \Omega} = x,$$

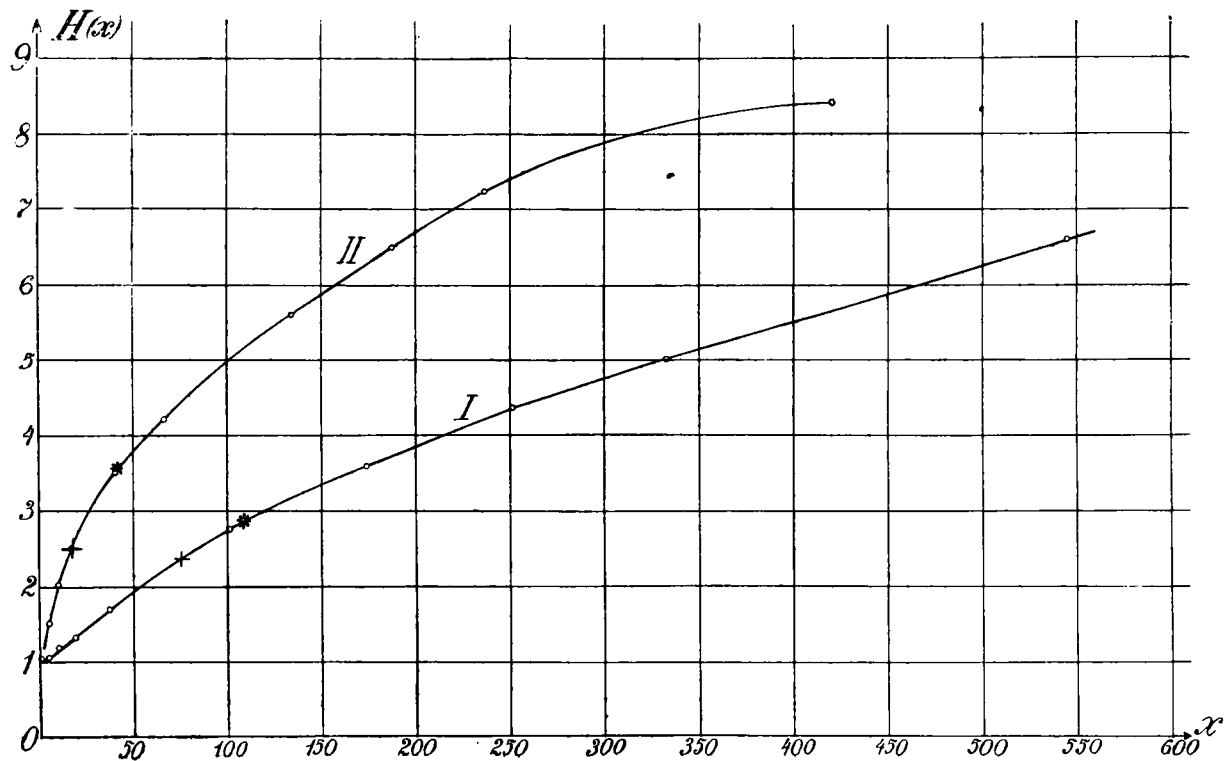


míg $\bar{\eta}_0$, a négy mérésből származó $\bar{\eta}$ -k középértéke, elosztva η_0 -val, szolgáltatja $\frac{\bar{\eta}}{\eta}$ -t. Ezeknél a számításoknál a víz sűrűségét 1-nek vettük.

A XIII. táblázatot a második ábra illusztrálja. A kihúzott görbe ábrázolja az $H(x)$ függvényt. A különböző módon jelölt pontok jelentése az ábrán fel van tüntetve. A görbe az $x=0$ -tól $x=100$ -ig terjedő intervallumra vonatkozik; a levegőre és széndioxydra vonatkozó mérések ugyanis csak erre a közre terjeszkednek ki. Láthatjuk, hogy az elméleti következtetést a kísérletek teljesen igazolták, a mennyiben úgy a levegő és CO_2 , valamint a víz pontjai is kitűnően illeszkednek a görbéhez. A B_{2k} állandók tehát valóban függetlenek a használt gáz vagy folyadék anyagi minőségétől legalább is addig a sebességi határig, illetve x amaz értékéig, a meddig a 2. ábra terjed. A legnagyobb relatív eltérés az észlelt pontok és a közjük grafikusan interpolált görbe között éppen a legkisebb sebességeknél mutatkozik, a hol gázaknál még kiderítetlen okból $H(x)$ -nek minimuma van; az eltérés itt 8%; nagyobb sebeség mellett azonban a relatív eltérések mindinkább csökkennek és 4—5%-nál seholsem nagyobbak.

A mint a XIII. táblázaton is látható, egészen $x=545.5$ értékéig lehetett az $H(x)$ függvényt a vizen végzett mérésekkel meghatározni. A görbét egész terjedelmében a 3. ábra mutatja.

A kisebbik gömbre vonatkozólag ugyancsak meghatároztuk $\frac{\bar{\eta}}{\eta}$ -nak x -től való függését. Ennél a gömbnél sajnos, más mint vízre vonatkozó mérés nem állott még rendelkezésünkre. A XIV. táblázat, illetve a harmadik ábra mutatja be $\frac{\bar{\eta}}{\eta}$ -t mint x függvényét a kisebbik gömb esetében.



3. ábra.

XIV. táblázat.

| x | η η | Ω sec | θ |
|------|------------------|--------------|----------|
| 4.3 | 1.53 | 22.231 | 18.63° |
| 9.7 | 2.06 | 9.595 | 17.47° |
| 17.3 | 2.51 | 5.3592 | 17.16° |
| 40.1 | 3.52 | 2.2851 | 16.81° |
| 66.2 | 4.20 | 1.3409 | 15.52° |
| 123 | 5.61 | 0.6983 | 17.20° |
| 187 | 6.50 | 0.4948 | 17.01° |
| 237 | 7.24 | 0.3845 | 16.51° |
| 421 | 8.43 | 0.2058 | 14.61° |

A 3. ábrán a vízre vonatkozó összes eredményeket a 2. ábrától eltérő léptékben tüntettük elő. Az I. görbe a nagyobbik, a II. pedig a kisebbik gömbre vonatkozó $H(x)$ függvényt ábrázolja. E görbék két körülményről tanuskodnak:

1. Feltűnik, hogy a kisebbik gömb esetében az $H(x)$ függvény x minden értékénél nagyobb, mint a nagyobbik gömb esetében, a mi jó megegyezésben van a hydrodynamikai megfontolások eredményeivel. Az $H(x)$ ugyanis tulajdonképpen mértéke annak, mennyire tér el a mozgásállapot attól a mozgástól, a melynél a szögsebesség koncentrikus gömbfelületeken állandó. Ehhez a rétegzett mozgáshoz ugyanis, mely kis sebességek esetében valóban bekövetkezik, a sebesség növekedésével újabb circulations áramlások járulnak,¹ melyek a belső surlódás forgató nyomatékának rohamosabb növekedésére vezetnek. Ezek a circulations áramlások annál könnyebben kifejlődhetnek, minél vastagabb a folyadék réteg, mert hiszen a szilárd falak közelében a szögsebesség koncentrikus gömbökön állandó. Érthető ezek alapján, hogy a kisebbik gömbnél a circulations áramlások erősebbek lévén, $H(x)$ is nagyobb lesz.

A belső surlódás forgató nyomatéka a nagyobbik gömbön mindazonáltal mindig nagyobb volt, mint a kisebbik gömbön: igen lassú mozgásoknál ugyanis a nagy és kis gömbre vonatkozó forgató nyomatékok a külső gömb egyenlő forgássebessége mellett úgy viszonylanak egymáshoz, mint 459:126, a $H(x)$ a

¹ L. ZEMPLÉN: ez Ért. 29. k. 699., 700. l. 1911.

kis gömb esetében azonban az észlelt esetek egyikében sem volt kétszer akkora sem, mint a nagy gömbnél, végeredményben tehát a nagyobb gömbön lesz nagyobb a surlódás nyomatóka.

2. Sem az I., sem a II. görbe seholsem mutat ugrásszerű változást, sem típusának megváltozását, látszik tehát, hogy a folyadékmozgás törvényszerűsége változatlan maradt; új mozgási állapot, *turbulentia* e szerint nem következett be.

Vessük össze ezt az eredményünket, úgy a mint ZEMPLÉN előző dolgozatában tette, a REYNOLDS-féle szabálylyal, mely szerint körkeresztmetszetű csövekben, ha az áramlás átlagos sebessége U , a cső sugara a , akkor a *turbulentia* bekövetkezik, mihelyt

$$\frac{U\rho a}{\eta} > 1000. \quad (9)$$

A (9) képletből számított U az úgynevezett kritikus sebesség.

A mi esetünkben a lineáris sebesség a külső gömbön

$$U_R = R \cdot \frac{2\pi}{Q} = R\psi,$$

a belső gömbön zérus; az egész keresztmetszeten a középsebesség lassú sebességek esetén egyszerűen kiszámítható. Az eredmény:

$$U = \bar{r}\psi = \frac{\int_{r_2}^R r\psi \cdot 4\pi r^2 dr}{\frac{4\pi}{3} (R^3 - r_2^3)}; \quad (10)$$

ha ψ értékét ZEMPLÉN első közleményének 86. lapjáról ((5) képlet) behelyettesítjük, azt kapjuk, hogy:

$$U = \frac{3R^2}{4(R^3 - r_2^3)^2} \cdot R\psi \cdot (R^4 - 4Rr_2^3 + 3r_2^4), \quad (11)$$

vagyis

$$\frac{U}{R\psi} = \frac{3R^2(R^4 - 4Rr_2^3 + 3r_2^4)}{4(R^3 - r_2^3)^2}. \quad (12)$$

A kisebbik gömb esetében tehát az átlagos sebesség 0.58-szorosa, a nagyobbiknál 0.52-szerese a maximális sebességnek. Minden esetben azt mondhatjuk, hogy az átlagos lineáris sebesség — lassú mozgásnál — nagyobb, mint a maximális lineáris sebes-

ségnek a fele; a gyorsabb mozgásoknál (l. ZEMPLÉN második közleményének 700. lapját) a sebességi gradiens a belső gömb közelében növekszik, tehát az átlagos sebesség aránylag nagyobb lesz. Az

$$U > \frac{1}{2} \cdot R\psi \quad (13)$$

egyenlőtlenség e szerint mindig ki lesz elégítve.

A (9) alatti követelés tehát minden esetre ki lesz elégítve, ha csak

$$R\psi \cdot \frac{\rho a}{\eta} > 2000. \quad (13)$$

A mi esetünkben a cső a sugarának szerepét a folyadék-réteg vastagsága $R - r_2$ veszi át, minthogy a maximalis sebesség az általunk vizsgált mozgásnál a külső gömbfelületen lép fel, a csőben ellenben a cső tengelye mentén. A REYNOLDS-féle kritegium e szerint, mivel

$$\psi = \frac{2\pi}{Q} \quad \text{és így} \quad x = \frac{\rho\psi}{2\pi\eta} \\ R(R - r_2)x > 320. \quad (14)$$

A kisebbik gömbnél tehát — e megfontolások alapján — turbulentiának kellene beállani, mihelyt

$$x > 41, \quad (15)$$

a nagyobbik gömbnél pedig akkor, ha

$$x > 108. \quad (16)$$

A 3. ábrán csillaggal jelöltük meg az I. és a II. görbéknek azokat a pontjait, a melyekben a (15) és (16) képletek szerint a turbulentiának mutatkoznia kellene; a görbék ellenben e pontokon semmiféle oly rendellenességet nem mutatnak, a melyből a mozgásállapotnak megváltozására lehetne következtetni. Turbulentia tehát sem ennél a sebességnél, sem pedig az eddig észlelt nagyobb sebességeknél nem áll be.

Az előbbieknél még sokkal alacsonyabb határokat kapunk a turbulentiára, ha — úgy amint ZEMPLÉN tette ¹ — a mi kísér-

¹ Ann. d. Phys. (4), 38, 123. l. (1912).

leteinkben és a csövekben beálló *maximalis sebességi gradienseket* hasonlítjuk össze.

A REYNOLDS-féle kritérium arra az átlagos sebességi gradiensre, a melynél a turbulentiának be kellene következni, a következő képletet szolgáltatja:

$$\frac{U}{a} > \frac{1000\eta}{a^2\rho}. \quad (17)$$

A cső falánál fellépő maximalis sebességi gradiens pedig háromszor akkora, mint az átlagos gradiens,¹ tehát:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a} > \frac{3000\eta}{a^2\rho}. \quad (18)$$

A gömbhéjak által határolt folyadéktér esetében mutatkozó gradienst a következő módon számítjuk ki: előbb meghatározzuk a sebességi gradienst igen lassú mozgások esetére; az eredmény:²

$$\left(\frac{d(r\psi)}{dr}\right)_{r=r_2} = \frac{6\pi R^3}{(R^3 - r_2^3)\Omega}. \quad (19)$$

A nagyobbik gömbnél e szerint a max. sebességi gradiens

$$\gamma_0 = \frac{70}{\Omega}, \quad (20)$$

a kisebbiknél pedig:

$$\gamma'_0 = \frac{32}{\Omega}. \quad (21)$$

A belső surlódás forgató nyomatéka azonban arányos lévén a belső gömbfelületen beálló sebességi gradienssel, ez utóbbira abból a változásból következtethetünk, a melyet a forgató nyomaték nagyobb sebességeknél szenved; a valóságos gradienseket tehát γ_0 -nak $H(x)$ -szel való szorzása által kapjuk.

Összevetve ezeket az eredményeket a (18) képlettel, azt kapjuk, hogy a turbulencia kritériuma:

$$H(x) \cdot \gamma_0 > \frac{3000\eta}{a^2\rho}.$$

¹ LAMB. Lehrbuch der Hydrodynamik, 672. l. (3) képlet, 1907.

² ZEMPLÉN Gy.: idézett második közlemény, 715. l. (50) formula.

A nagyobbik gömbnél tehát :

$$70. H(x) \cdot \frac{\rho\eta}{Q} > 12000,$$

azaz :

$$x H(x) > 172, \quad (22)$$

a kisebbiknél :

$$x H(x) > 47. \quad (23)$$

A 2. és 3. ábra megtekintése meggyőz róla, hogy a levegővel legnagyobb sebesség mellett végzett mérésnél ($x = 65$, $H(x) = 2.2$) a (22) határt még nem értük el, a széndioxydra vonatkozó adat azonban ($x = 101$, $H(x) = 2.9$) a kritikus gradiensen már messze túl van. De még tetemesebben fölülműlják a (22) és (23) képletek által megszabott határokat a vízzel végzett mérések mindkét gömb esetében. Azokat a pontokat, a melyekben a második számításmód szerint a turbulentiának kezdődnie kellene, a 3. ábrán + jellel tüntettük elő.

Látható mindezekből, hogy bármiképpen próbáljuk a REYNOLDS-féle kriteriumot a gömbök határolta folyadék mozgására átvinni, a kriterium követelte sebesség mellett még nem áll be a turbulencia, sőt a mozgásállapotot sokkal nagyobb sebességek alkalmazása mellett sem sikerült eddig megvalósítani.

E tapasztalatok megerősítik ZEMPLÉN-nek második közleményében kifejezésre juttatott azt a sejtését, hogy a csövekben észlelt turbulencia a csövek két vége zavaró hatásának tulajdonítandó, a hol azonban ily zavart okozó határfelületek nincsenek, ott a mozgás sokkal nagyobb sebességekig rendezett állapotban marad.

3. A RAYLEIGH-LAMB-féle ellenvetés. ZEMPLÉN második közleményében ¹ azt találta, hogy a lassú mozgások esetére érvényes képlet mintegy 50–100-szor akkora sebességekig szolgáltat használható eredményeket, mint a mekkorákat Lord RAYLEIGH és LAMB elméleti meggondolások alapján megengedhetőnek talált. Kérdés már most, mit olvashatunk ki vízzel végzett méréseink-

¹ I. h. 662. l., 687. l. és köv.

ből az angol tudósok kriteriumára vonatkozólag; szerintük a lassú mozgásokra számított képlet csak akkor érvényes, ha

$$\frac{\Psi r_2^3 \rho}{\eta} < 1, \quad \Psi < \frac{\eta}{\rho r_2^2}. \quad (24)$$

Minthogy víznél $\frac{\eta}{\rho} = 0.0106$, a RAYLEIGH-LAMB-féle kriterium a kisebbik gömbnél:

$$Q > 10000, \quad (25)$$

a nagyobbik gömbnél ellenben

$$Q > 14000. \quad (26)$$

E szerint kísérleteinkben még el sem értük a sebességnek azt az alsó határát, a melynél az angol tudósok szerint a lassú mozgások esetére levezetett képlet érvényessége kezdődik. Mind a mellett a XI. táblázat adatai azt mutatják, hogy $\bar{\eta}$ állandó marad $Q=9300$ -tól kb. $Q=3460$ -ig a nagyobbik gömbnél, a kisebbiknél pedig 4000-től 2000-ig. Víz esetében tehát az $\bar{\eta}$ növekedése mindenesetre előbb kezdődik, mint levegő és széndioxydnál, még akkor is, ha az $x = \rho : \eta Q$ változót vesszük tekintetbe.

Levegőnél ugyanis az $\bar{\eta}$ határozottan növekedni kezd, a mikor $Q < 20$, tehát mivel $\rho : \eta$ körülbelül = 6

$$x > 0.3. \quad (27)$$

Széndioxydnál, mikor $Q < 2.8$ azaz minthogy $\rho : \eta = 12$

$$x > 4.3. \quad (28)$$

Víznél a növekedés a nagyobbik gömbnél már $Q=3400$ -nál kezdődik, tehát ($\rho : \eta = 94$)

$$x > 0.03, \quad (29)$$

a kisebbiknél pedig $Q=2000$ -nél, tehát mikor

$$x > 0.05. \quad (30)$$

A Lord-RAYLEIGH-LAMB-féle kriterium pedig x -ben kifejezve

$$x > \frac{1}{2\pi\eta_2^2}, \quad (31)$$

a nagy gömbnél tehát:

$$x > 0.006, \quad (32)$$

a kisebbnél pedig:

$$x > 0.009. \quad (33)$$

Ezek az adatok mutatják, hogy az angol tudósok becslése csak levegő és széndioxyd esetében esik túlságosan messze a valóságtól, viz esetében azonban az általuk jelzettnél már ötszörösen nagyobb sebesség mellett megkezdődik η növekedése.

Azonkívül mindezekből azt is láthatjuk, hogy kicsiny sebességek mellett az $H(x)$ függvény szerkezetében a különféle anyagok közt mégis mutatkoznak különbségek, melyek azonban annyira a kísérleti hibák nagyságrendjébe esnek, hogy további következtetéseket belőlük nem vonhatunk.

16. §. A víz csuszamlása vörösrézén.

Összes megelőző tárgyalásaink azon a föltevésen alapszanak, hogy a folyadék és a vele érintkező szilárd test az érintkezés helyén közös sebességgel bír, hogy tehát *csuszamlás nincs*. E föltevésnek jogosultságát részben már az az eredmény is igazolja, hogy levegő, széndioxyd és víz esetében az H függvény, $\left(\frac{\eta}{\eta}\right)$ kizárólag az $x = \frac{\rho}{\eta\Omega}$ függvénye; ha a folyadékok és a szilárd testek határfelszínén csuszamlás mutatkoznék, akkor az H függvény minden esetre a csuszamlás mértékét megszabó számértéktől, a *csuszamlási együtthatótól* is függene, nem lehetne tehát a megfigyelt folyadékok természetétől független.

Mindamellett kíváncsiak vagyunk közvetlen kísérletekkel megvizsgálni, *mekkora* a csuszamlás a folyadékok és szilárd testek határfelületén, mert hiszen nem lehetetlen, hogy H értékeinek csekély eltérései a különböző folyadékoknál épen az elhanyagolt csuszamlási együtthatónak tudandók be.

Hasonló kísérleti vizsgálatokat már sokan végeztek; gázakról még KUNDT és WARBURG¹ kísérletei óta tudjuk, hogy a csuszamlási együttható közönséges nyomásnál a kísérleti hibák ha-

¹ KUNDT és WARBURG: Poggendorff-Annalen 155. 337, 525 l. (1875.)

tárain belül fekszik, a nyomás csökkenésével azonban növekedni kezd és csekély nyomásnál már jól mérhető értékeket vesz. Gázakon legújabbán TIMIRIAZEFF¹ végzett igen kimerítő vizsgálatokat, *elérítési módszerrel* (hengerekkel) igazolva és kiterjesztve KUNDT és WARBURG eredményeit.

Cseppfolyós testeknél azonban a csuszamlás kérdése nincsen annyira tisztázva, ámbár minden jel arra vall, hogy közönséges nyomás mellett a cseppfolyós testek csuszamlása is elhanyagolható.

HELMHOLTZ és PIOTROWSKI, kik a cseppfolyós testek csuszamlását először vizsgálták meg,² észrevehető csuszamlásra következtettek és azóta a kutatók egész sora foglalkozott e kérdéssel; közös eredményük, hogy a λ csuszamlási együttható minden esetre kisebb, mint az, a melyet HELMHOLTZ és PIOTROWSKI talált (λ víz és arany határfelületén 0.235 cm), azonban az egyik szerző szerint van határozottan felismerhető — bár kicsiny — csuszamlás, a másik szerint nincs.

A cseppfolyós testek csuszamlásának részletes irodalmát megtaláljuk R. LADENBURG dolgozatában,³ ki az addigi vizsgálatok eredményeivel a kérdést ugyancsak nem tekinti véglegesen tisztázottnak, a miért is HELMHOLTZ és PIOTROWSKI kísérleteit megismétli, azaz a folyadékkal gömbhéjat tölt meg és felfüggesztván a gömböt vékony drótra, a gömb torsiolengéseinek csillapodását figyelte meg.

LADENBURG kísérleteit üveggömbökkel és vízzel végezte, melyek egyik esetben belül be voltak ezüstözve, a másik esetben nem, azután a számítást arra a föltevésre alapította, hogy csuszamlás *nincs*; összehasonlítva már most a két különféle gömbbel nyert eredményeket egyrészt egymással, másrészt a capillaris csövek és más lengési eljárások útján nyert megelőző eredmé-

¹ TIMIRIAZEFF: Ann. d. Phys. (4). 40. 971—991 l. 1913.

² HELMHOLTZ és PIOTROWSKI: Sitzungsber. der Wiener Akademie der Wissensch. II. Abtheilung, 50. 607 l. (1860). — HELMHOLTZ: Wissenschaftliche Abhandlungen 7. 172. l.

³ Ann. d. Phys. (4), 27, 157. l. (1908). — Az ott felsorolt vizsgálatokon kívül még megemlítendő E. R. DREW: Physical Review, 12, 184. l., (1901), ki hengerekkel végzett az eltérítő eljárással méréseket és víznél nem talált csuszamlást.

nyekkel, a tapasztalt megegyezésből arra következtet, hogy számításainak alapja, a *csuszamlás elhanyagolása* helyes. Kétségtelen, hogy az okoskodás nem feltétlenül meggyőző, bár minden esetre valószínűvé teszi LADENBURG fejtegetésének végeredményét.

LADENBURG azután figyelmeztet arra, hogy HELMHOLTZ és PIOTROWSKI számításai, melyekkel a csuszamlási együtthatót kiszámították, rendkívül érzékenyek a kísérleti adatoknak csekély változásaira. Ha pl. a lengő gömb tehetetlenségi nyomatékát 1%-kal kisebbnek vesszük annál az értéknél, melyet Piotrowski megad, már $\lambda = 0.235$ cm helyett $\lambda = 0.009$ cm-t kapunk eredményül, ámbar az 1%-nyi eltérés a tehetetlenségi nyomaték értékében PIOTROWSKI kísérleti hibáinak határán belül fekszik. Természetesen ez sem döntő bizonyíték a csuszamlás jelenléte ellen, mert viszont ha a gömb tehetetlenségi nyomatékát 1%-nál nagyobbak vennők, λ -ra bizonyára még 0.235-nél is nagyobb értéket kapnánk.

Ilyen körülmények között kíváncsnak látszott közvetlen kísérletekkel törekedni a csuszamlási együtthatónak meghatározására, még pedig lehetőleg kifogástalan módszerrel.

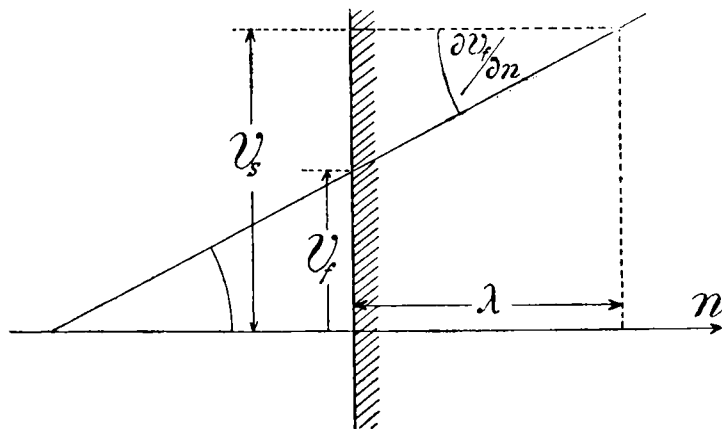
A csuszamlási együtthatónak definíciója a következő: A folyadék tangentialis sebessége, V_f a szilárd testtel érintkező határfelületen nem egyenlő a szilárd test tangentialis sebességével, V_s -sel, hanem a két sebesség között a következő kapcsolat van:

$$V_s - V_f = \lambda \frac{\partial V_f}{\partial n}, \quad (34)$$

a hol n a határfelületnek a szilárd test belseje felé mutató normálisa, λ pedig a *csuszamlási együttható*. A csuszamlási együttható fizikai jelentése a következő megfontolások alapján adódik: képzeljük, hogy a szilárd test nincs jelen, de azért a folyadékban a sebesség-eloszlás ugyanaz, mint ahogyha a szilárd test jelen volna, sőt a $\frac{\partial V_f}{\partial n}$ sebességi gradiens ott is folytatódik, a hol a valóságban a szilárd test foglal helyet. A 4. ábrán látható, hogy λ nem egyéb, mint a szilárd faltól számított az a távolság, a melyben a folyadék tangentialis sebessége egyenlő lenne a képzelt esetben a szilárd test tangentialis sebességével.

A (34) egyenletből és az imént adott definitióból egyaránt világos, hogy a λ dimenziója egyszerű hosszúság.

Ha már most a λ -t kísérlettel meg akarjuk határozni, a hydrodynamika alapegyenleteit azokkal a határfeltételekkel kell megoldanunk, a melyek a (9)-ből adódnak. Hangsúlyozzuk, hogy számításaink innen kezdve ismét csak oly lassú mozgásokra érvényesek, a melyeknél a sebességi összetevők másodfokú kifejezései elhagyhatók. Az általunk vizsgált folyadékmozgásnál



4. ábra.

(a belső gömbfelület nyugszik, a külső ψ állandó szögsebességgel forog) a folyadék szögsebessége ϕ a két gömb határolta gömbhéjban

$$\phi = \frac{A}{r^3} + B, \quad (35)$$

a hol A és B állandók a két határgömbfelületen kielégítendő határfeltételekből számítandók ki, melyek közvetlenül a (34)-ből a szögsebességekre nézve is felírhatók, mert tekintve, hogy λ általában kicsiny, a határfelület tekintetbe jövő környezetében $V_f = r_2 \phi$, ill. $V_f = R \phi$ írható. Tehát:

$$\phi_s - \phi_f = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n}. \quad (36)$$

A csuszamlás tekintetbevételéből a belső gömbön ez a feltétel, minthogy ott az n irány r irányával ellenkező és a szilárd test szögsebessége $= 0$,

$$0 = (\phi)_{r=r_2} = -\lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=r_2}; \quad (37)$$

a külső gömbön pedig, minthogy ott r és n iránya összeesik, a szilárd test szögsebessége pedig Ψ :

$$\Psi = (\phi)_{r=R} = +\lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=R}. \quad (38)$$

Vagy helyettesítve ϕ és $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ értékeit:

$$-\frac{A}{r^3} - B = \lambda \cdot \frac{3A}{r_2^4}, \quad (39)$$

$$\Psi - \frac{A}{R^3} - B = -\lambda \cdot \frac{3A}{R^4}. \quad (40)$$

E két egyenletből A és B kiszámítható:

$$A = \frac{\Psi}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3\lambda \left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4} \right)}, \quad (41)$$

$$B = -\frac{\left(\frac{3\lambda}{r_2^4} + \frac{1}{r_2^3} \right) \Psi}{\frac{1}{R^3} - \frac{2}{r_2^3} - 3\lambda \left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4} \right)}. \quad (42)$$

Ezek alapján már most ϕ teljesen ismeretes a gömbhéjalakú folyadékrétegben. A belső surlódásnak a belső gömbfelületre gyakorolt forgató nyomatéka:

$$\Phi = \frac{8\pi}{3} \eta r_2^4 \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{r=r_2}, \quad (43)$$

a hol a (35) és (41) alapján:

$$\left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{r=r_2} = \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3\lambda \left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4} \right). \quad (44)$$

Úgy, hogy ha τ a drót csavarási nyomatéka, ϑ a kitérésí szög:

$$\tau\vartheta = \frac{-8\pi\eta\Psi}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3\lambda\left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4}\right)}. \quad (45)$$

Ebben a képletben a kísérlettel hozzáférhető mennyiségeken kívül két ismeretlen fordul elő: az η és a λ ; e két ismeretlen meghatározásához tehát két kísérletre van szükségünk. Azonban nem elegendő ugyanazok mellett a gömbfelületek mellett különböző Ψ sebességeknél végezni méréseket, minthogy ϑ a Ψ -vel arányos lévén, a Ψ akárhány értéke mellett végzett kísérletek csak ezt az arányossági tényezőt szolgáltatják; ez pedig η és λ -nak függvénye s így megint csak egyetlen összefüggésünk lesz η és λ között.

Hogy külön η és külön λ mérhető legyen, *különböző méretű gömbökkel* kell méréseket végeznünk. Erre a célra volt szükségünk a kisebb, r_2' sugarú gömbhéjra, melynél ugyancsak megfigyeltük a ϑ' eltérést a külső gömbhéj különböző Ψ' szögsebességei mellett. Ez utóbbi esetben:

$$\tau'\vartheta' = \frac{-8\pi\eta\Psi'}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2'^3} - 3\lambda\left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2'^4}\right)}. \quad (46)$$

A (45) és (46) egyenlet egybevetésével már most kiszámítható az η és λ . Mi előbb a λ -t számítjuk ki:

Az előbb is alkalmazott jelölések felhasználásával:

$$\tau = \frac{\pi^2 K}{T^2} \quad \Psi = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \vartheta = \frac{n}{A}, \quad (47)$$

$$\tau' = \frac{\pi^2 K'}{T'^2} \quad \Psi' = \frac{2\pi}{\Omega'} \quad \vartheta' = \frac{n'}{A'}, \quad (48)$$

tehát:

$$C = \frac{\Omega K n}{T^2 A} = - \frac{16\eta}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3\lambda\left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4}\right)} \quad (49)$$

és

$$C' = \frac{Q'K'n'}{T^2A'} = -\frac{16\eta}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r'^3} - 3\lambda\left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r'^4}\right)}, \quad (50)$$

a hol C és C' az egyenletek baloldalainak rövid jelcí.

Ha a kis és nagy gömbbel végzett kísérletek ugyanazon hőmérséklet és nyomás mellett történtek, akkor a jobboldalt álló η -k egyenlők és a (49) és (50) egyenleteknek egymással való elosztásából kapjuk:

$$\frac{C}{C'} = \frac{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r'^3} - 3\lambda\left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r'^4}\right)}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3\lambda\left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4}\right)}, \quad (51)$$

innen pedig a csuszamlási együttható értéke:

$$\lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{C'\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r'^3}\right) - C\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)}{C'\left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r'^4}\right) - C\left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4}\right)}. \quad (52)$$

Föltételeink értelmében λ kiszámítására csakis azokat a kísérleteket használhattuk fel, a melyekben a sebességek kicsinyek, tehát az eltérítés szöglete arányos a külső gömbhéj szögsebességével, más szóval C , illetőleg C' állandók. Azonkívül a C és C' mennyiségeket ugyanarra a hőfokra kellett redukálnunk, a mi — minthogy C n -nel, n pedig cæteris paribus η -val arányos — egyszerűen az által történt meg, hogy a C -ket η -val arányosan redukáltuk 18°C-ra.

A nagy gömbnél a 201, 202, 205 és 206 sorszámú kísérletekből $Q(=)^1$ 9200 sec.

$$C = 80.442$$

$$77.250$$

$$78.492$$

$$78.877$$

$$\text{Középérték: } C_{n200} = 78.765.$$

¹ (=) «körülbelül egyenlő»-t jelent.

A 203, 204, 207 és 212 sorszámú kísérletből $Q(=)3450$

$$C = 79\,593$$

$$79\cdot142$$

$$78\cdot374$$

$$83\cdot809$$

$$\text{Középérték: } C_{3450} = 80\cdot229.$$

C_{3450} e szerint már vagy 2%-kal nagyobb C_{9200} -nál, úgy, hogy nem tanácsos a λ meghatározására felhasználni.

A kisebbik gömbnél:

| | | | |
|---|---|--------------------------|-----------|
| | | Középérték: | |
| a 263. és 264. s. sz. kísérletekből: $C' = 20\cdot950$ | } | $C'_{4100} = 20\cdot88,$ | |
| $Q(=)4100$ sec. 20\cdot814 | | | |
| a 259, 260, 261, 262. számúból: $C' = 20\cdot72$ | } | $C'_{2200} = 20\cdot71,$ | |
| $Q(=)2200$ sec. 20\cdot96 | | | |
| | | | 20\cdot36 |
| | | | 20\cdot78 |
| a 269, 270, 271, 272. számúból: $C' = 21\cdot29$ | } | $C'_{650} = 21\cdot60.$ | |
| $Q(=)650$ sec. 21\cdot71 | | | |
| | | | 21\cdot78 |
| | | | 21\cdot61 |

Ha most C_{6200} -t kombináljuk

$$C'_{4100}\text{-zal } \lambda = -0\cdot012 \text{ cm.},$$

$$C'_{2200}\text{-zal } \lambda = 0\cdot016 \text{ cm.},$$

$$C'_{650}\text{-nel } \lambda = +0\cdot003 \text{ cm.}$$

eredményre jutunk. λ definitiójánál fogva negatív nem lehet, úgy, hogy a negatív eredmény a kísérleti hibáknak tudandó be és úgy értelmezendő, hogy λ kisebb, mintsem hogy kísérleteinkre észrevehető befolyást gyakoroljon s így kijelentjük, hogy kísérleteink eredményeképpen λ kisebb, mint kísérleteink *maximalis hibája*, azaz

$$\lambda < 0\cdot008 \text{ cm.}$$

víz és vörösréz között.

Olyan rendű csuszamlásról tehát, mint a mekkorát HELMHOLTZ és PIOTROWSKI talált, e szerint semmi esetre sem lehet szó. Ismervén módszerüknek a lengési decrementum megfigyelé-

sére vonatkozó korlátolt pontosságát, nem kell csudálkozni a helytelen eredményen, annál kevésbbé, mert hiszen annak bizonyítása, hogy valamely mennyiség igen kicsiny (zérus), csak különösen pontos adatok segítségével sikerülhet.

17. §. Összefoglalás.

I. A gázok belső surlódásának megvizsgálására készült ZEMPLÉN-féle eszközzel megvizsgáltuk a víz belső surlódását az eltérési módszerrel oly mozgásoknál, melyeknél a külső gömbhéj egy körülfordulása

$$\Omega = 0.17 \text{ sec. és } \Omega = 9300 \text{ sec.}$$

között változott.

II. A víz belső surlódásának együtthatóját 18°C mellett középértékben

$$\eta_{18} = 0.010562\text{-nek}$$

találtuk.

III. Bebizonyítottuk a kísérleti adatoknak graphikus feldolgozásával, hogy az a törvényszerűség, a melyet ZEMPLÉN a belső surlódás forgató nyomatékára nézve elméleti úton levezetett és gázoknál kísérletekkel igazolt, a vízre is érvényes.

IV. Megállapítottuk, hogy az egész megvizsgált sebességi közben turbulencia nem áll be; pedig ha a REYNOLDS-féle kritegium a gömbök által határolt folyadéktérre is érvényes volna, a turbulentiának már be kellett volna következnie.

V. Adatainkból kitudódik, hogy a RAYLEIGH-LAMB-féle kritegium, mely a lassú mozgásokra számított képlet érvényességének határát szabja meg, víz esetében legalább nagyságrendjére nézve helyes, míg gázoknál a valódinál 50 - 100-szorta kisebb értéket szolgáltat.

VI. Két különböző sugarú lengő gömbhéj felhasználásával megállapítottuk, hogy igen lassú mozgások esetében a csuszamlás együtthatója, ha ilyen egyáltalában van,

$$\lambda < 0.008 \text{ cm.,}$$

tehát a csuszamlás elbanyagolható.

E kísérletek a budapesti kir. magyar tudomány-egyetem I. számú physikai intézetében végeztek. Kellemes kötelességünk a helyiség és a segédeszközök szives átengedéséért hálás köszönetet mondanunk báró Eötvös Loránt egyetemi tanár úrnak, az intézet igazgatójának.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 márczius 16.-án tartott üléséből.)

THERMO-ELEKTROMOS KALORIMETER KIS ÁLLATOK SZÁMÁRA.

TANGL FERENCZ r. tagtól.

Kalorimeterem szerkezete ugyanazon az elven alapul, mint BOHR és HASSELBALCH-é,¹ melylyel a tyúkembryo hőtermelését határozták meg.

A hőtermelést thermo-elektromos módszerrel mérem, még pedig úgy, hogy azt a thermo-áramot, melyet az állat termelte hő által létesült hőmérsékletemelkedés okoz, olyan thermo-árammal kompenzálom, melyet ismert mennyiségű hő kelt.

Az én kalorimeterem — azonkívül, hogy nagyobb — főleg az állattartó gondosabb elszigetelésében különbözik a Bohr-félétől. Ezt DEWAR-féle palaczkok alkalmazásával értem el. A módszer kidolgozásakor arra is tekintettel kellett lenni, hogy a kísérlet közben mozgó állatokkal oly pontos és állandó kompenzálás nem lehetséges, mint a tyúktojással.

A kalorimeter leírása.

A kalorimeter két egyenlő nagy, igen vékonyfalú (0.3 mm), belül feketére mázolt rézhengerből áll. Harántátmérőjük 110 mm, magasságuk 210 mm (lásd az 1. ábrát, mely schemás vízszintes harántátmetszetet ábrázol). Elöl a hengerek keskeny sárgarézgyűrűvel vannak összeforrasztva, melynek elülső felszíne simára csiszolt, úgy hogy egy üveglappal (*b*), kevés vaselin segítségével, lég-

¹ BOHR und HASSELBALCH: Ueber die Wärmeproduktion u. d. Stow. d. Embryo, Skand. Arch. f. Physiolog. 14. k. 398. l. 1903.

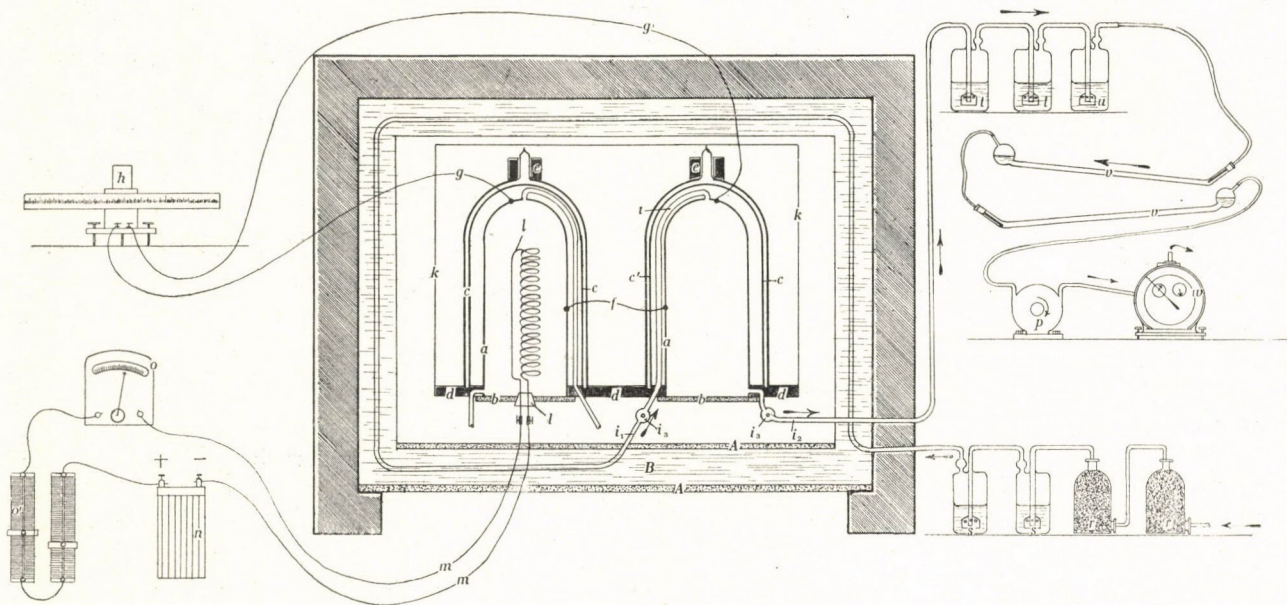
mentesen elzárható. A légmentes zárás biztosítására az üveglapot a gyűrűhöz négy csavar szorítja.

Mindegyik rézhenger egy DEWAR-féle üveghengerben van elhelyezve (1. ábra c és c'). E két egyenlő henger belső haránt-átmérője 125 mm, úgy hogy az üveg és a rézhenger között 7.5 mm vastagságú űr marad. A DEWAR-üvegek elülső széle 0.5 cm vastagságú ebonitlap vájulatába van illesztve. Ez a vájulat körülveszi az ebonitlap két köralakú kivágását, melyekbe a rézhengerek úgy vannak beerősítve, hogy az előbb említett sárgarézgyűrű az ebonitlap elülső felszínét érinti. Ebbe a vájulatba a Dewar-palaczkokat egy kis csavaros drótállvány szorítja és rögzíti. Ez állvány elülső vége az ebonitlemezbe van erősítve és hátulsó ága egy kis ebonithenger közvetítésével (e) a Dewar-palaczk tövisét rögzíti.

A két rézhenger külső felszíne fényesre van csiszolva, hat symmetriásan elhelyezett pontjára 1 mm vastag konstantandrót van forrasztva; ezek a két henger 1—1 pontját kötik össze. (Az ábrán csak két forrasztási hely és egy összekötő rézdrót van feltüntetve.) A konstantandrótok a rézhengertől el vannak szigetelve e között és a DEWAR-üveg között, elől pedig az ebonitlap vájulatában vannak vezetve. Mindegyik rézhengertől 1 mm vastag rézdrót (g és g') vezet a galvanometerhez (h). Most egy nagyon jó, igen érzékeny Broca féle galvanometert használunk.

A hőizolálást szolgálja még, hogy a DEWAR-üvegek egy fényesre csiszolt rézszekrénybe vannak erősítve, melynek elülső falát ebonitlap (d) alkotja. Ebben a DEWAR-üvegek és velük a rézhengerek meg vannak erősítve. A rézszekrény méretei $350 \times 350 \times 210$. A DEWAR-üvegek között maradó tér parafahulladékkal van kitöltve. E szekrény (kalorimeterszekrény) felső felszínén két fogó van. Ezekkel könnyen betehető és kivehető a thermostatjából.

Mindkét kalorimeterhengernek még két nyílása van: egy elől, egy pedig hátul. Ezeken át történik a szellőztetés. A hátulsó nyíláshoz vezet az a rézcső (i_1), melyen keresztül a levegő bejut, az elülső nyílásba pedig az izsó, melyen kijut. A be- és kivezető-csővek is, a rézhenger és a DEWAR-edény között



1. ábra.

vannak elhelyezve. Mindkét csövön közvetlenül a rézhenger előtt egy-egy öblösödés (i_3) van hőmérő számára, melylyel a ki- és beáramló levegő hőmérsékletét mérjük.

A kalorimeterszekrény a kísérlet idején thermostátban van.

A thermostát 88 cm magas vasállványon nyugszik; ónozott vaspléhből álló kettős falú szekrény. Csak elülső kettős fala (1. ábra A) készült üvegből, hogy be lehessen látni a belsőjébe.

A kettős fal közötti rész vízzel van megtöltve; alsó részében egy keverőnek szárnya van, melynek függélyes tengelye a szekrény fenekén keresztül egy tömítő-szelenczén halad át, melyet egy hajtókorong közvetítésével elektromotor hajt.

A vízbe ér egy toluolregulator alsó hengeres része is, a mi a víz hőmérsékletének állandósítására szolgál, ha a thermostátot bizonyos hőmérsékletre akarjuk beállítani.

A thermostát felső fala olyan, hogy a kalorimeterszekrény betevése után a thermostát felső része is víz alá helyezhető. E célból a felső fal külső és belső lemeze egymástól el van választva. A külső lemez aluminiumból készült, kívülről linoleummal borított és könnyen leemelhető fedőként szolgál. A belső lemez vastag üveglap. Egy pontosan csiszolt fémkeretre illik. Ez pedig a függélyes kettős fal belső lemezének felső szélére van forrasztva. A fémkeret csiszolt felszínét, mielőtt az üveglapot feltennők, vaselinnel kenjük be. Ez által légmentesen zárjuk el a belső részt.

Hogy a víz hőmérsékletét állandóan megtarthassuk, a thermostát külső függélyes falát vastag asbestlap veszi körül, melyet linoleum fed.

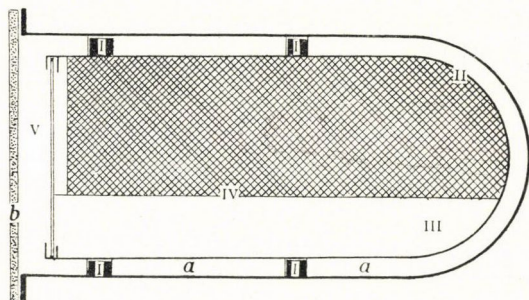
A thermostát belső átmérői úgy vannak megválasztva, hogy a kalorimeterszekrényt, mely fatalpakon nyugszik, minden oldalról 2–4 cm széles légréteg vegye körül. A kalorimeterhengerekhez vezető izolált rézdrótok és rézesövek beforrasztott csöveken keresztül vezettetnek a thermostát felé.

A kísérlet tartama alatt az egyik kalorimeterhengerben van a kísérleti állat, a másikon pedig az elektromos ellenállás, melynek segítségével az állat hőtermelését kompenzáljuk.

Az ellenállás (1. ábra, I) egy spirális 0.2 mm vastag réz-

drót, egyszerű rézdróttálványra szerelve, a melynek két vége egyúttal sarkul szolgál.

Egy gummidugóba, mely dugó annak a vastag üveglapnak kerek kimetszésébe illik, mely a kalorimeterhengert elülről elzárja, két polusú csavarok vannak dugva, melyek közül az egyik az akkumulatorhoz, a másik egy SIEMENS és HALSKE-féle precíziós galvanometerhez vezet. E galvanometerrel a konstantanellenálláson keresztülmenő áram intenzitását 0.1% pontossággal mérhetjük meg. Az áram erősségét egy szabályozó ellenállás (o') segítségével a szükséges módon változtathatjuk.



2. ábra.

A kísérleti állatot természetesen nem állíthatjuk közvetlenül a kalorimeterhengerbe, minthogy nem szabad neki közvetlenül a fallal érintkeznie, másrészt az ürülékeket is gyűjteni kell. Egy ketreczbe teszszük, mely csak valamivel kisebb, mint a kalorimeterhenger, úgy hogy csekély üreg mindenütt van a ketrecz és a henger fala között.

A 2. ábra a ketrecz és henger (a) függélyes átmetszetét mutatja. Az első ábrán a ketrecz nincs feltüntetve. A 2. ábrán I-gyel annak a két ebonitgyűrűnek keresztmetszete van jelölve, mely a ketreczet a henger falától elválasztja és a ketreczet tartja. A ketrecz felső kétharmada (2. ábra II) vékony rézdrótból készült, alsó harmada vékony, belül ónozott rézlemez-ből. Az állat a ketreczben ónozott rézdróthálón áll (IV), vizelete ezen keresztül a ketrecz alsó részébe (III) folyhatik, a hol

paraffinolaj alá kerül. Elöl a ketreczet üveglap zárja; ez szorítókkal van megerősítve.

Hasonló ketrecz van a másik kalorimeterhengerbe is erősítve (nincs az ábrán feltüntetve).

A fentemlített csöveken (1. ábra i_1 és i_2) keresztül csak azt a hengert szellőztetjük a kísérletben, a melyikben az állat van.

A másik henger csövei jól el vannak zárva. A légáramot az állat nagysága szerint egy vízszivattyú vagy egy nagyobb Mariotte-féle palaczk, illetve egy elektromotorral hajtott szivattyú létesíti.

A készülékbe beáramló levegőből natronmészszel a CO_2 -t, conc. H_2SO_4 -val pedig a vízgőzt távolítjuk el.

A levegőt azután a thermostát vizében elhelyezett kígyózó rézcsövön vezetjük keresztül, úgy hogy mielőtt a hengerbe jut, a thermostát hőmérsékletét veszi fel. A hengerből kiáramló levegőt először conc. H_2SO_4 -on vezetjük keresztül (t), azután vízgőzzel telítjük (n), barytvízzel töltött két Pettenkofer-féle csövön vezetjük keresztül (v), végül gázórával a térfogatát megmérjük.

A leírásból látható, hogy a kalorimeter a sugárzó kalorimeterek közé tartozik. A leírt izoláló eljárások arra szolgálnak, hogy a két hengert lehető tökéletesen izoláljuk egymástól, hogy ne befolyásolják egymást. Azonkívül arra szolgálnak, hogy a vezetés és sugárzás folytán a hőkiadást csökkentsék és így az érzékenységet növeljék. A hőizolálás tökéletes nem lehet már csak azért sem, mert az elülső fal üveglap és ezenkívül a nem izolált fémrészek is elvezetik a hő egy részét. Ezenkívül az által is távozik el hő, hogy azt a hengert, melyben az állat van, szellőztetjük és a levegővel és vízgőzzel elmegy a termelt hő egy része, mely azonban a keresztül áramló levegő mennyiségének és hőmérsékletének, valamint a gőzalakban eltávozó víz mennyiségének mérése által igen pontosan meghatározható.

A termelt hő e része a szellőztetés nagysága és a hőképződéshez való viszonya szerint igen nagy is lehet. Mindenestre úgy kell szellőztetni, hogy 3—4° C-nál erősebben ne melegedjék fel a levegő és a kalorimeterben víz ne csapódjék le.

A kalorimeterhenger igen gondos izolálása különösen oly esetekben bizonyult czélszerűnek, mikor — például kis hidegvérű

állatoknál, férgeknel — igen kevés hő képződik és ez is a víz hő párolgásával kompenzálódik. Ez érthetővé válik, ha meggondoljuk, hogy minél tökéletesebb az izolálás, annál nagyobb a forrasztási helyek hőmérsékletének emelkedése ugyanakkora mennyiségű hő hatására.

A kalorimeter használhatósága és pontossága.

1. *Mint kalorimeter.*

Már előbb említettem, hogy ez a kalorimeter sokkal nehezebb feladat megoldására volt hivatva, mint BOHR és HASSELBALCH kalorimetere, melyhez sok tekintetben hasonlít. Minthogy BOHR és HASSELBALCH kalorimeterükben csak tyúktojások fejlődését vizsgálták, egyenletesen növekedő mennyiségű hőt kellett mérniök, míg nekem gyorsan és szabálytalanul változó hőtermelést. Ebben az esetben teljesen kizárt dolog, hogy a kompenzálás oly tökéletes legyen, mint B. és H. kísérleteiben, még pedig annál tökéletlenebb, minél érzékenyebb a mérés.

A készülék kalibrálásának tehát úgy kellett történnie, hogy a használhatóságát e készüléknek változó hőtermelés mellett és tökéletlen, helyesebben mondva nem teljes kompenzálás mellett próbáljuk ki.

Először is arról győződtem meg, hogy a két kalorimeter-henger hőkapacitása egyenlő-e.

E célból mindkét hengerbe egy-egy, körülbelül 45 ohmos (az ellenállásokat pontosan megmértem) konstantandrótból készült ellenállást épűgy helyeztem el, mint az az állatkísérletben az egyik hengerbe van elhelyezve. A kalorimeterszekekrényt szintén a thermostátba helyeztem; mindegyik ellenálláson egy akkumulátor árama ment keresztül; mindegyik áramkörbe egy galvanometer és egy szabályozó ellenállás volt iktatva. Kiszámítottam, hogy mennyi áramot kell a két ellenálláson átbocsátani, hogy egyenlő mennyiségű hő termeltessek a két hengerben.

Ez esetben thermoáramnak nem szabad keletkeznie. Így berendezett kísérleteimből kiderült, hogy majdnem egyenlő a két henger hőkapacitása. Középtértékben a jobb henger hőka-

citása úgy viszonylik a baléhoz, mint 1 : 1'001-hez. Ez a különbség kísérleteinkben elhanyagolható.

További vizsgálattal meggyőződünk arról, hogy a thermostát különböző hőmérsékletében és akkor, a mikor a két hengerben egymás között egyenlő különböző nagyságú hőtermelés történt, thermoáram nem keletkezik. Ilyen kísérletek több óráig tartottak.

Ezzel az is be van bizonyítva, hogy az egyik hengerben keletkező hőt valóban ugyanaz a hőmennyiség kompenzálja a másik hengerben.

A thermoáramkörbe iktatott galvanometer kilengéseinek megfelelő hőtermelést — az állatkísérletek viszonyait lehetőleg utánozva — kétféle esetre kalibráltuk: 1. A galvanometer kilengése hosszabb időre ugyanaz. Ez az eset áll fenn, ha a két kalorimeterhenger közötti *hőmérsékleti különbség* hosszabb ideig állandó, vagyis ha a két henger hőtermelése közötti különbség állandó és a galvanometernek elég ideje volt már, hogy beálljon. 2. A galvanometer állása folyton változik; ez jelentheti egyrészt azt, hogy a két hengerben a hőtermelés változó, vagy hogy a galvanometer még nem állott be.

Ad 1. A kalibrálás úgy történt, hogy a két hengerben különböző áramerősség mellett (0'01—0'1 amp.) teljesen kompenzáltuk egymással a két oldal hőtermelését, azután az egyik oldalon az áram erősségét pontosan növeltük (0'01—0'02 amp.), majd pedig vártunk addig, míg a galvanometer beállt. Kiszámíthattuk ebből a két henger hőtermelése közötti különbséget és ebből ismét azt, hogy a galvanometer 1 mm kilengésének mily különbség felel meg a két henger hőtermelése között. A következő táblázatban összeállított kísérlet szolgáljon e kalibrálás példájául. A táblázatban:

w_j a jobb hengerben levő ellenállás = 45'10 Ω

w_b a bal " " " = 44'50 Ω

i_j a jobb " " ellenálláson átmenő áram erőssége ampèrekben

i_b a bal hengerben levő ellenálláson átmenő áram erőssége ampèrekben

G 30 perczre eső hőtermelés g' cal-ban

$$C_j \text{ jobboldalt} = i_j^2 \times \omega_j \times 0.239 \times 1800 ;$$

$$C_b \text{ bal " } = i_b^2 \times \omega_b \times 0.239 \times 1800 ;$$

| i_b | i_j | C_b | C_j | $C_b - C_j$ | Galvano- meter kilengése mm-ekben | 1 mm. galv. ki- lengésnek 30 per- cenként megfe- lő hőtermelés g-cal |
|------------|--------|-------|-------|-------------|--|--|
| 0,0350 | 0,0199 | 23,83 | 7,61 | 16,18 | 176 | 0,092 |
| 0,0350 | 0,0400 | 23,83 | 30,63 | 6,80 | 76 | 0,089 |
| 0,0186 | 0,0000 | 0,30 | 0 | 6,30 | 65 | 0,097 |
| 0,0190 | 0,0009 | 7,02 | 0 | 7,02 | 69 | 0,101 |
| 0,0603 | 0,0639 | 78,12 | 70,53 | 7,62 | 76 | 0,100 |
| 0,0127 | 0,0000 | 3,12 | 0 | 3,14 | 27 | 0,116 |
| Középérték | | | | | | 0,099 |

Tehát ha a galvanometer 1 mm kilengésre áll be állandóan, akkor az egyik hengerben 30 percz alatt 0.1 g-cal-val több hő termeltetik, mint a másikban.

Ad 2. A galvanometer változó kilengésénél a kalibrálás — a mikor a galvanometer úgy, mint az állatkísérletben, lassú lengéseket végez — úgy történt, hogy először a két ellenálláson egyenlő erősségű áramot vezettünk keresztül: a galvanometer pontosan 0-ra állt be. Vagy pedig úgy, hogy az egyik ellenállásban állandóan erősebb áramot vezettünk keresztül, míg a galvanometer kilengése már nem változott. Ezután az egyik ellenálláson megváltoztattuk az áram erősségét és felírtuk a galvanometer ama kilengését, melyet 30 percz múlva ért el. Kiszámítottuk a megfelelő különbséget a hőtermelésben és a galvanometer 1 mm kilengésének megfelelő hőtermelést. Természetesen az áram erősségét növeltük is és csökkentettük is, úgy hogy a galvanometer kilengéseit mindkét irányban ki-kalibráltuk. A kalibrálás egy példája van összeállítva a következő táblázatban :

i_1 = az áram eredeti erőssége

i_2 = az áram megváltoztatott erőssége, mely a 30 percz után beállott galvanometer-kilengést okozza

C_1 = az i_1 áramerősségnek megfelelő hőtermelés g-cal-ban 30 perczenként

C_2 = az i_2 áramerősségnek megfelelő hőtermelés g -cal-ban 30 perczenként.

| i_1 | i_2 | C_1 | C_2 | $C_2 - C_1$ | A galvano- meter kilen- gése 10 perc- múlva mm-ekben | 1 mm galvano- meter kilen- gés- nek 30 percen- ként számított hőtermelés g -cal |
|------------|--------|-------|-------|-------------|--|--|
| 0,0190 | 0,0300 | 7,78 | 17,51 | 9,73 | 49 | 0,198 |
| 0,0300 | 0,0350 | 17,51 | 23,83 | 6,32 | 33 | 0,188 |
| 0,0127 | 0,0186 | 3,19 | 6,30 | 3,16 | 16 | 0,198 |
| 0,0180 | 0,0400 | 6,30 | 31,13 | 24,83 | 131 | 0,189 |
| 0,0495 | 0,0603 | 47,55 | 70,50 | 22,95 | 115 | 0,200 |
| Középérték | | | | | | 0,195 |

Változó, vagyis a mint az a táblázatból látható, a galvanometer különböző sebességgel való kilengésekor 1 mm kilengésnek 0,195 g -cal hőtermelés felel meg 30 perc alatt.

E kalibrálások alapján a hőtermelést állatkísérleteinkben is elég pontosan mérhettük, bár tagadhatatlan, hogy a galvanometer-kilengés kalibrálásának e módja nem felel meg teljesen az állatkísérleti hőtermelés időbeli menetének. De tekintetbe kell vennünk, hogy az állat hőtermelésének legnagyobb részét kompenzáljuk ¹ és hogy csak a nem kompenzált részt kell a galvanometer kilengéseiből bár kisebb, de mégis elegendő pontossággal kiszámítanunk. Minél teljesebb a kompenzáció (és ez annál teljesebb, minél nyugodtabb az állat), annál kisebb részét teszi a kompenzálatlan rész a kisugárzott hőnek. Kísérleteinkben ez 5—10%-át teszi az egész hőtermelésnek. Hogy a galvanometer-kilengés kalibrálása — tehát a hőtermelés nem kompenzált részének a mérése — elegendő pontossággal történik, azt a következő kísérlet bizonyítja, melyben szándékosan tökéletlenül kompenzáltunk, még pedig csak igen kis hőtermelésnél.

Mindkét kalorimeterben az előbb említett ellenállások vannak elhelyezve. Azonkívül a jobb hengerben nyitott csészében 5 g destillált víz. Ezt a hengert szellőztettük. Együttal e henger ellenállásán áramot vezetünk keresztül. Ha az ez áram által

¹ A kompenzáló áram erősségét 0,1%-re pontosan mérjük.

termelt hő ugyanakkora, mint az a hő, melyet a víz elpárol. gásakor vesz fel, akkor a kettő kompenzálja egymást, a két henger hőegysúlya nem változik, a galvanometer nem leng ki. Ha az ellenállásban *több* hő termeltetik, akkor — irányban kapunk galvanometer-kilengést, ha a párolgási hő a nagyobbik, akkor a másik irányban (+). A kompenzálást szándékosan úgy választottuk, hogy mindegyik kísérletben a galvanometer ki-lengjen. A kísérlet végén megmértük a víz mennyiségét, hogy kiszámíthassuk az elpárolgott víz mennyiségét. A víz párolgási hőjét 0.592-nek számítottuk.

Három ilyen kísérlet eredményei vannak a következő táblázatban összefoglalva :

| A kísérlet száma | A kísérlet tartama órákban | Az elpárolgott víz mennyisége g. | Párolgási hő (számlított) cal.-ban | A kompenzáló áram erőssége amp.-ben | A galvanometer kilengése mm.-ben | a) A kompenzáló áramnak megfelelő hőtermelés cal.-ban | b) A galvanometer kilengésének megfelelő hőtermelés cal.-ban | Tehát a mért párolgási hő a + b |
|------------------|----------------------------|----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|---|--|---------------------------------|
| 1 | 7.41 | 0,7055 | 417,7 | 0,0420 | —19 | 488,6 | 83,8 | 404,8 |
| 2 | 6.50 | 0,5389 | 323,2 | 0,0417 | —29 | 422,4 | 102,3 | 320,1 |
| 3 | 8.33 | 0,4093 | 244,3 | 0,0280 | —2 | 244,1 | + 9,0 | 253,1 |
| Középérték | | | 327,4 | | | Középérték | | 325,6 |

2. Mint respiratiós készülék.

Először megvizsgáltuk a készüléket arra, hogy légmentesen zár-e, manometer segélyével. Ezenkívül megállapítottuk, hogy milyen pontossággal végezhetők a CO_2 és H_2O meghatározások.

A CO_2 -t vagy $NaHCO_3$ -ból fejlesztettük, vagy pedig kis gazometerből bocsátottuk a készülékbe; többnyire az előbb említett módszert alkalmaztuk, mely oly kis mennyiségekkel való dolgozást tesz lehetővé, mint a milyenek az állatkísérletben előfordulnak. A szellőztetés úgy történt, mint az állatkísérletben. Példák:

| A kísérlet száma | Bevett | Talált |
|---------------------|----------------------------|--------|
| | CO ₂ mennyisége | |
| | g | g |
| 1 | 1,531 | 1,539 |
| 2 | 1,572 | 1,553 |
| 3 | 0,692 | 0,679 |
| 4 | 1,726 | 1,640 |
| 5 | 1,752 | 1,751 |
| 6 | 1,758 | 1,783 |
| Középérték | 1,672 | 1,658 |
| | Különbég = -0,84 % | |

Annak a megállapítása, hogy milyen pontossággal lehet a vízgőz termelését a készülékben megállapítani, különösen azért volt fontos, mert ettől függött, hogy az O₂ fogyasztást az ismert indirekt módon elegendő pontossággal lehet-e kiszámítani vagy nem. Üvegcsészében pontosan lemért mennyiségű vizet tettünk a készülékbe és az állatkísérletekben használt sebességgel szellőztettük a készüléket. Pár óra múlva a kísérletet befejeztük, a vizet a csészében visszamértük. A következő táblázatban össze vannak állítva ily irányú kísérleteink:

| A kísérlet száma | Elpárolgott | Lemért |
|---------------------|----------------|---------|
| | víz mennyisége | |
| | g | g |
| 1 | 0,7055 | 0,7076 |
| 2 | 0,5459 | 0,5389 |
| 3 | 0,9840 | 1,0636 |
| 4 | 0,2048 | 0,1908 |
| 5 | 0,4748 | 0,4068 |
| 6 | 0,7815 | 0,7157 |
| 7 | 0,9965 | 0,9853 |
| 8 | 0,4970 | 0,4798 |
| 9 | 0,4076 | 0,4093 |
| 10 | 5,4620 | 5,4570 |
| Középérték | 1,206 | 1,194 |
| Összesen | 11,0596 | 10,9548 |
| Különbég | 0,95 % | |

Egy állatkísérlet leírása.

Miután meggyőződünk arról, hogy a kalorimeter légmentesen zár, megállapítottuk a galvanometer zérus-helyzetét; ha a két henger hőmérsékleti egyensúlyban van, akkor az állatot a ketrecz-betétben, melybe paraffinolajat öntöttünk, lemérjük és az egyik kalorimetriás hengerben elhelyezzük. Azután megindítjuk a ventilációt és kompenzációs áramot vezetünk a másik kalorimeterhenger ellenállásán keresztül. Természetesen előre ki kell számítani körülbelül a kompenzációs áram erősségét, hogy a kompenzálás lehető gyorsan bekövetkezzék. Mégis $1-1\frac{1}{2}$ óráig eltart, míg a kompenzálást körülbelül elérjük. A galvanometert öt percenként olvassuk le. Ha hidegvérű állatokkal dolgozunk, melyek órák hosszat nyugodtan ülnek, akkor az ilyen gyakori leolvasás felesleges; miután már az egyensúlyt elértük, elegendő ha $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$ óránként olvassuk csak le a galvanometert. A hőtermelés kiszámítására csak azokat a leolvasásokat használjuk fel, melyek olyan időközbe esnek, hol a kompenzálás már elég jó.

Az egyes kísérlet tartama 10--24 óra; ha az első $1-1\frac{1}{2}$ óras időközt leszámítjuk, a mi a kompenzálás elérésére szükséges, akkor is a hőtermelés 8--22 órára kiszámítható.

A szellőztetés nagyságát (a gázóra állása), a kalorimeterbe be- és kiáramló levegő hőmérsékletét $\frac{1}{2}$ óránként olvassuk le. Minthogy az elvezető edényeket csak a kísérlet elején és végén mérjük le, így a CO_2 hőtermelést és vízgőzleadást — és ezzel a vízgőzzel leadott hőt — csak az egész kísérlet tartamára számíthatjuk ki, egyes szakaszokra nem.

A kísérlet befejezése után rögtön lemérjük az állatot a ketrecz-betétjével együtt. Minthogy a testsúly és az összes ürületek nagy pontossággal (0.01 gr) mérhetők és mivel megfelelő szellőztetéssel — a mint az erre a célra szolgáló kísérletekből bebizonyult — a vízgőz a készülékben nem csapódik le, az O_2 fogyasztás elegendő pontossággal mérhető.

A készülékkel már számos kísérletet végeztünk, még pedig patkánynyal, egérrel, békával és pióczával.

Végül meg kell említenem, hogy a sok körütekintést és

gondosságot igénylő kipróbálását és kalibrálását a készüléknek régi munkatársam dr. Hári Pál, egyetemi rendkívüli tanár a legnagyobb gondossággal végezte. Ezért neki ezen a helyen is köszönetet mondok.

Ugyancsak az ő segítségével próbáltam ki e thermo-elektromos kalorimeter egy nagyobb példányát, mely oly nagy, hogy 8—10 kgrmos kutya is elfér benne. Szerkezete némileg eltér a fent leírttól, de ugyanazon az elven alapul.

A leglényegesebb eltérés az, hogy a kalorimeterhengerek nem vízthermostátban, hanem légthermostátban vannak és hogy nem Dewar-palaczkkal vannak elszigetelve, hanem madártollréteggel. A kísérletek teljesen kielégítő eredményeket adtak, úgy hogy most már igen különböző nagyságú állatok hőtermelését vizsgálhatjuk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 április 27.-én tartott üléséből.)

POSITIV QUADRATIKUS ALAKOKRÓL, A MELYEKNEK MÁTRIXA HANKEL-FÉLE.

PÓLYA GYÖRGY-től.

1. §. Megegyezésben a szokásos szóhasználattal, akkor nevezem az $(a_{i, k})$ mátrixot HANKEL-féle mátrixnak, hogyha szükségképpen fennáll az

$$a_{i, k} = a_{j, l}$$

egyenlőség, valahányszor

$$i + k = j + l.$$

Az $n+1$ -soros HANKEL-féle mátrix $2n+1$ paramétertől függ és mindig ily alakban írható:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Az algebra és az analízis számos kérdésében játszik fontos szerepet az az eset, midőn az épen fölírt mátrixhoz tartozó $n+1$ -változós quadratikuss alak:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{i+k} x_i x_k \tag{1}$$

pozitív, illetve definit pozitív. Látni fogjuk, hogy különös további fontossággal bír az az eset, midőn az (1) alatti quadratikuss alak mellett, vele együtt a következő n -változós quadratikuss alak:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i+k-1} x_i x_k \tag{2}$$

szintén pozitív. Csak két kérdést akarok emlékezetbe idézni, a melyek közül az egyik az algebra, a másik az analízis körébe tartozik.

I. Legyen $\varphi(x)$ egy $n+1$ -ed fokú polinóm, a melynek gyökei mind reálisak. A gyökök legyenek

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n,$$

legyen továbbá

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \dots$$

A behozott jelölések mellett fennáll az egyenlőség:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{i+k} x_i x_k = \sum_{v=0}^n (x_0 + a_v x_1 + a_v^2 x_2 + \dots + a_v^n x_n)^2, \quad (1')$$

a mely mutatja, hogy az $(1')$ alatti quadratikus alak mindig pozitív, még pedig definit pozitív, ha a_0, a_1, \dots, a_n egymástól különbözőek. — Ha azonban $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ mind *pozitívok*, akkor pozitív még a következő quadratikus alak is:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i+k-1} x_i x_k = \sum_{v=0}^n a_v (x_1 + a_v x_2 + \dots + a_v^{n-1} x_n)^2. \quad (2')$$

II. Legyen $F(x) \geq 0$ x minden reális értékére nézve, és létezzenek a következő végtelen integrálok:

$$a_v = \int_{-\infty}^{+\infty} F(a) a^v da. \quad (v=0, 1, 2, 3, \dots)$$

Az utóbbi föltétel mindig teljesítve lesz például akkor, ha $F(x)$ csak egy bizonyos $a \leq x \leq b$ véges intervallumban vesz föl zérustól különböző értékeket és ebben az intervallumban korlátos és integrális. Az

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{i+k} x_i x_k = \int_{-\infty}^{+\infty} F(a) (x_0 + a x_1 + a^2 x_2 + \dots + a^n x_n)^2 da \quad (1'')$$

$n=0, 1, 2, 3, \dots$

quadratikus alak nyilvánvalóan definit pozitív ($F(x) \not\equiv 0$).

Fontos speczialis eset az, midőn $F(x) = 0$, ha $x < 0$. Ez esetben a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i+k-1} x_i x_k = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(a) a (x_1 + ax_2 + \dots + a^{n-1} x_n)^2 da \quad (2'')$$

(n=1, 2, 3, . . .)

quadratikus alak szintén pozitív.

E tételek megfordítására kitérni nem szándékozom, valamint arra a mélyenfekvő kapcsolatra sem, a mely e két példa és a láncztörtek elmélete közt fennáll.¹

Célom a következő: az (1) alatti quadratikus alak pozitív voltát, illetve az (1) és (2) alatti quadratikus alakok egyidejű pozitivitását összeköttetésbe akarom hozni bizonyos elemi algebrai kérdésekkel (2. és 3. §.). Ez az összeköttetés egy különös szerkesztési módhoz fog vezetni, a mely szerint pozitív HANKEL-féle quadratikus alakokból új pozitív HANKEL féle quadratikus alakokat szerkeszthetünk (4. §.). Az 5. §-ban látni fogjuk, hogy bizonyos HANKEL-féle quadratikus alakok pozitivitása egyszerű elég-séges feltételt ad arra, hogy egy algebrai egyenletnek egy gyöke se legyen reális. A következő §§-ban végtelen sorokra fogjuk alkalmazni a nyert eredményeket és nevezetes tételeket fogunk nyerni

$$\frac{1}{\varphi(x)^k}$$

sorfejtéséről, a hol $\varphi(x)$ egy csupa reális gyökkel bíró polinóm és $k > 0$. Az itt nyerendő tételek nagyobb része már LAGUERRE-től származik, de legtöbbjük ez alkalommal lesz először elfogadható módon bizonyítva. — A használandó módszerek egyszerű, könnyed és összefoglaló tárgyalását engedik meg egy egész sereg eddig egymástól elszigetelten álló algebrai kérdésnek.

Dolgozatom kiinduló pontja REMAK egy megjegyzése.² Ezt a megjegyzést fogja ismertetni a következő

¹ STIELTJES: Recherches sur les fractions continues, Annales de Toulouse VIII. 1—122. o. (1894). IX. 1—47. o. (1895). — J. GROMMER: Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, Crelles Journal, Bd. 144. 114—166. o. (1914).

² REMAK: Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems, Math. Annalen, Bd. 72 (1912), 153—156. o. V. ö. HURWITZ: Über definite Polynome, Math. Annalen, Bd. 73 (1913) 173—176. o.

2. §. Legyen $f(x)$ egy *tetszésszerű* polinóm, a mely eleget tesz a következő föltételeknek:

1. $f(x)$ nem identikusan zérus.
2. $f(x)$ fokszáma $\leq 2n$.
3. Ha x egy tetszésszerű reális érték, akkor legyen

$$f(x) \geq 0.$$

Vegyük továbbá szemügyre a $2n+1$ reális számból álló

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n} \quad (3)$$

sorozatot, a melyben forduljanak elő zérustól különböző számok.

Azt mondom, hogy a (3) sorozat bír az (R) tulajdonsággal, hogyha adva lévén egy *tetszésszerű* $f(x)$ polinóm, a mely eleget tesz az említett 1., 2., 3. föltételeknek, a (3) sorozat segélyével ez $f(x)$ polinómból alkotott

$$a_0 f(0) + \frac{a_1}{1!} f'(0) + \frac{a_2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(0) \quad (4)$$

kifejezés *mindig* pozitív vagy zérus.

Azt mondom továbbá, hogy a (3) sorozat bír az (R) tulajdonsággal, hogyha (az $f(x)$ -re nézve tett föltevések ugyanazok maradván) a (4) alatti kifejezés *mindig pozitív* (zérus kizárva).

Az épen bevezetett két fogalom megvilágítására szolgáljanak a következő megjegyzések:

Ha a (3) alatti sorozat bír az (R) , illetve az (R) tulajdonsággal és $f(x)$ eleget tesz az 1., 2., 3. föltételeknek, akkor

$$a_0 f(z) + \frac{a_1}{1!} f'(z) + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(z) \geq 0,$$

illetve

$$a_0 f(z) + \frac{a_1}{1!} f'(z) + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(z) > 0,$$

bármely reális számot jelentsen is z . Ennek belátására elegendő megjegyezni, hogyha $f(x)$ eleget tesz a mondott három feltételnek, akkor a

$$g(x) = f(z+x)$$

polinóm is bizonynyal eleget tesz nekik.

Az

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, \dots a_{2n} = 0$$

sorozatot mi *nem* vettük föl az (R) tulajdonsággal bíró sorozatok közé. — Az

$$a_0 = 1, a_1 = b, a_2 = b^2, \dots a_{2n} = b^{2n}$$

sorozat bir az (R) tulajdonsággal, de nem bir az (\bar{R}) tulajdonsággal. Ellenben minden sorozat, a mely bir az (\bar{R}) tulajdonsággal, bir az (R) tulajdonsággal is.

Az (R) illetve (\bar{R}) tulajdonsággal bíró sorozatoknak egy új jellemző tulajdonságát tárja elénk REMAK következő tétele:

Hogy az

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_{2n} \quad (3)$$

sorozat az (R) (illetve az (\bar{R})) tulajdonsággal bírjon, ahhoz szükséges és elegendő, hogy az

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{i+k} r_i r_k \quad (1)$$

quadratikus alak pozitív (illetve definit pozitív) legyen.

Bizonyítás. Legyenek $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ tetszőszerinti reális számok, de nem mindannyian zérussal egyenlők. Az

$$f(x) = (\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \dots + \mu_n x^n)^2 \quad (5)$$

polinóm teljesíti az $f(x)$ -re kirótt 1., 2., 3. föltételeket. Tehát szükséges, hogy

$$\begin{aligned} & a_0 f'(0) + \frac{a_1}{1!} f''(0) + \frac{a_2}{2!} f'''(0) + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(0) \\ &= a_0 \mu_0^2 + \frac{a_1}{1!} 1! (\mu_0 \mu_1 + \mu_1 \mu_0) + \frac{a_2}{2!} 2! (\mu_0 \mu_2 + \mu_1^2 + \mu_2 \mu_0) + \dots = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{i+k} \mu_i \mu_k \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

illetve, hogy

$$> 0$$

legyen, minden $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ értékrendszere, kivéve a

$$\mu_0=0, \mu_1=0, \dots, \mu_n=0$$

értékrendszert, föltéve, hogy a (3) sorozat bir az (R) , illetve föltéve, hogy a (3) sorozat bir az (\bar{R}) tulajdonsággal. Ezzel azonban be van bizonyítva REMAK föltételének szükségessége.

Ugyanennek a föltételnek elégséges volta szintén nyilvánvaló lesz a végzett számításból, mihelyt megmutattuk, hogy *minden* polinóm, a mely eleget tesz az 1., 2., 3. föltételeknek, mint polinómok quadrátösszege állítható elő. (Ennek belátására elegendő az (5) alatti polinómon végzett számítást egy összeg különböző tagjain egyszerre elvégezve gondolni.)

Ha azonban az $f(x)$ polinóm eleget tesz az 1., 2., 3. föltételeknek, akkor összes reális gyökei páros sokszorosságúak (a zérust is páros számnak tekintve). Tehát ha összeszedjük $f(x)$ -nek összes reális lineárfaktorait, azok egy quadrátot alkotnak: legyen ez $p^2(x)$. Az $f(x)$ ama lineárfaktorait összeszorozva, a melyek a felső félsíkban levő gyököktől származnak, valami

$$r(x) + is(x)$$

polinómot kapunk, a hol $r(x)$ és $s(x)$ reális együttthatójú polinómok. Az alsó félsíkban fekvő gyökökhöz tartozó lineárfaktorai az $f(x)$ -nek összeszorozva az

$$r(x) - is(x)$$

polinómot adják: ezért

$$\begin{aligned} f(x) &= c^2 p^2(x) (r(x) + is(x)) (r(x) - is(x)) \\ &= (cp(x)r(x))^2 + (cp(x)s(x))^2, \end{aligned}$$

a hol c egy reális számot jelent.¹ Világos, hogy a $cp(x)r(x)$ és a $cp(x)s(x)$ polinómok legfeljebb n -ed fokúak és nem lehetnek mindketten azonosan egyenlőek zérussal: ezzel bizonyításunk végére jutottunk.

Jelen 2. §-ban mindvégig csak REMAK-ot idéztük, pusztán a jelöléseket egyszerűsítve kissé, céljainkhoz képest.

¹ LANDAU: Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate, Math. Annalen Bd. 62. 272. o. (1906.)

3. §. Az $f(x)$ polinóm tegyen eleget a következő feltételeknek:

1. $f(x) \not\equiv 0$.
2. $f(x)$ fokszáma $\leq 2n$.
3. $f(x) \geq 0$, hogyha $x \geq 0$.

Ezek a föltételek tehát *kevesebbet* követelnek $f(x)$ -től, mint az előbbi §-ban vizsgált föltételek.

A $2n+1$ reális számból álló

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n} \quad (3)$$

sorozatról megint föltételezem, hogy van legalább egy zérustól különböző tagja.

Azt mondom, hogy a (3) sorozat bír az (S) tulajdonsággal, hogy ha adva lévén egy tetszésszerű $f(x)$ polinóm, a mely eleget tesz az épen kirótt 1., 2., 3. föltételeknek, a (3) sorozat segítségével ez $f(x)$ polinómból alkotott

$$a_0 f(0) + \frac{a_1}{1!} f'(0) + \frac{a_2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(0)$$

kifejezés *sohasem* negatív.

Azt mondom továbbá, hogy a (3) sorozat bír az (\bar{S}) tulajdonsággal, hogyha $f(x)$ megint eleget téven a jelen 3. §. elején kirótt három feltételnek, a (4) alatti kifejezés szükségkép *pozitív* (>0).

Könnyen beláthatók és alkalmasak minket megbarátkoztatni a bevezetett fogalmakkal a következő tények:

Ha $f(x)$ bír a mondott tulajdonságokkal, akkor

$$a_0 f(z) + \frac{a_1}{1!} f'(z) + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(z) \geq 0,$$

illetve

$$a_0 f(z) + \frac{a_1}{1!} f'(z) + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(z) > 0,$$

föltéve, hogy a (3) sorozat bír az (S), illetve föltéve, hogy a (3) sorozat bír az (\bar{S}) tulajdonsággal, *föltéve továbbá, hogy*

$$z \geq 0.$$

Az

$$a_0=1, a_1=b, a_2=b^2, \dots a_{2n}=b^{2n}$$

sorozat bír az (S) tulajdonsággal, hogyha $b \geq 0$, de nem bír az (\bar{S}) tulajdonsággal. — Az (\bar{S}) tulajdonság maga után vonja az (R) és (\bar{R}) tulajdonságokat, továbbá az (S) tulajdonságot; azonban nem megfordítva.

Mindezeket a tényeket új oldalról világítja meg a következő tétel:

Hogy a (3) sorozat az (S) , illetve az (\bar{S}) tulajdonsággal bírjon, ahhoz szükséges és elegendő, hogy a következő két quadratikussal alak:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{i+k} x_i x_k, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i+k-1} x_i x_k \quad (2)$$

egyidejűleg pozitív (illetve definit pozitív) legyen.

Hogy az (1) pozitív volta szükséges, az kivüláglik az előbbi § fejtegetéseiből. Hogy a (2) pozitivitása szintén szükséges, annak belátására vegyük szemügyre az

$$f(x) = x(v_1 + v_2 x + \dots + v_n x^{n-1})^2 \quad (6)$$

polinómot. Ha v_1, v_2, \dots, v_n reális számok és nem mindannyian zérussal egyenlők, akkor a (6) alatti polinóm bizonynyal eleget tesz a jelen 3. §. elején felállított három föltételnek. Tehát

$$\begin{aligned} & a_0 f(0) + \frac{a_1}{1!} f'(0) + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(0) = \\ &= \frac{a_1}{1!} 1! v_1^2 + \frac{a_2}{2!} 2! (v_2 v_1 + v_1 v_2) + \dots = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i+k-1} v_i v_k \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

illetve

$$> 0$$

szükségképen, hogyha a (3) sorozat bír az (S) , illetve hogyha a (3) sorozat bír az (\bar{S}) tulajdonsággal. Tekintve, hogy a v_1, v_2, \dots, v_n számrendszer egészen önkényes, csak a $0, 0, \dots, 0$ számrendszer-

től tartozik különbözőnek lenni, a (2) alatti quadratikus alak pozitív voltának szükségessége már be is van bizonyítva.

Hogy azonban az (1) és (2) alatti quadratikus alakok egyidejű pozitív (pozitív definit) volta elégséges ahhoz, hogy a

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n} \quad (3)$$

sorozat birjon az (S) (az (\bar{S})) tulajdonsággal, az nyilvánvaló lesz, ha megmutatjuk, hogy minden $f(x)$ polinóm, a mely megfelel a jelen 3. §. elején kirótt feltételeknek, előállítható mint (5) és (6) típusú polinóмок összege.

Valóban legyenek

$$-a, -\beta, -\gamma, \dots, -\lambda$$

az $f(x)$ páratlan sokszorosságú reális gyökhelyei (feltéve, hogy ilyenek léteznek)

$$0 \leq a < \beta < \gamma < \dots < \lambda,$$

akkor

$$f(x) = (x+a)(x+\beta) \dots (x+\lambda) F(x),$$

ahol

$$F(x) \geq 0$$

minden reális x értékre nézve. Tehát

$$F(x) = \varphi^2(x) + \psi^2(x);$$

$$f(x) = (x+a)(x+\beta) \dots (x+\lambda) (\varphi^2(x) + \psi^2(x)),$$

a mely utolsó formulának jobboldalát kiszorozva, $f(x)$ -et mint (5) és (6) típusú polinóмок összegét állíthatjuk elő (tekintetbe vévén azt is, hogy (5) fokszáma szükségképen $\leq 2n$ és (6) fokszáma szükségképen $\leq 2n-1$).

Eddigi eredményeinket összefoglalva látjuk, hogy összesen négy különféle tulajdonságát sikerült a (3) alatti sorozatnak quadratikus alakok tulajdonságai által jellemezni.

Schematikusan így állíthatjuk elő eredményeinket:

- | | | |
|-------------|-------------|---|
| (R) | aequivalens | (1) pozitív, |
| (\bar{R}) | " | (1) poz. definit, |
| (S) | " | (1) pozitív, (2) pozitív, |
| (\bar{S}) | " | (1) pozitív definit, (2) pozitív definit. |

A (3) sorozat e négy tulajdonságának interpretációja quadratikusan alakok tulajdonságai által könnyen vezet a következő nevezetes összefüggéshez.

Hogy a $2m+1$ reális számból álló

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2m}$$

sorozat birjon az (S) (az (\bar{S})) tulajdonsággal, ahhoz szükséges és elégséges, hogy a $4m+1$ számból álló

$$a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots, 0, a_{2m}$$

sorozat az (R) (az (\bar{R})) tulajdonsággal birjon.

E tétel bizonyítására (bármily egyszerű legyen is az) nem szándéksom kitérni, minthogy a tételt a következőkben nem fogom használni. E tétel könnyen szolgáltatathatott volna az (S) és (\bar{S}) tulajdonságok meghatározására egy más kiinduló pontot.

Az említett aequivalentiákat a quadratikusan alakok szempontjából fogja értékesíteni a

4. §. A következő két quadratikusan alak :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{i+k} x_i x_k \qquad \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n b_{i+k} x_i x_k$$

pozitív volla maga után vonja az

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n c_{i+k} x_i x_k$$

quadratikusan alak pozitív voltát, a hol¹

$$c_v = a_0 b_v + \binom{v}{1} a_1 b_{v-1} + \binom{v}{2} a_2 b_{v-2} + \dots + a_v b_0.$$

($v=0, 1, 2, 3, \dots, 2n$)

Ha a két első quadratikusan alak közül egyik sem identikusan zérus és legalább az egyik definit, akkor a belőlük szerkesztett harmadik quadratikusan alak is definit lesz.

¹ c_v az $(a+b)$ binóm symbolikus v -dik hatványa :

$$c_v = (a+b)_v.$$

Valóban tegyük fel, hogy az

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n} \quad (3)$$

számok nem mindannyian egyenlők zérussal; akkor ez a sorozat bír az (R) tulajdonsággal. Legyen $f(x)$ egy polinóm

$$f(x) \neq 0, \quad f(x) \text{ fokszáma} \leq 2n, \quad f(x) \geq 0,$$

akkor a 2. §. egy megjegyzése szerint az

$$f^*(x) = a_0 f(x) + \frac{a_1}{1!} f'(x) + \frac{a_2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(x)$$

polinóm is bír ugyanavval a három tulajdonsággal, a melyet $f(x)$ -ről föltételeztünk.

Ha már most a

$$b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2n}$$

sorozat bír az (R) (az (\bar{R})) tulajdonsággal, akkor a

$$\begin{aligned} b_0 f^*(x) + \frac{b_1}{1!} \frac{d}{dx} f^*(x) + \frac{b_2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} f^*(x) + \dots + \frac{b_{2n}}{2n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f^*(x) = \\ = c_0 f(x) + \frac{c_1}{1!} f'(x) + \frac{c_2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{c_{2n}}{2n!} f^{(2n)}(x) \end{aligned}$$

kifejezés ≥ 0 (> 0) lesz minden reális x értékre, bármely $f(x)$ polinómot vegyünk, a mely a kirótt három föltételnek eleget tesz. Tehát a

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}$$

sorozat bír az (R) (az (\bar{R})) tulajdonsággal. Qu. e. d.

Például a

$$+1, -1, +1, \dots, -1, +1$$

sorozat nyilván bír az (R) tulajdonsággal. Adva lévén egy tetszés-szerinti

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$$

sorozat, a mely az (\bar{R}) tulajdonsággal bír, az épen bebizonyított tétel szerint az

$$a_0, \Delta a_0, \Delta^2 a_0, \dots, \Delta^{2n} a_0$$

sorozat is fog bírni az (\bar{R}) tulajdonsággal, amint ez a HANKEL-féle determinánsok ismeretes átalakításából is nyomban következik.

Hasonló módon, mint az előbbi tétel, bizonyítható még a következő is:

Ha a következő négy quadratikus alak:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{i+k} x_i x_k & \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i+k-1} x_i x_k \\ \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n b_{i+k} x_i x_k & \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i+k-1} x_i x_k \end{aligned}$$

pozitív, akkor bizonyynyal pozitív a következő kettő is:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n c_{i+k} x_i x_k \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{i+k-1} x_i x_k,$$

ahol

$$c_v = a_0 b_v + \binom{v}{1} a_1 b_{v-1} + \binom{v}{2} a_2 b_{v-2} + \dots + a_v b_0, \\ (v=0, 1, 2, 3, \dots, 2n)$$

Még pedig, ha az első két quadratikus alak nem identikusan zérus, és a következő kettő definit, akkor a belőlük alkotott utolsó két alak is definit lesz.

5. §. Ha az

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$$

sorozat bír az (\bar{R}) tulajdonsággal, akkor a következő polinómnak

$$a_0 x^{2n} + \binom{2n}{1} a_1 x^{2n-1} + \binom{2n}{2} a_2 x^{2n-2} + \dots + a_{2n}; \quad (7)$$

$$a_0 x^{2n} + \frac{a_1}{1!} x^{2n-1} + \frac{a_2}{2!} x^{2n-2} + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!}; \quad (8)$$

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \dots + a_{2n} \quad (9)$$

egy reális gyökeik sincs, míg az

$$a_0 x^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} a_1 x^{2n} + \binom{2n+1}{2} a_2 x^{2n-1} + \dots + a_{2n+1}; \quad (10)$$

$$a_0 x^{2n+1} + \frac{a_1}{1!} x^{2n} + \frac{a_2}{2!} x^{2n-1} + \dots + \frac{a_{2n+1}}{2n+1!}; \quad (11)$$

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \dots + a_{2n+1} \quad (12)$$

polinómnak pontosan egy reális gyökük van, bármily reális számot jelentsen is a_{2n+1} .

Valóban a (7) alatti polinóm így írható:

$$a_0 x^{2n} + \frac{a_1}{1!} \frac{d}{dx} x^{2n} + \frac{a_2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} x^{2n} + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} x^{2n} \quad (7')$$

és mivel

$$x^{2n} \geq 0,$$

az (\bar{R}) tulajdonság definíciójából következik, hogy a (7) alatti polinóm minden reális x értékre nézve pozitív (nagyobb, mint zérus).

Ezzel a (7) alatti polinómot elintéztük. — Állítsuk elő a (10) alatti polinóm deriváltját:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ a_0 x^{2n+1} + \frac{a_1}{1!} \frac{d}{dx} x^{2n+1} + \frac{a_2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} x^{2n+1} + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{a_{2n+1}}{2n+1!} \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} x^{2n+1} \right\} = (2n+1) \left\{ a_0 x^{2n} + \binom{2n}{1} a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{2n} \right\}. \end{aligned}$$

A (10) alatti polinóm deriváltja tehát a (7) alatti polinóm $2n+1$ -szerese. Azonban geometriailag evidens és ROLLE tételéből is közvetlenül következik, hogy egy függvénynek, a melynek deriváltja állandóan pozitív, legfeljebb egy reális gyöke lehet. A (10) alatti függvény azonban egy páratlan fokszámú polinóm és így legalább egy gyöke van: ilyen módon pontosan egy gyökének kell lennie.

A még hátramaradó esetek tárgyalásához LAGUERRE következő nevezetes tételére van szükségünk.¹

Ha a reális együtthatós

$$c_0 x^m + \frac{c_1}{1!} x^{m-1} + \frac{c_2}{2!} x^{m-2} + \dots + \frac{c_m}{m!}$$

polinómnak r darab reális gyöke van, akkor a

$$c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \dots + c_m$$

polinómnak vagy szintén r darab reális gyöke van, vagy kevesebb.

¹ LAGUERRE: Oeuvres, T. 1, 30—31. o., 200—201. c. (1898). V. ö. továbbá Aequidistans ordinátákkal adott polinóm valós gyökeiről cz. dolgozatom egy megjegyzését, Mathematikai és Természettudományi Értesítő, XXXI. k. 445. o. 1913.

A (7) alatti polinóm így írható:

$$2n! \left[\frac{1}{2n!} a_0 x^{2n} - \frac{1}{2n-1!} \frac{a_1}{1!} x^{2n-1} + \frac{1}{2n-2!} \frac{a_2}{2!} x^{2n-2} + \dots + \frac{a_{2n}}{2n!} \right].$$

LAGUERRE tétele tehát azt mondja ki jelen esetünkre alkalmazva, hogy a (8) alatti polinómnak legfeljebb annyi reális gyöke van, mint a (7) alatti polinómnak. Az utóbbinak azonban egy reális gyöke sincs, tehát a (8) alatti polinómnak sincs reális gyöke. — Hasonló módon következnek a (9), (11), (12) alatti polinómokra vonatkozó állításaink, a melyek bizonyításával még adósak voltunk.

A (7), (8), (10), (11) alatti polinómokra vonatkozó tételek úglátszik újak és a következőkben számos alkalmazást fognak nyerni. A (9) és (12) alatti polinómokra vonatkozó tételek VAN VLECK-től valók;¹ ezeket nem fogom a következőkben alkalmazni, de jónak láttam megemlíteni őket, mivel bizonyításuk a többiekéből minden fáradság nélkül folyik.

6. §. A jelen és a következő §-ban x növekvő hatványai szerint rendezett végtelen sorokat fogunk vizsgálni. Az

$$A = a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \frac{a_3}{3!} x^3 + \dots \quad (13)$$

hatványsor tulajdonképpen csak arra fog szolgálni, hogy az

$$a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots$$

sorozatot (együtthatóinak növekvő indexek szerint rendezett végtelen sorozatát) alkalmasan reprezentálja. Épen ezért a tárgyalandó sorok konvergenciáját föltételeznünk vagy vizsgálunk fölösleges. Hatványsorok összegén, szorzatán és hasonló kifejezéseken megint egy hatványsort értek, ugyanis azt a hatványsort, a melyet az előirt műveletek formális elvégzése és x növekvő hatványai szerint való rendezés után nyerünk.

¹ VAN VLECK: A sufficient condition for the maximum number of imaginary roots of an equation of the n^{th} degree. Annals of Math. (2) 4 191—192. o. (1903).

Azt mondom, hogy az

$$A = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}x^n + \dots$$

hatványsor bír az (R) (illetve az (\bar{R}) , (S) , (\bar{S})) tulajdonsággal, hogyha a $2n+1$ első együtthatójából alkotott

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

sorozat mindig bír a nevezett tulajdonsággal, bármily nagy legyen n . A hosszú kifejezésmódot: «Az A sor bír az (R) tulajdonsággal» gyakran fogom így rövidíteni: « A egy (R) sor».

Ha A és B (R) sorok, akkor $A+B$ is egy (R) sor. Pontosabban, ha A és B közül legalább egyik (\bar{R}) sor is, akkor $A+B$ is (\bar{R}) sor.

Legyen

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n,$$

akkor

$$A + B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n!} x^n$$

és tételünk nyomban belátható az (R) és (\bar{R}) tulajdonságok definíciója alapján.

Ha A és B (R) sorok, akkor AB is egy (R) sor, még pedig szükségképen (\bar{R}) , hogyha A és B közül legalább az egyik (\bar{R}) .

Mivel

$$AB = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n,$$

ahol

$$c_n = a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0,$$

jelen tétel csak a 4. §. elején kimondott tételt mondja ki más alakban.

Ha A sor bír az (R) (az (R)) tulajdonsággal, akkor a $\frac{d^2 A}{dx^2}$ sor is bír az (R) (az (\bar{R})) tulajdonsággal.

Valóban

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = a_2 + \frac{a_3}{1!}x + \frac{a_4}{2!}x^2 + \dots$$

és a kimondott tétel csak azt állítja, hogy a

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_{i+k} x_i x_k$$

quadratikus alak pozitív, illetve definit pozitív voltából következik a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i+k} x_i x_k$$

quadratikus alak pozitív, illetve definit pozitív volta — a nyilvánvaló.

Összefoglalásképpen kimondhatjuk a következő tételt:

Legyenek A, B, C, \dots (R)-sorok és legyen

$$L = \varphi(A, A'', A^{IV}, \dots B, B'', B^{IV}, \dots C, C'', C^{IV}, \dots)$$

egy e sorokból és párosrendű derivációikból megalkotott tet-szés szerinti raczionális egész függvény, a melynek minden együtthatója pozitív; akkor L is egy (R) sor, még pedig szükségképen egy (R) sor, ha az A, B, C, \dots sorok közül legalább egy bír az (R) tulajdonsággal.

Még a következő tételre lesz a következőkben szükségem

Legyen adva az (R) soroknak egy végtelen sorozata:

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots A^{(k)}, \dots$$

$$A^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(k)}}{n!} x^n, \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

amely együtthatónként konvergál, azaz, a mely bír avval a tulajdonsággal, hogy

$$\lim_{k=\infty} a_0^{(k)} = a_0, \quad \lim_{k=\infty} a_1^{(k)} = a_1, \dots \lim_{k=\infty} a_n^{(k)} = a_n, \dots$$

Ha az

$$A = a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \dots$$

sornak nem minden együtthatója zérus, akkor ez az A sor szintén egy (R) sor.

E tétel bizonyítása annyira egyszerű, hogy bizvást el-hagyhatom. Megemlítem azonban, hogy a tétel nyilván hamis

tételbe megy át, mihelyt (R) helyett (\bar{R}) -et írunk. Meg akarok továbbá említeni egy esetet, a midőn a tétel föltételei teljesítve vannak. Ez a következő: az

$$A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(k)}, \dots$$

hatványsorok az

$$f_1(x), f_2(x), \dots f_k(x), \dots$$

analitikai függvények MACLAURIN-sorai és a mondott függvények egy bizonyos $|x| \leq \tau$ körben mind regulárisak és ugyanott egyenletesen konvergálnak valamely $f(x)$ függvény felé, a mely nem identikusan zérus. Ebben az esetben ugyanis a föltételt képező határérték-relációknak WEIERSTRASS egy alapvető tétele értelmében kell fennállaniok.

Az (S) és (\bar{S}) sorok vizsgálatakor kissé különböző analóg tételekre akadunk. Az összes különbség kifejezésre jut azonban már a következő tételben:

Legyenek A, B, C, \dots (S) sorok és legyen

$$L = \varphi(A, A', A'', \dots B, B', B'', \dots C, C', C'', \dots)$$

egy ezen sorokból, valamint tetszésszerűen derivációikból megalkotott racionális egész függvény, a melynek minden együtthatója pozitív; akkor L is egy (S) sor, még pedig szükségképen egy (\bar{S}) sor, ha az A, B, C, \dots sorok közül legalább egy bír az (\bar{S}) tulajdonsággal.

7. §. Vissza akarván térni a hatványsorok szokott jelölésmódjához, legyen a (13) képletben

$$a_0 = c_0, \quad \frac{a_1}{1!} = c_1, \quad \frac{a_2}{2!} = c_2, \quad \dots \quad \frac{a_n}{n!} = c_n, \quad \dots$$

Hatványsorunk a következőbe megy át:

$$A(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \quad (13')$$

Hogy (13') alatti hatványsorunk az (\bar{R}) tulajdonsággal bír, az pontosan annyit jelent: legyen $f(x)$ egy tetszésszerűen reális együtthatós polinóm, $f(x) \neq 0$, a mely sohasem lesz negatív, ha x reális. Akkor az

$$\begin{aligned}
 A\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) &= c_0 f(x) + c_1 f'(x) + c_2 f''(x) + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d^n f(x)}{dx^n}
 \end{aligned}$$

polinóm x minden reális értékénél valamely pozitív értéket vesz föl. Hogy a (13') hatványsor egy (\bar{R}) -sor, az másképen így definiálható: a

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

sorozat $(A(x)$ együtthatóinak végtelen szorzata) eleget tesz a következő végtelen sok egyenlőtlenségnek:

$$\begin{vmatrix}
 c_0 & 1! c_1 \dots & n! c_n \\
 1! c_1 & 2! c_2 \dots & (n+1)! c_{n+1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 n! c_n & (n+1)! c_{n+1} \dots & 2n! c_{2n}
 \end{vmatrix} > 0. \quad (14)$$

($n=0, 1, 2, 3, \dots$)

Az (\bar{R}) , (S) , (\bar{S}) sorok hasonló módon definiálhatók. Csak egy meghatározást akarok kiemelni: hogy a (13') alatti sor egy (\bar{S}) sor legyen, ahhoz szükséges és elégséges, hogy teljesítve legyen a következő végtelen sok egyenlőtlenség:

$$\begin{vmatrix}
 c_0 & 1! c_1 \dots & n! c_n \\
 1! c_1 & 2! c_2 \dots & n+1! c_{n+1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 n! c_n & n+1! c_{n+1} \dots & 2n! c_{2n}
 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix}
 1! c_1 & 2! c_2 \dots & n+1! c_{n+1} \\
 2! c_2 & 3! c_3 \dots & n+2! c_{n+2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 n+1! c_{n+1} & n+2! c_{n+2} \dots & 2n+1! c_{2n+1}
 \end{vmatrix} > 0. \quad (15)$$

($n=0, 1, 2, 3, 4, \dots$)

Ezekből a definíciókból világos például, hogy egy (\bar{R}) sornak minden páros indexű együtthatója pozitív, míg egy (\bar{S}) sornak minden együtthatója pozitív.

Az 5. §-ban bebizonyított tételek az (\bar{R}) soroknál a következő jelentőséget nyerik:

Ha a (13') alatti sor bír az (\bar{R}) tulajdonsággal, akkor pá-

ros indexű szeleteinek és JENSEN-féle polinómjainak nincs reális gyöke, míg a páratlan indexűeknek pontosan egy reális gyöke van.

A (13') sor m -edik szelete a

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m$$

polinóm, míg az m -edik «JENSEN-féle polinóm» alatt a következő polinómot értem:

$$\begin{aligned} c_0 x^m + c_1 m x^{m-1} + c_2 m(m-1) x^{m-2} + \dots + m \dots 2.1 c_m = \\ = A \left(\frac{d}{dx} \right) x^m. \end{aligned} \quad ^1$$

A következőkben példákat fogok adni (\bar{R}) és (\bar{S}) sorokra és ekkor fog tulajdonképpen kitűnni fejtegetéseink jelentősége. Látni fogjuk, hogy számos az analízisben jól ismeretes sor bír az (\bar{R}) illetve az (\bar{S}) tulajdonsággal és hogy az ezekről különféle alkalmakkal és különféle módon bebizonyított tételek most egy csapásra következnek.

8. §. Ha $f(x)$ egy polinóm és $k > 0$, akkor bizonyynyal konvergál a következő integrál: ²

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} f(x+ct) dt = \\ = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} \left\{ f(x) + \frac{tc}{1!} f'(x) + \frac{t^2 c^2}{2!} f''(x) + \dots \right\} dt = \\ = \Gamma(k) f(x) + c \frac{\Gamma(k+1)}{1!} f'(x) + c^2 \frac{\Gamma(k+2)}{2!} f''(x) + \dots \\ = \Gamma(k) \left(f(x) + \frac{k}{1} c f'(x) + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} c^2 f''(x) + \dots \right). \end{aligned} \quad (16)$$

¹ Ezt az elnevezést azért vezettem be, mert a hatványsorhoz rendelt $A \left(\frac{d}{dx} \right) x^m$ polinómsorozat fontosságára JENSEN utalt rá, Recherches sur la théorie des équations (Acta Math. 36. 181—195. o.) (1913) cz. értekezésében. FEKETE MIHÁLY úrnak egy igen nevezetes tétele értelmében, a szövegben álló tétel maga után vonja, hogy egy (\bar{R}) sornak soha sincs reális gyöke konvergenciaköre belsejében. V. ö. Comptes Rendus, Paris (1914. 1) T. 158, 1258 o.

² A (16) alatti integrált $k=1$ esetére HURWITZ vizsgálta: Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen (Math. Annalen, 33 259. o.) [1889] cz. értekezésében, továbbá i. h. Az általános $k > 0$ eset vizsgálatára egy HURWITZCAL a jelen dolgozat tárgyáról folytatott beszélgetés vezette a szerzőt.

Már most szemügyre vévén azt az esetet, midőn $f(x) \geq 0$ minden reális x -re, illetve azt az esetet, midőn $f(x+t) \geq 0$, ha $t \geq 0$, fáradság nélkül belátjuk, hogy az

$$\frac{1}{(1-cx)^k} = 1 + \frac{k}{1} cx + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} c^2 x^2 + \dots$$

hatványsor egy (\bar{R}) sor, ha $c \geq 0$, sőt, hogy egy (\bar{S}) sor, ha $c > 0$. Több hasonló sort összeszorozva, fáradság nélkül jutunk a következő tételekhez:

Legyen $\varphi(x)$ egy tetszésszerű, csupa reális gyökkel bíró polinóm, $\varphi(0) > 0$, $k > 0$. Akkor az

$$\left(\frac{1}{\varphi(x)} \right)^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

hatványsor egy (\bar{R}) sor.

Legyen $\varphi(x)$ egy tetszésszerű, csupa pozitív reális gyökkel bíró polinóm, $\varphi(0) > 0$, $k > 0$. Akkor az

$$\left(\frac{1}{\varphi(x)} \right)^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

hatványsor egy (S) sor.

E tételekből számos más tétel folyik, így például a következők: ha a $\varphi(x)$ polinóm minden gyöke reális és $\varphi(0) > 0$, akkor

az $\left(\frac{1}{\varphi(x)} \right)^k$ hatványsorának páros indexű együtthatói pozitívak.¹

Az $\left(\frac{1}{\varphi(x)} \right)^k$ hatványsorának szeletei legfőljebb egy reális gyökkel bírnak.²

Az $\left(\frac{1}{\varphi(x)} \right)^k$ hatványsorának JENSEN-polinómjai legfőljebb egy reális gyökkel bírnak.

¹ LAGUERRE: Oeuvres T. 1, 169. o. (1898). bizonyítás nélkül mondja ki e tételt. GROMMER i. h., § 6. egy az ittenitől lényegesen különböző bizonyítást ad.

² A $k=1$ esetet másképen és helyesen bizonyítja LAGUERRE i. h. 111. o., az általános $k>0$ esetet helytelenül i. h. 112. o.

Legyen például $\varphi(x) = 1 - x$, $k = 1$;

$$\frac{1}{\varphi(x)} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Tételünk alkalmazásaképen azt a tényt nyerjük, hogy az

$$\frac{1}{n!} \frac{1}{1 - \frac{d}{dx}} x^n = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{n-1!} + \dots + \frac{x}{1!} + 1$$

polinóm, azaz e^x hatványsorának n -edik szelete legfeljebb egy reális gyökkel bír.¹

9. §. A 8. §. tételei csupa reális gyökű, illetve csupa reális pozitív gyökű polinómról könnyen általánosíthatók a transcendens egész függvényeknek két osztályára.²

Azt mondom, hogy a $\Phi(x)$ (transzcendens vagy raczionális) egész függvény az első typushoz tartozik, ha törzstényezőkre való bontása ilyen:

$$\Phi(x) = e^{-\gamma x} \prod_{v=1}^{\infty} (1 - \gamma_v x), \quad (\gamma \geq 0, \gamma_v \geq 0) \quad (I)$$

Azt mondom, hogy a $\Psi(x)$ egész függvény a második typushoz tartozik, ha törzstényezőkre való bontása ilyen:

$$\Psi(x) = e^{-\gamma x^2 + \delta_1 x} \prod_{v=1}^{\infty} (1 - \delta_v x) e^{\delta_v x}$$

($\gamma \geq 0$; $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_v, \dots$ reális).

Az előbbi 8. §. tételeinek általánosításaképen fennállanak a következő tételek:

Ha $\Phi(x)$ első típusú egész függvény és $k > 0$, akkor $\Phi(x)^{-k}$ MACLAURIN sora egy (\bar{S}) sor, feltéve, hogy $\Phi(x) \neq e^{-rx}$.

¹ SYLVESTER: Mathematical Papers, Vol. II, 516. o. (1908). — GRINDORGE: Nouvelles Annales des Mathématiques, 2^e série, Tome 5, 522. o. (1866).

² V. ö. J. SCHURral közösen írott dolgozatom, Crelles Journal, Bd. 144, 89—113. o. (1914).

és Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte 0 u. 1 cz. dolgozatom, ugyanott, megjelenőben. Utóbbi értekezésben a 9. §. tételeinek egy része (teljesen különböző módszerrel) szintén bizonyítva van.

Ha $\Psi(x)$ egy második típusú egész függvény és $k > 0$, akkor $\Psi(x)^{-k}$ MACLAURIN sora egy (\bar{R}) sor, föltéve, hogy $\Psi(x) \neq e^{\delta x}$.

Csak a második tétel bizonyítására fogok rövidség kedvéért szorítkozni. Tudjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{e^{\delta x}}\right)^k = e^{-\delta k x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(\delta k)^{\nu}}{\nu!} x^{\nu}$$

egy (R) sor. A következő integrál-formula¹

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(x+ct) dt = \\ & = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c^{2\nu}}{2\nu!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2\nu-1}{2^{\nu}} f^{(2\nu)}(x), \end{aligned}$$

ahol $f(x)$ egy tetszőszerinti polinómot jelent, $f(x) \geq 0$; $f(x) \neq 0$, mutatja, hogy a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c^{2\nu}}{2\nu!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2\nu-1}{2^{\nu}} x^{2\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{cx}{2}\right)^{2\nu}$$

sor egy (\bar{R}) sor. Legyen

$$\gamma k = \frac{c^2}{4} \quad (\gamma > 0, k > 0)$$

és nyilvánvaló lesz, hogy

$$\left(\frac{1}{e^{-\gamma x^2}}\right)^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\gamma k x^2)^{\nu}}{\nu!}$$

egy (\bar{R}) sor. Már most

$$\left(\frac{1}{\Psi(x)}\right)^k = \left(\frac{1}{e^{-\gamma x^2}}\right)^k \left(\frac{1}{e^{\delta x}}\right)^k \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\delta_{\nu} x}}{1 - \delta_{\nu} x}\right)^k \quad (18)$$

mint (R) és (\bar{R}) sorok szorzatának határértéke a 6. §. tételei

¹ STRIDSBURG: Sur la démonstration de M. Hilbert du théoreme de Waring, Math. Annalen, Bd. 72 (1912), v. ö. a 148. o.

értelmében szintén egy (R) sor. Bizonyításunk ugrópontja éppen annak a megmutatása, hogy ha

$$\Psi(x) \equiv e^{\delta x},$$

akkor $\Psi(x)$ egyúttal egy (\bar{R}) sor is.

Valóban, ha $\Psi(x) \equiv e^{\delta x}$, akkor a következő két eset közül legalább az egyiknek be kell következnie:

Vagy van $\Psi(x)$ -nek egy gyöke $x = \frac{1}{\delta_1}$, és akkor

$$\Psi(x) = (1 - \delta_1 x) \Psi^*(x), \quad (\delta_1 \neq 0)$$

ahol $\Psi^*(x)$ megint egy második típusú egész függvény.

Vagy az $e^{-\gamma x^2}$ tényező az egységtől különböző, azaz $\gamma > 0$, és akkor

$$\Psi(x) = e^{-\gamma x^2} \Psi^{**}(x),$$

ahol $\Psi^{**}(x)$ megint egy második típusú függvény. Tehát vagy

$$\left(\frac{1}{\Psi(x)} \right)^k = \frac{1}{(1 - \delta_1 x)^k} \left(\frac{1}{\Psi^*(x)} \right)^k,$$

vagy

$$= \left(\frac{1}{e^{-\gamma x^2}} \right)^k \left(\frac{1}{\Psi^{**}(x)} \right)^k.$$

Mindkét esetben az $\left(\frac{1}{\Psi(x)} \right)^k$ MACLAURIN sora egy (R) és egy (\bar{R}) sor szorzata, és következésképpen egy (\bar{R}) sor.

Nem akarok kiterjeszkedni a tétel különféle következményeire, a melyeket abban az esetben, midőn $\Psi(x)$ egy csupa reális gyökkel bíró polinómmá specializálódik, már úgylis jobbadán előszámláltam (v. ö. azonkívül LAGUERRE, i. h. 169—170. o.). Föl akarom vetni azonban a következő kérdést, a melynek megfejtését nehéznek, de érdekesnek tartom.

Ha az $F(x)$ egész függvény recziprokjának sorfejtése

$$\frac{1}{F(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

eleget tesz a (14) alatti egyenlőtlenségeknek, azaz, ha $\frac{1}{F(x)}$ sorfejtése egy (\bar{R}) sor, következik-e abból szükségképen, hogy $F(x)$ egy második típusú egész függvény?

Nekem nem sikerült e kérdést elintéznem, még a mellett a jelentékeny megszorítás mellett sem, hogy $F(x)$ egy polinóm.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 április 27.-én tartott üléséből.)

A PHENANTHRÉN ÚJ KÉTMOLEKULÁS NITROSZÁRMAZÉKAIRÓL.

SZATHMÁRY LÁSZLÓ-tól.

(I. közlemény.)

A phenanthrén-származékokkal újabb időben különös előszeretettel foglalkoznak. Ennek magyarázata abban keresendő, hogy az alkaloidok egy része phenanthrén-származék. Ennélfogva mindazok a tanulmányok, a melyek a phenanthrénra és származékaira vonatkoznak, egyben egy-egy lépést jelentenek az alkaloidok szintézisében is.

A phenanthrén származékai közül kétségtől kizárva a nitroszármazékok azok, a melyek első sorban érdemelnek említést, mert ezekből a vegyületekből a más vegyületekbe való áttérés egyszerű és változatos. A phenanthrén és phenanthrénchinon nitroszármazékait, illetőleg a szakirodalom elég gazdag ugyan, de kimerítőnek egyáltalán nem mondható. Még a mononitro-vegyületek ismerete sem teljes, nem említve a di-, tri-, stb. magasabb nitroszármazékokat, melyek nagy részben szintén ismeretlenek. Ennek magyarázatát a lehetséges izomer esetek nagy számában, továbbá abban a körülményben kell keresni, hogy a phenanthrén nagy hajlandóságot mutat a magasabb, úgynevezett két molekulás nitroszármazékok létesítésére.

A phenanthrén és phenanthrénchinon nitroszármazékaival J. SCHMIDT és munkatársai ¹ foglalkoztak, a kik nem kevesebb,

¹ J. SCHMIDT: Berichte. 1900, 3251 l., 1901, 1461 l., 3531 l., 1902, 3117 l., 3129 l., 1903, 2508 l., 3730 l., 3734 l., 3738 l., 3745 l., 1904, 3556 l., 3558 l., 3567 l., 3571 l., 3573 l., 4402 l., 1905, 3733 l., 3737 l., 1906, 3891 l., 1907, 2454 l., 4240 l., 4560 l., 1908, 3679 l., 3696 l., 4215 l., 1910, 423 l., 787 l., 1802 l., 1911, 276 l., 740 l.

mint 30 tanulmányban tették közre erre vonatkozó megfigyeléseiket. Foglalkoztak még e tárggyal J. MEISENHEIMER,¹ KEHRMANN és MATTHIENSEN.²

A két molekulás vegyületekkel is J. SCHMIDT foglalkozott. Előállította a bismononitrodihydrophenanthrénoxidot, a bismononitrodihydrophenanthrént, a mononitrobisphenanthrént és a dinitrobisphenanthrént. A szakirodalomban mindössze ennyi az, a mit e vegyületekről leírva találunk.

Célom volt keresni a még hiányzó nitroszarmazékokat és tanulmányozni a két molekulás nitrophenanthréneket, miközben sikerült új két molekulás nitrophenanthrént s ennek néhány származékát előállítani. Az alábbiakban e vegyületek előállítását, szerkezetét és tulajdonságait óhajtom közzétenni.

Kísérleti rész.

Lemérünk 100 g. phenanthrént³ és erre kb. 200—300 cm³ benzolt öntünk. A phenanthrén a benzolban részben feloldódik, nagyobb részben azonban csak finomul eloszolva lebeg. A benzolba nitrogénoxid és nitrogéndioxid elegyét hajtottam. E gázelegyet úgy állítottam elő, hogy összevagdalt rézlemezre, alkalmas készülékben, salétromsavat csepegtettem. A reakció, mint ismeretes, az érintkezés pillanatában megindul s ekkor jó-részt nitrogénoxid és kevés nitrogéndioxid keletkezik. A gázt addig hajtottam a benzolba, a míg az összes phenanthrén feloldódott. A reakció azonban ekkor még nincsen befejezve. A gázelegyet lassan, kb. 6—7 órán át hajtottam a benzolba. Már a reakció végen lerakódik az edény falára kristályhalmaz. A benzolos oldatot most legalább 48 órán át nyugodtan állani hagy-

¹ J. MEISENHEIMER : ANN. 355. 249 l.

² KEHRMANN és MATTHIENSEN. Berichte. 35. 345 l.

³ A forgalomban többféle phenanthren van a következő nevek alatt : phenanthren crud., phenanthren dep. dest., phenanthren alk. cryst., phenanthren pur. cryst. (Dr. Th. SCHUCHARDT. Görlitz). Jóllehet kísérleteimet mindegyikkel végeztem, a vegyületek előállítására, tisztaságuknál fogva, e két utóbbi bizonyult legalkalmasabbnak. E két utóbbiban mint szennyezés csak kevés anthracén és carbazol van jelen.

tam. A kiváló rész szaporodik. A kristályhalmazt (I.-gyel jelölöm) szűrőssel a benzoltól elkülönítjük. A benzolt lepárologatjuk s a lombikban visszamaradó részt porcellánacsészébe téve, biztonsági vízfürdőn addig pároljuk, a míg kihűlve, teljesen megszilárdul. Most feldaraboljuk és ætherben oldjuk. A maradék egy része ætherben nem oldódik, ezt szűrőssel az oldószertől elkülönítjük (II.-vel jelölöm). Az ætheres oldatból hosszabb állás után (4—5 nap) kiválik még egy test (III.-mal jelölöm). Az æther lepárolása után visszamarad a negyedik rész (IV.).

I. jelzésű anyag feldolgozása. A szűrőpapíron összegyűlt anyagot előbb alkohollal, majd ætherrel addig mossuk, a míg nagyjából megtisztul. Az így visszamaradó rész mennyisége 3—4 g.-nál nem több.

A szűrőn maradt részt gyengén lugossá tett meleg alkoholban oldjuk és megszűrjük, majd sósavval megsavanyítva vízzel elegyítjük. A leválasztott csapadékot forró vízzel jól kimossuk és tökéletesen megszáritjuk. A megszáradás után kevés piridint öntünk rá. Az anyag egy része ilyenkor visszamarad, a másik feloldódik. E két anyagot egymástól szűrőssel elválasztjuk. Az oldhatlan részt alkohollal jól kimossuk és megszáritjuk. Ezt az anyagot azután nitrobenzoltól kikristályosítjuk. Az égetés a következő eredményt adta:

I. Lemért anyag 0.1202 g., melyből keletkezett:

$$CO_2 = 0.2478 \text{ g.}, H_2O = 0.0299 \text{ g.}$$

II. Lemért anyag: 0.1390 g., melyből keletkezett 20 cm³ nitrogén (751.5 mm 24°C).

Ezen adatokból kaptam:

$$I. \quad C = 56.15\%,$$

$$H = 2.76\%.$$

$$II. \quad N = 16.04\%.$$

Ezzel szemben a dinitrocarbazonból $C_{12}H_7N_3O_4$ (op. 306°) számított százalékos összetétel a következő:

$$C = 56.03\%,$$

$$H = 2.72\%,$$

$$N = 16.34\%.$$

Vagyis az első vegyület, melyet nyertem, nem phenanthrén-, hanem carbazolszármazék, mely tudvalevőleg a phenanthrén mellett mint szennyezés mindig jelen van. Ezt a vegyületet carbazolból valóban sikerült is a fennemlített módon nagyobb mennyiségben előállítani.

A piridines oldatot sósavval megsavanyítottam és vízzel felhígítottam. Ekkor sárga csapadék vált le, mely alkoholban, ætherben jól oldódott. Ezt a terméket benzolból ismételtelen kristályosítottam. Az égetés a következő eredményeket adta:

I. Lemért anyag 0.1036 g. Ebből keletkezett:

$$CO_2 = 0.2850 \text{ g.}, H_2O = 0.0424 \text{ g.}$$

II. Lemért anyag 0.1249 g., melyből keletkezett 7.2 cm^3 nitrogén (764 mm $22.5^\circ \text{C}^\circ$).

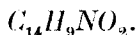
Ezekből az adatokból a szén, hidrogén és nitrogén százaléka:

$$\text{I. } C = 75.00\%,$$

$$H = 4.55\%.$$

$$\text{II. } N = 6.58\%.$$

A százalékos összetételből a következő képlet állítható fel:



Ebből számított százalékos összetétel:

$$C = 75.24\%,$$

$$H = 4.04\%,$$

$$N = 6.23\%.$$

Ez a vegyület nem egyéb, mint egy nitrosoanthron (op. 146°) és azonosnak bizonyult azzal a termékkel, melyet C. LIEBERMANN és L. LINDEMANN¹ állított elő. LIEBERMANN e vegyületet alkáliák segítségével alsalétromsavas anthracénből állította elő s így valószínűnek látszott, hogy a benzolból kivált anyagban is ebben a formában van jelen. És csakugyan, ha a benzolból kivált maradékot nem kálilúgos alkoholban, hanem acetonban oldjuk, akkor ebből alkohol hatására finom fehér lemezeké válnak ki. Ismételt

¹ C. LIEBERMANN és L. LINDEMANN: Berichte. 1900, 3251 l.

kristályosítással (aceton) egy 195°-on olvadó terméket kaptam, melynek elemzési adatai ezek:

I. Lemért anyag 0.1248 g. Ebből keletkezett:

$$CO_2 = 0.2861 \text{ g.}, H_2O = 0.0492 \text{ g.}$$

II. Lemért anyag 0.1090 g., keletkezett belőle 10.5 cm³ nitrogén (752 mm 22.5°C).

A számított %:

$$C = 62.50\%,$$

$$H = 4.38\%,$$

$$N = 10.92\%.$$

A $C_{14}H_{10}N_2O_4$ képletből számítva kapjuk:

$$C = 62.22\%,$$

$$H = 3.70\%,$$

$$N = 10.37\%.$$

A vegyület tehát csakugyan a LIEBERMANN-féle alsalétromsavas anthracénnal azonos. E vegyületeket a jelzett módon ellenőrzés végett anthracénből is előállítottam.

A benzolból kivált anyag tehát nem phenanthrén-származék. Ezt különösen kívánom hangsúlyozni, mert J. SCHMIDT egészen más megfigyeléseket tett. Ő a phenanthrén benzolos oldatát tiszta (salétromsavból és arsénsavból előállított) nitrogéndioxiddal telítette. A kivált test nála bismononitrohydrophenanthrénoxid volt. E vegyület előállítása az általam jelzett úton sohasem sikerült. Azonban, ha a gáz-elegyben a nitrogénoxidot oxigénnel előbb átalakítottam nitrogéndioxiddá, akkor bismononitrodihydrophenanthrént kaptam. Meg kell állapítanom tehát, hogy az én módszeremmel a benzolos oldatból két molekulás phenanthrén-származék nem válik ki.

II. *jelzésű anyag felolgozása.* Ennek az anyagnak mennyisége 5—8 g. között változott. Mindenekelőtt híg kálilúgos alkohollal, majd kissé sósavas alkohollal, végül ætherrel mostam. Az így megtisztított terméket forró toluolban kifőztem, majd

¹ J. SCHMIDT: Berichte. 1900, 3251 l.

szűrtem, mikor is a szüredékben finom tüalakú kristályok váltak ki. A kristályok (op. 285°) anthrachinonnak bizonyultak. A toluolban nem oldható rész a szűrőpapíron marad, melyet forró toluollal néhányszor utána mostam, miáltal az összes anthrachinont eltávolítottam. A szűrőn kb. 1—2 g. anyag marad vissza, a mely új két molekulás phenanthrén-származék.

III. jelzésű termék feldolgozása. Az ætheres oldatból hosszabb idő múlva finom üledék válik ki, erősen az edény falára tapadva. Ezt összegyűjtve, alkohollal mostam. Az anyag vagy a most leírandó két molekulás phenanthrén-származék, vagy anthrachinon; de ezek mellett keletkezik még egy termék, mely acetonban jól oldódik. Ha ezen acetonos oldathoz nátronlúgot öntünk, és az anyag elég tiszta, szép ibolyaszíneződés áll elő (Birtó-féle nitroreakció).¹ A jelen esetben tehát egy nitroszármazék is keletkezik még, de oly csekély mennyiségben, hogy felismerése nem volt lehetséges.

IV. jelzésű termék feldolgozása. Az ætheres oldatból desztillálással eltávolítottam az æthert. Az edény alján nyúlós anyag marad vissza, a mely főleg 4-nitrophenanthrénnak bizonyult.

Megjegyzem, hogy én mindig a Th. Schuchardt-féle phenanthren alk. cryst. jelzésű készítménynyel dolgoztam. Azért használtam ezt, mert a tiszta termékek közül aránylag ez a legolcsóbb. Dolgoztam phenanthren pur. cryst.-mal is; a leválasztás itt is változatlan maradt azzal a különbséggel, hogy ez esetben csak kis mennyiségű melléktermék keletkezik az új két molekulás phenanthrén-származék mellett.

Bisdinitrophenanthrénnitrit.

Mint az előállításnál említettem, ez a vegyület a II. jelzésű termékekben található. Néha előfordul kis mennyiségben a III. jelzésűben is. Felismerése a Birtó-féle reakcióval felette könnyű. Az egyes alkalommal keletkező mennyiség aránylag kevés.

Jól vezetve a nitrálást, 100 g. phenanthrénből 1—2 g. bisdinitrophenanthrénnitrit keletkezik. Bár sokféle módot megkísé-

¹ BIRTÓ: Ann. 269, 377.

reltem a kihasználás kedvezőbbé tevésére, ez csak egyetlenegy esetben sikerült, a mikor kb. 5 g. keletkezett. Ámde ugyanazzal az eljárással ezt az eredményt még egyszer elérni nem sikerült.

A vegyület megtisztítása nagyon is körülményes. Az anthrachinontól elválasztani úgy, hogy a bisdinitrophenanthrénnitritben veszteség ne álljon elő, rendkívül nehéz. Én a következő módszert használtam. Az anthrachinontól toluollal már megtisztított bisdinitrophenanthrénnitritet forró nitrobenzolban oldottam, melyből az új vegyület a még jelen levő anthrachinonnal együtt szép, nagy lemezek alakjában vált ki. A kikristályosodott terméket leszűrtem s előbb alkohollal, majd ætherrel szárítottam. Azután forró toluollal addig mostam, míg az összes anthrachinont eltávolítottam. Ennek megállapítását úgy végeztem, hogy kis próbára tömény kénsavat üntöttem. Ha sárga színeződés nem következett be, a termék anthrachinontól mentes volt. Az anthrachinon ugyanis tömény kénsav hatására azonnal jellemző sárga színeződést vesz fel, míg a bisdinitrophenanthrénnitrit változatlan marad s csak hosszú állás után oldódik benne fel halvány szalmasárga színnel. A nitrobenzoliból még egyszer átkristályosított vegyület elemzési adatai a következők:

I. Lemért anyag 0.1214 g., ebből keletkezett

$$CO_2 = 0.2577 \text{ g.}, \quad H_2O = 0.0296 \text{ g.}$$

II. Lemért anyag 0.1511 g., keletkezett belőle

$$CO_2 = 0.3175 \text{ g.}, \quad H_2O = 0.0338 \text{ g.}$$

III. Lemért anyag 0.1067 g., keletkezett belőle

$$CO_2 = 0.2246 \text{ g.}, \quad H_2O = 0.0242 \text{ g.}$$

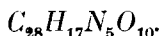
IV. Lemért anyag 0.1205 g.; kaptam belőle 12.4 cm^3 nitrogént ($765.5 \text{ mm } 24^\circ\text{C}$).

V. Lemért anyag 0.1249 g.; kaptam belőle 12.8 cm^3 nitrogént ($764.5 \text{ mm } 19.5^\circ\text{C}$).

Az elemzés adataiból a százalékos összetétel:

| I. | II. | III. | IV. | V. |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| C = 57.82 | 57.30 | 57.40 | — | — |
| H = 2.70 | 2.81 | 2.52 | — | — |
| N = — | — | — | 11.69 | 11.70 |

Ennek alapján a vegyület képlete volna:



A megállapított képletből számított százalékos összetétel:

$$C = 57.63\%,$$

$$H = 2.91\%,$$

$$N = 12.05\%.$$

A bisdinitrophenanthrénnitrit sárga lemezekben kristályosodik. Vizben, alkoholban, ætherben, benzolban, toluolban, ecetsavban oldhatatlan. Legjobban oldódik forró nitrobenzolban. Könnyen és változás nélkül szublimál (op. 320–325 C°). Ha acetónba hintünk néhány kristályszermet s erre kalilúgot öntünk, jól összerázzuk, előbb semmiféle szineződést sem tapasztalunk, azonban néhány perc leforgása után az acetón sötétzöld szineződést vesz fel. A szineződés e vegyületre nagyon jellemző. Alkoholos kalilúg hidegen nem támadja meg, forralva azonban hosszabb-rövidebb idő alatt zöldes színű lesz. Az oldatból sósavval ismét kiválasztható. Hydrosulfittal és kalilúggal előbb sötét karminpiros lesz, mely szín forralásra eltűnik.

Bisdinitrophenanthrénnitrit-phenylhydrazon.

Lemérünk 1 g. bisdinitrophenanthrénnitritet és 20–30 cm³ jégecetben jól eldörzsöljük. Az elegyhez most 10 g. phenylhydrazint téve, vízfürdön 3–4 órán át melegítjük. A sárga kristály csakhamar vérvörös színűvé válik s nagy mennyiségű nitrogén szabadul fel. A reakció befejezése után a csapadékot megsűrjük s alkohollal, ætherrel kimossuk. Megszáradás után nitrobenzoból kristályosítottam ki.

Az elemzés adatai a következők:

I. Lemért anyag 0.1273 g.; keletkezett belőle

$$CO_2 = 0.2997 \text{ g.}, \quad H_2O = 0.0426 \text{ g.}$$

II. Lemért anyag 0.1321 g.; keletkezett belőle

$$CO_2 = 0.3092 \text{ g.}, \quad H_2O = 0.0415 \text{ g.}$$

III. Lemért anyag 0·1369 g.; kaptam belőle 18·5 cm³ nitrogént (740 mm 20·5°C).

Ezekből az adatokból a következő százalékos összetétel adódott ki:

| I. | II. | III. |
|---------------|-----------|-----------|
| $C = 64·02\%$ | $63·81\%$ | — |
| $H = 3·71\%$ | $3·48\%$ | — |
| $N = —$ | — | $15·07\%$ |

A százalékos összetételből a következő képlet állítható fel:



E képletből számított százalékos összetétel:

$$\begin{aligned} C &= 64·17\%, \\ H &= 3·74\%, \\ N &= 14·97\%. \end{aligned}$$

A kristályok sötétvörös tűalakú kristályok (op. 288—290 C°). Az anyag ezen hőfokon az olvadás mellett bomlik is. Tömény kénsavban ibolya színnel oldódik, ez a szín azonban, ha 1 csepp salétromsavat cseppentünk bele, eltűnik. A Brtró-féle reakziós terméket ibolya színnel adja. Alkoholos kalilúg is ibolya színnel oldja. Oldhatatlan alkoholban, eczetsavban, toluolban, benzolban. Aetherben csak kis mértékben oldható. Forró nitrobenzolban jól oldódik.

Bisdiamidodiazobenzolnitrosophenanthrén.

Egészen más terméket kapunk phenylhydrazinnal akkor, ha jégezetet, mely mint vízelvonó szerepel, nem alkalmazunk.

A termék előállítása következőleg történik:

Lemerünk 2 g. bisdinitrophenanthrénnitritet és erre 15 g. phenylhydrazint öntünk. Az anyagot azután vízfürdőn melegítjük 3—4 órán át. Ez alkalommal is nitrogén fejlődik, az anyag pedig hamarosan feloldódik. A reakció befejezése után az oldatot eczetsavval megsavanyítottam, mikor is az vöröses ibolyaszínű zödést vett fel. Most vízzel felhígítottam, mire szivacszerű anyag vált ki. Ezt leszűrtem és forró vízzel jól kimostam. Az eczetsavas phenylhydrazint ily módon tökéletesen eltávolítottam.

Azután levegőn a szűrőpapirossal együtt megszáritottam. A megszáradt anyagra ezután æthert öntöttem, melyben ez a vegyület kitünően oldódik. Az ætheres oldatból a vegyületet petroleum-ætherrel csaptam le. A csapadék finom barnavörös por. Vákuumban megszáritva, előkészítettem az elemzésre, mely két okból kényes. Először, mert könnyen meglágyul, ha a hőfok emelkedik s ezzel lényegesen megváltozik; másodsor, mert a petroleumæther tökéletes elűzése alig lehetséges. Ez a körülmény az elemzési adatokban is kifejezésre jutott.

Az elemzés adatai ezek:

I. Lemért anyag 0·1152 g.; keletkezett belőle

$$CO_2 = 0·3160 \text{ g.}, \quad H_2O = 0·0615 \text{ g.}$$

II. Lemért anyag 0·1279 g.; keletkezett belőle

$$CO_2 = 0·3500 \text{ g.}, \quad H_2O = 0·0559 \text{ g.}$$

III. Lemért anyag 0·1051 g.; keletkezett belőle 16·6 cm³ nitrogén (759 mm 23°C).

Ebből számítva kapjuk, hogy van a vegyületben

| I. | II. | III. |
|-------------|---------|---------|
| C = 74·73 % | 74·58 % | — |
| H = 5·93 % | 4·85 % | — |
| N = — | — | 17·89 % |

Ezzel szemben a $C_{34}H_{29}N_7O$ képletből számított százalékos összetétel a következő:

$$\begin{aligned} C &= 74·05 \%, \\ H &= 5·26 \%, \\ N &= 17·78 \%. \end{aligned}$$

A vegyület barnavörös színű. Aránylag alacsony hőfokon (60—70 C°) meglágyul és bomlik. Voltaképpen olvadáspontja 122—123 C°-on van, de már jóval előtte megfeketedik. Megolvadás után más reakciói vannak. A Brtró-féle reakciót előbb sárga, később olivazöld színnel adja. Tömény kénsav sötét narancsvörös színnel oldja, mely szín melegítésre eltűnik. Jégecet vörös árnyalatú ibolya színnel oldja. Kalilugos alkohol zöld színnel oldja. Alkohol, æther, benzol, toluol nagyon jól oldja.

Diazotálható. A diazotálás után az összetevőkkel könnyen kapcsolódik és nagyobbára piszkos barna vagy piszkos vörös árnyalatú festékeket létesít. Én a következő összetevőkkel kísérleteztem :

1. Resorcin. A keletkező festék sötét piros színű. Nem tiszta árnyalatú.

2. β -naphtilamindisulfosav (2 : 3 : 6) (amido-/I-sav). Ezzel piszkos, barna színű festék létesül.

3. β -naphtolsulfosav (2 : 6) (SCHÄFFER-só). Piszkos, vörös árnyalatú barna festék létesül.

4. Salicylsavval barna festéket kaptam.

5. β -naphtoldisulfosav (2 : 3 : 6) (I-só). Barna festéket kaptam.

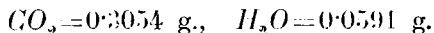
Megállapítottam, hogy a bisdiamidodiazobenzol nitrosophenanthrén mint festék jelentéktelen.

Bisdiamidoamidooxyphenanthrén.

Lemérünk 2 g. bisdinitrophenanthrénnitritet és hozzá 10 cm³ tiszta lúgos (1% KHO , 1% hydrosulfit) hydrosulfitot öntünk. Melegítjük. A termék csakhamar sötét meggypiros színeződésű lesz, mely rövid idő múlva narancsvörös színbe megy át. A reakció ekkor be is van fejezve, de óvatosságból a melegítést még vagy fél óráig folytatjuk. Az elpárolgó vizet közben pótoljuk. Kihülés után sósavval megsavanyítjuk, mikor is kén válik ki. A ként forralással tömörítjük s a folyadéktól elkülönítjük. Az oldatot ezután szárazságig elpárologtatjuk s a bisdiamidoamidooxyphenanthrént a kaliumchloridtól alkohollal kioldjuk. Az alkoholos oldatot ammoniával lúgossá teszszük és vízzel felhígítjuk. A bisdiamidoamidooxyphenanthrén ekkor kiválik. A leválasztott csapadékot sok forró vízben oldottam, a melyből kihülés után finom tűalakú kristályok válnak ki. Tisztább készítmény előállítása végett e műveletet megismételtem.

Az elemzés eredményei:

I. Lemért anyag 0.1113 g. Ebből keletkezett :



II. Lemért anyag 0.1176 g. Ebből keletkezett 5.4 cm³ nitrogén (759.5 mm 24°C).

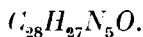
Ezen adatokból kiszámított százalék:

$$C=74.66\%,$$

$$H=5.90\%,$$

$$N=15.52\%.$$

E százalékos összetételből a következő képlet állapítható meg:



Ebből a százalékos összetétel a következő:

$$C=74.83\%,$$

$$H=6.01\%,$$

$$N=15.59\%.$$

A vegyület narancsvörös, túalakú kristályokat alkot. Hideg vízben nehezen, forró vízben könnyebben oldódik. Olvadáspontja 243 C°. Alkohol, æther, benzol oldja. Savakban könnyen oldódik.

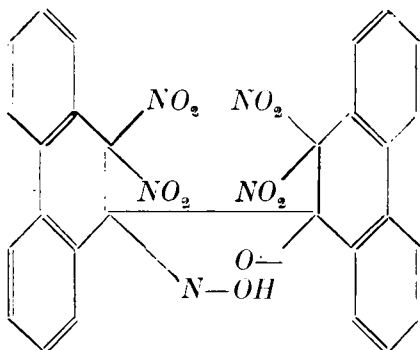
Oldata diazotálható. Az összetevőkkel lúgos közegben jól kapcsolódik és festék keletkezik. Mint festék e származékok sem értékesek.

1. Salicylsav. Élénk piros festéket létesít.
2. Resorcinnal barna festéket kaptam.
3. β -naphtolsulfosav (2:6) SCHÄFFER-féle só. Piszkos, vörös festéket létesít.
4. β -naphtylamindisulfosav (2:3:6) (Amido-*R*-sav). Piszkos vörös festéket létesít.

A vegyületek szerkezete.

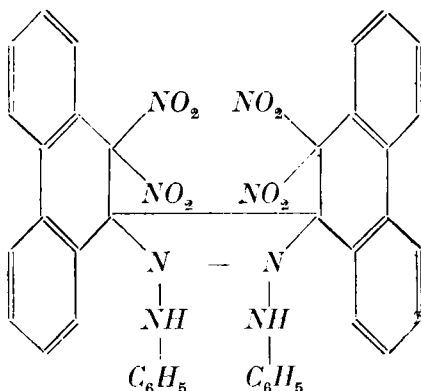
A jelen esetben két molekulás vegyülettel van dolgunk. Ez az elemzés adataiból kétségtelenül megállapítható. Molekulasúly-meghatározást forráspont-emelkedéssel a vegyület egyedüli oldószerében, a forró nitrobenzolban megkíséreltem, azonban eredmény nélkül, mert a vegyület disszociál. A Birró-féle színreakció egyrészt, a phenylhydrazinnal való viselkedés másrészt

(a nitrogyökök ugyanis a phenylhydrazinnal szabályszerűen amidogyökökké alakulnak) kétségkívül igazolja, hogy nitro-vegyületekről van szó. Az, hogy az eczetsavas phenylhydrazin jól jellemezhető phenylhydrazon származékot ad, egyben bizonyítja az $-N\overset{O}{\underset{OH}{\parallel}}$ csoport jelenlétét a molekulában. Viszont az is valószínű, hogy az $-N\overset{O}{\underset{OH}{\parallel}}$ csoportban az $-N\overset{O}{\underset{OH}{\parallel}}$ nagy szerepet visz. Ennek a nitrosogyöknek jelenlétét igazolja egyfelől a phenylhydrazinnak hatása, mikor eczetsav nélkül lép reakcióba a nitrosogyökkel, másfelől az a körülmény, hogy alkoholos kalilúggal hosszabb ideig főzve, a keletkező KNO_2 jelenléte mindig kimutatható. Ennélfogva az első vegyület szerkezetét így foghatjuk fel:



E vegyület a bisdinitrophenanthrénnitrit.

A phenylhydrazin eczetsav jelenlétében szabályszerűleg hat az $-N\overset{O}{\underset{OH}{\parallel}}$ csoportra. A vegyület szerkezete tehát



E vegyület a bisdinitrophenanthrénphenylhydrazon.

Az, hogy a nitrosoportok e vegyületben változatlanul vannak jelen, a Bittó-féle reakzióból következik; és következik abból, hogy e vegyület salétromsavval főzve, visszaalakul a kiindulási anyaggá. Ezt bizonyítom az alábbi elemzés adataival:

I. Lemért anyag 0·1281 g. Ebből keletkezett:

$$CO_2 = 0·2720 \text{ g.}, \quad H_2O = 0·0300 \text{ g.}$$

Ebből számítva lesz:

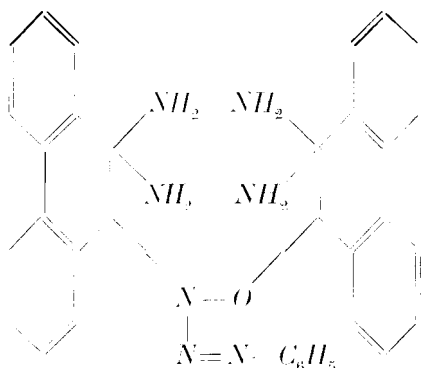
$$C = 57·88\%,$$

$$H = 2·59\%.$$

Az értékek megegyeznek a kiindulási anyag százalékos összetételével. A bisdinitrophenanthrénphenylhydrazon jól kristályosodó vegyület s így megkísértem a molekulasúly meghatározását a nitrobenzolos oldat forráspont-emelkedésével. Azonban a disszociáció folytán hőfokemelkedés itt sem volt észlelhető.

Ha a nitrosovegyületekre phenylhydrazin ecetsav nélkül hat, mint ismeretes, nagyon bonyolult összetételű, rendszeren diazokötésű vegyületek keletkeznek.¹

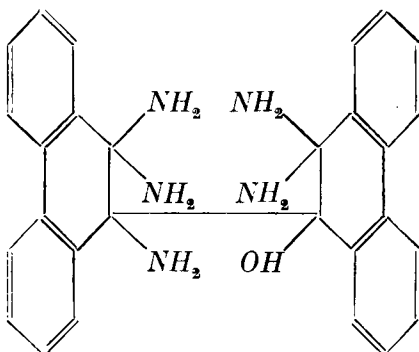
Ilyen összetételű vegyület keletkezik a jelen esetben is.



¹ R. CLAUSER: Berichte. 1911, 889 l. — FISCHER és WACKER: Berichte. 21, 2609 l. — R. WALTER: Jour f. prak. chem. 52, 141. — E. BAMBERGER: Berichte. 29, 103. — MILS: Berichte. 28. 982. — ZIGLER: Berichte. 21. 864.

Ez a vegyület a bisdiamidodiazobenzolnitrosophenanthrén. A vegyületben az amidogyök jelenlétét az elemzésen kívül a diazotalthatóság bizonyítja. A nitrosogyök jelenlétét a Brtró-féle színreakcióval igazoltam.

Végül az utolsó vegyület szerkezetét következőleg foghatjuk fel.



A vegyület bisdiamidooamidoxyphenanthrén. Ez a vegyület is bizonyítja, hogy benne két molekulás kapcsolódás van, mert az $-N-\overset{O}{\underset{OH}{\parallel}}$ gyök a redukálás folytán NH_2 és OH -gyökké változik az átkapcsoló megszakadása nélkül.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 május 18.-án tartott üléséből.)

NÉHÁNY ÚJ NAPHTYLPYRAZOLON SYNTHESISÉRŐL.¹

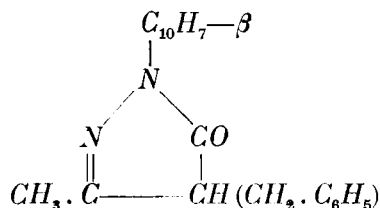
KONEK FRIGYES és MITTERHAUSER RIKÁRD-tól.

Bevezetésül.

A phenylpyrazol-származékoknak 1883-ban történt első synthesise óta (Ber. 16, 2597) az organikus chemia legmegműveltebb területének egyikéhez jutottunk. Közelfekvő gondolat lett volna a megfelelő naphtyl-származékok synthesise is, de KNORR-on, a pyrazolvegyületek atyján kívül, a ki az α - és β -naphtyl-3-methyl-5-pyrazolonokat állította elő (Naphtooxymethylechinizin), csak H. FRANZEN (Journ. f. pr. Ch. 1907, 16) állított elő egy általa 2, 3-naphtylendi-3-phenylpyrazolonnak nevezett vegyületet.

Alábbiakban néhány új naphtylpyrazolon synthesisét közöljük.

1- β -naphtyl-3-methyl-4-benzyl-5-pyrazolon.



Előállításá czéljából 22 gramm benzylaceteczetestert 16 gr. β -naphtylhydrazinnal elkeverve paraffinfürdőben 30 perczig 130—135°-ra melegítünk. A reactio befejezését a pezsgés meg-

¹ Közlemény a budapesti egyetem III. sz. vegytani intézetéből.

szünzte jelzi. Ezután az olvadékot ætherbe öntjük (KNORR: Ber. 16, 2597), a mikor is a piszkos-szürke por válik le. Ezt a tisztátlan pyrazolon^t most fölös hig nátronlúgban feloldjuk és a leszűrt oldatot 10 %-os salétromsavval túltelítjük, a mikor is a termék túrós, gyengén rózsaszínű csapadék alakjában válik ki. Átkristályosítás ecéljából alkoholban oldjuk és az oldatot lassú párolgásnak vetjük alá.

Apró, gyengén sárgás tűk, olvadáspontjuk 153°C . A termék vízben és ætherben oldhatatlan, alkoholban, benzolban jól oldódik.

Elemzés.

0.2289 gr. anyag adott 0.1215 gr. vizet és 0.6720 gr. szén-dioxidot; 0.1021 gr. anyag adott 7.9 cm^3 nitrogéngázt 18°C -on és 764 mm barometer-állás mellett. A $\text{C}_{21}\text{H}_{18}\text{ON}_2$ képletnek megfelelő számított értékek:

$$\text{C}=80.25\%, \quad \text{H}=5.73\%, \quad \text{N}=8.92\%;$$

talált értékek:

$$\text{C}=80.05\%, \quad \text{H}=5.93\%, \quad \text{N}=9.02\%.$$

A termék savakban nem oldódik; kénsav ugyan némiképp oldja, de anyagváltozás kíséretében. Sóit ez okból nem lehetett készíteni. Ez a gyengült bázikus jellem valószínűleg a naphtyl-gyök belépésétől ered.

Egy molekula pikrinsavval alkoholos oldatban gyönyörűen kristályosodó kettős só ad. Leválasztásakor ajánlatos hig oldatokból kiindulni, különben elemzésre alkalmatlan, tisztátalan anyagot kapunk. Kanárisárga, nemezszerűen összeálló tűk.

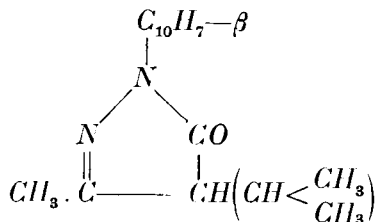
Elemzés.

0.1018 gr. anyag adott 11.5 cm^3 nitrogéngázt 22°C -on és 769 mm barometer-állás mellett. A $(\text{C}_{21}\text{H}_{18}\text{ON}_2)(\text{C}_6\text{H}_3\text{O}_7\text{N}_3)$ képletnek megfelelő számított érték:

$$\text{N}=12.89\%;$$

talált érték:

$$\text{N}=13.03\%.$$

1- β -naphtyl-3-methyl-4-isopropyl-5-pyrazolon.

Az ömlesztés lefolyása analog az előbbivel. 33 gr. isopropyl-acetylcettestert és 30 gr. β -naphtylhydrazint péppé keverünk és paraffinfürdőben fél óráig 135—140°-ra melegítjük. A pezsgés megszűntével az olvadékot, mint már az előbbi anyagnál leirtuk, először ætherrel tisztítjuk, azután a nyers pyrazolont nátronlúgból átoldjuk, végül a kapott terméket methyl- vagy æthylalkoholból átkristályosítjuk.

Apró sárgás tűk; jól oldódnak alkoholban és benzolban; ætherben és vízben oldhatatlanok. Olvadáspontjuk 160° C.

Elemzés.

0.2010 gr. anyag adott 0.1251 gr. vizet és 0.5652 gr. széndioxidot; 0.0959 gr. anyag adott 8.9 cm³ nitrogéngázt 20°C-on és 754 mm barometer-állás mellett. A $C_{17}H_{18}ON_2$ képletnek megfelelő számított értékek:

$$C=76.70\%, \quad H=6.77\%, \quad N=10.53\%;$$

talált értékek:

$$C=76.51\%, \quad H=6.69\%, \quad N=10.83\%.$$

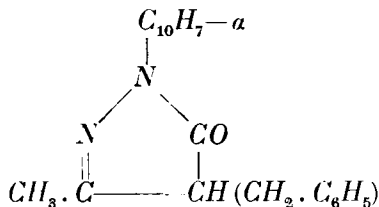
A natrium-, réz-, kobalt- és ezüstsók épúgy állíthatók elő, mint a benzylvegyületnél. Úgyszintén híg alkoholos oldatban pikrinsavval kristályos monopikratot ad (tűk). A Dumas-féle nitrogén-meghatározáskor 0.0858 gr. adott 10.3 cm³ nitrogéngázt 23°C és 770 mm barometerállás mellett.

A $(C_{17}H_{18}ON_2)$ $(C_6H_3O_7N_3)$ képletnek megfelelő számított érték:

$$N=14.04\%;$$

talált érték:

$$N=13.85\%.$$

1- α -naphtyl-3-methyl-4-benzyl-5-pyrazolon.

E vegyület előállításakor feltétlenül teljesen tiszta α -naphtyl-hydrazinból kell kiindulnunk, mert tisztátlan termék használata esetén az ætherből leváló nyers anyag nátronlúgos oldata savakkal túltelítve heves pezsgés közben elbomlik és szilárd, izolálható terméket nem kapunk, vagy ha kapunk is, ez kevés és kristályosítani nem sikerül. Azonkívül ez α -pyrazolonok előállításakor a túlhevítést is épügy kerülnünk kell, mint a reactio befejeztén túl való hevítést. Az ömlesztés hőfoka azonban valamivel magasabb lehet, mint a megfelelő β -naphtylpyrazolonoknál, 155—160°C (β : 130—135°C).

A reactiót a második negyedórában ötpercenként olyképp kell ellenőrizni, hogy az olvadékból egy próbát ætherrel eldörzsölünk; ha ekkor már elegendő szilárd anyagot kapunk, az ömlesztést befejezzük. További hevítéskor ugyanis a nyerhető anyag mennyisége ismét csökken.

Ha ezeket a feltételeket szem előtt tartjuk, akkor 28 gr. kristályos hydrazinból és 38 gr. esterből nyerhetünk 50 gr. nyers-terméket.

Ezt nátronlúgból átoldjuk; ajánlatos a nátriumsó oldatát csontszénnel megtisztítani és csak e tisztítás után lecsapni az anyagot.

Minden óvatosság dacára azonban az α -naphtylpyrazolonokat nem sikerül oly tiszta állapotban leválasztani NaOH -ból, mint a β -vegyületeket. E körülmény annak tudandó be, hogy az α -naphtylvegyület oxidabilis jellegét a pyrazolonra is átviszi, a miről a továbbiakban bővebben fogunk megemlékezni.

A nátronlúgból levált anyagot alkoholból átkristályosítva, apró, gyengén sárgás árnyalatú kristályrozzettákat kapunk. Olvadás-

pontjuk 168°C . Oldhatósági viszonyaikban analogonja a korrespondeáló β -naphtylvegyületnek.

Elemzés.

0.0617 gr. anyag adott 0.0330 gr. vizet és 0.1811 gr. széndioxidot; 0.0984 gr. anyag adott 7.9 cm^3 nitrogéngázt 21°C -on és 752 mm barometerállás mellett.

A $\text{C}_{21}\text{H}_{18}\text{ON}_3$ képletnek megfelelő számított értékek:

$$\text{C}=80.25\%, \quad \text{H}=5.73\%, \quad \text{N}=8.92\%;$$

talált értékek:

$$\text{C}=80.05, \quad \text{H}=5.94\%, \quad \text{N}=9.10\%,$$

Az anyag alkoholos oldata alkoholos pikrinsavval lassú párologáskor szép tűkből álló kanarisárga pikratot ad, mely æther kivételével az összes organikus oldószerekben jól oldódik.

A nitrogén meghatározásakor 0.0839 gr. anyag adott 9.5 cm^3 nitrogéngázt 22°C -on és 768 mm barometerállás mellett.

A $(\text{C}_{21}\text{H}_{13}\text{ON}_2)$ $(\text{C}_6\text{H}_3\text{O}_7\text{N}_3)$ képletnek megfelelő számított érték:

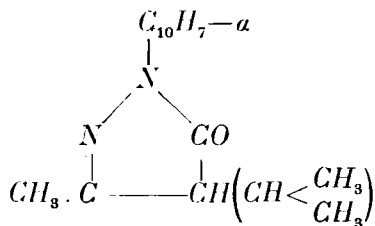
$$\text{N}=12.89\%;$$

talált érték:

$$\text{N}=13.06\%.$$

Fémsókat a vegyület épügy alkot, mint az előbbiek.

1- α naphtyl-3-methyl-4-isopropyl-5-pyrazolon.



E vegyület fenti szerkezetét csak az előbbiek analogiájára adhatjuk meg, mert tisztatlanságaitól nem sikerült azt egészen megszabadítani és így nem volt elemezhető. Mivel azonban épen

e vegyületen tapasztalhatjuk az α -naphtylpyrazolonokra jellemző oxydabilitást a legnagyobb mértékben, néhány szóval megemlékezünk róla.

Az ömlesztéskor az ætherpróbák, dacára a legtisztább kiindulási anyagoknak, közel negativok maradtak és az olvadék maradék nélkül oldódott ætherben. Hosszabb (2—3 órai) állás után aránylag kevés piszkos, feketésbarna anyag válik le. Meny nyisége legjobb esetben a felhasznált hydrazin fele. A termék nátronlúgból átoldva barnás csapadékot szolgáltat, melynek átkristályosításakor a methylalkoholos oldatból kásaszerűen válik le. Újból nátronlúgból átoldva a kapott csapadék már sötétbarna.

A vegyület oxydabili svolta a tisztátlanul leváló pikrat alakjában is nyilvánul. a mennyiben az az alkoholos anyalúg alatt állva két napon belül elgyantásodik. A megfelelő β -vegyület pikratja ellenben hasonló körülmények közt szép sárga és változatlan marad.

Benzoyl-származékok.

Az 5- és 3-phenylpyrazolonok nátriumsói benzoylchloriddal vizes oldatban elegyítve jól kristályosodó (*O*)-benzolátokat létesítenek, melyekben a pyrazolon az enolformula értelmében reagál.

$$C_{21}H_{17}N_2ONa + Cl \cdot OC \cdot C_6H_5 = C_{21}H_{17}N_2O \cdot OC \cdot C_6H_5 + NaCl.$$

A β -naphtylpyrazolonok benzoylchloriddal teljesen analog módon reagálnak.

Egy ily terméket, az 1- β -naphtyl-3-methyl-4-benzyl-5-pyrazolonnak, mint tertiar alkoholnak (oxypyrazolnak) benzoëesterét úgy állítottuk elő, hogy 3 gr. pyrazolont 1·5 gr. *NaOH*-nak vizes oldatában feloldottunk és a meleg oldathoz 4 gr. benzoylchloridot adtunk. Az oldatból a benzoylat eleinte olajosan válik ki, majd rövid idei rázás után megszilárdul és leszűrés után alkoholból átkristályosítható. Apró, sárga tűk; alkoholban, ætherben, benzolban stb. jól oldódik.

A nitrogén meghatározásakor 0·1880 gr. anyag adott 11·3 cm³ nitrogéngázt (21°C, 751 mm bar).

A $C_{28}H_{22}N_2O_2$ képletnek megfelelő számított érték:

$$N = 6.69\% ;$$

talált érték:

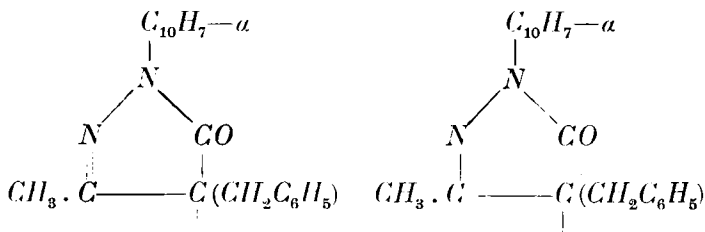
$$N = 6.89\% .$$

A megfelelő α -naphtyl-vegyületek benzoylálva nyúlós, hűtőkeverékben sem szilárduló, nem kristályosodó anyagot adnak.

Az 1- α -naphtyl-3-methyl-4-benzyl-5-pyrazolon viselkedése salétromossavval szemben.

2 gr. pyrazolont 50 cm³ alkoholban feloldunk és az oldatban 3 gr. szilárd $NaNO_2$ -t suspendálva cseppenként koncentrált HCl -t adunk hozzá.

Erős pezsgés közben a salétromossav egy része eltávozik (miért is fölös $NaNO_2$ veendő) és a két molekula oxydatiós condensatiójának eredményeképp szilárd, barnaszínű bisvegyület válik le:



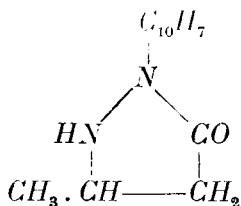
Ez alkoholból átkristályosítható. Olvadáspontja 215°C. Aetherben oldhatatlan, alkoholban, benzolban stb. eléggé nehezen oldódik. Nitrogénmeghatározáskor 0.1710 gr. anyag adott 12.4 cm³ nitrogéngázt (22°C, 762 mm bar).

A $C_{42}H_{34}O_2N_4$ képletnek megfelelő számított érték:

$$8.35\% \text{ } N ;$$

talált érték:

$$8.20\% \text{ } N .$$

1- β -naphtyl-3-methyl-5-pyrazolidon.

Előállítására céljából 26 gr. β -naphtylhydrazint 14 gr. szilárd crotonsavval paraffinfürdőben összeolvasztunk, ügyelve arra, hogy a fürdő hőfoka a 135°C -on túl ne menjen.

A heves pezsgés megszűntével az olvadékot alkoholban oldjuk és csontszénnel felforraljuk. A leszűrt oldatból a pyrazolidon apró, zömök, barna kristályokban válik ki, melyek ismételt átkristályosítással tisztíthatók. Olvadáspontjuk tiszta állapotban 107°C .

Elemzés.

0.1710 gr. adott 0.0982 gr. vizet és 0.4651 gr. széndioxidot; 0.2304 gr. anyag adott 25.3 cm^3 nitrogéngázt (21°C , 748 mm. bar.)

A $C_{14}H_{14}N_2O$ képletnek megfelelő számított értékek:

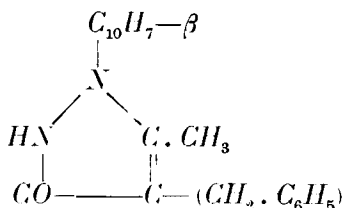
$$C=74.34\%, \quad H=6.19\%, \quad N=12.39\% ;$$

talált értékek:

$$C=74.20\%, \quad H=6.42\%, \quad N=12.57\% .$$

A vegyület jól oldódik alkoholban, ætherben, benzolban. Vízben és lúgokban oldhatatlan, ellenben koncentrált sósavval forralva nehezen bár, de teljesen oldatba megy és az oldatból lúggal vagy ammoniával kicsapható.

KNORR-DUDEN előírását követve (Ber. 25, 762) megkíséreltük ferrichloriddal alkoholos oldatban 1- β -naphtyl 3-methyl-5-pyrazolonná oxydálni; ez azonban csak részben sikerül és nem megy oly simán, mint a megfelelő phenylpyrazolonoknál.

1- β -naphthyl-4-benzyl-5-methyl-3-pyrazolon.

10 gr. β -acetyl-naphthylhydrazint 11 gr. benzylacetylacet-esterrel elkeverünk és három részletben 7 gr. phosphortrichloridot adunk hozzá (MICHAELIS-MAYER módszere, Ann. 338, 273). A tömeg felmelegszik, higfolyós lesz és nagymennyiségű sósavgáz távozik; ennek utolsó részleteit vízfürdön való hevítéssel távolítjuk el.

Az olvadék tisztítása ammoniában való oldással (MICHAELIS-MAYER) nem sikerült, de az ammoniával való digerálás igen előnyösnek bizonyult a phosphorsav eltávolítására.

A sötétbarna olvadék ammoniában sárga, porhanyós, nyers pyrazolonná esik szét, melyet az 5-pyrazolonoknál többszörösen leírt nátronlúgos átoldással lehet csak megtisztítani. A HNO_3 -mal lecsapott termék sárgás fehér por, mely alkoholban, benzolban stb. igen nehezen oldódik, ætherben oldhatatlan. Átkristályosításra alkalmas oldószer a xylol. Apró, sárga tűk; olvadáspontjuk 208°C .

Elemzés:

0.2623 gr. anyag adott 0.1323 gr. vizet és 0.7695 gr. szén-dioxidot. 0.1020 gr. adott 7.8 cm^3 nitrogéngázt (20°C , 764 mm bar).

A $\text{C}_{21}\text{H}_{18}\text{ON}_2$ képletnek megfelelő számított értékek:

$$\text{C}=80.25\%, \quad \text{H}=5.73\%, \quad \text{N}=8.92\%;$$

talált értékek:

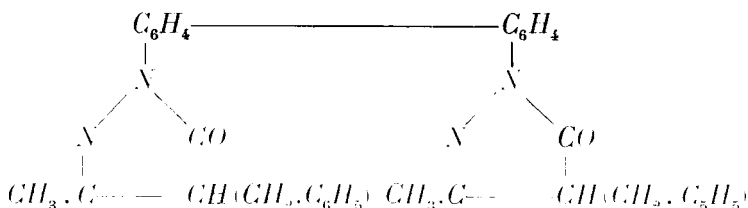
$$\text{C}=80.01\%, \quad \text{H}=5.62\%, \quad \text{N}=8.84\%.$$

A célunkra szükséges acetyl- β -naphthylhydrazint HAUFF módszere szerint (Ann. 253, 25) nem birtuk elég tiszta állapotban előállítani és ezért FEODOR JUST (Ber. 19, 1202) előírását módosítottuk olyképen, hogy 9.5 gr. β -naphthylhydrazin és 3.5 gr.

acetamid keverékét megömlesztettük (paraffinfürdő, 150°C). A reakció befejeztével az olvadékot ætherrel eldörzsöltük és a nyert chromsárga csapadékot forró vízből átkristályosítottuk. Olvadáspontja a HAUFF módszere szerint készítettetl azonos (168°C).

FÜGGELÉK.

1-diphenylenbis-(3-methyl-4-benzyl-5-pyrazolon).



E vegyületet a RICHARD ARHEIDT által leírt (Ann. 239, 206) *p, p*-diphenyldihydrazin és benzylacetylecetester molekuláris keverékének (1:2) 160° -on való összeömlesztése útján nyertük.

Az ömlesztés végén az olvadék megszilárdul és ætherrel szétdörzsölve barnás por alakjában nyerhető. Az előbb leírt módon a nátriumsón át nyert poralakú pyrazolon elegendő tiszta, ha leválasztására a nátronlúgos oldatot a lúgosság javarésznének salétromsavval való közömbösítése után szénsavval telítjük, mikor is a bispyrazolon sárgás por alakjában válik le. Ez az összes alacsonyabb forrpointú oldószerekben közel oldhatatlan, anilinen és pyridinben viszont oly jól oldható, hogy belőlük kristályos alakban nem nyerhető.

A nitrogén meghatározásakor 0.1210 gr. anyag adott 10.7 cm^3 nitrogéngázt (20°C , 757 mm bar).

A $\text{C}_{34}\text{H}_{30}\text{O}_2\text{N}_4$ képletnek megfelelő számított érték;

$$N = 10.89\% ;$$

talált érték:

$$N = 10.50\% .$$

ARSENOPYRIT ÉS BOURNONIT ROZSNYÓRÓL.

ZIMÁNYI KÁROLY 1.-tagtól.

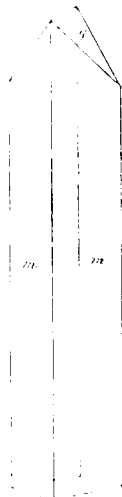
(Egy táblával.)

A múlt 1913. év nyarán Gömör vármegye egyes bányavidékein a Nemzeti Múzeum részére gyűjtve, Rozsnyóról az onnan eddig ismeretlen arsenopyritet és bournonitot hoztam; mineralogiai tekintetben annyiban is említésre méltók, mivel az arsenopyrit a rendes alkotó részein kívül még nickelt, kobaltot és kevés ólmot is tartalmaz; a bournonit pedig azért, mivel vasbányából való, a mihez hasonlót hazánkban még csak egyet ismerünk.

Mind a két ásvány a rimamurány-salgótarjáni vasmű r.-társaság SZADLOVSZKY-bányájában fordult elő.

Az arsenopyrit kristálykái egy öregszemű pátvaskő üregeiben a lencsealakú siderit rhomboederekben ülnek; kísérői *chalkopyrit*, *tetradrit* és pikelyes *muskovit*. Csak egy kis kézipéldányt találtam a pörkölőbe szállított érczek közt.

A vékonyoszlopos, csaknem tűalakú kristálykák (1. ábra) sárgásbarnára futtatottak, hosszuk 1—3 mm, vastagságuk 0.3—0.5 mm közt változik; vagy egész hosszukban, vagy csak az egyik végükkel nőttek a sideritre. Szabad végükön $q\{011\}$ domának sima lapocskái fénylenek, némelyeken még egy tompa, de meg nem határozható $\{0kl\}$ látható; az oszlop lapjai nagyon egyenetlen felületűek.



1. ábra.

A lapok kicsisége és zavart tükrözése miatt a mérések csak közelítőek voltak.

| | Mérés : | Számítás: |
|---------------------------|----------------|-----------|
| (110) : (1 $\bar{1}$ 0) = | 67°3' - 67°23' | 68 13' |
| (011) : (0 $\bar{1}$ 1) = | 99°1' - 99°27' | 99 50' |

Mivel a darabon levő összes kristálykák alig lettek volna elegendők egy teljes elemzésre, ezért minőleges reakciókkal csupán a *Fe*, *S* és *As* jelenlétéről győződtem meg.

A másik arsenopyritnek élénk fémfényű és ónfehér kristálykái vaskos fakóérczbe nőttek, színük világosabb, mint a legtöbb arsenopyrité, a mi különösen szembetűnő a frissen kiszedett kristályokon; az egészen aprók néhol sűrűbben is, a nagyobbak csak gyéren fordulnak elő. A fakóérczben oszlopos *kvarcz*kristálykák és elég bőven *chalkopyrit*szemek is vannak. A kristályoknak oszlopos, illetőleg domás kifejlődése egyaránt emlékeztet az arsenopyritre és glaukodottra, de az elég jó hasadás az oszloplapok szerint már inkább az arsenopyritre vall. Az egyszerű kombinációk alakjai ezek :

$$n\{012\}, \quad m\{110\}, \quad q\{011\}, \quad e\{101\},$$

az utóbbi makrodómanak csak egy sima lapocskáját figyeltem meg. A kristályok túlnyomó része apró, 0·5—1 mm, ritkán érik el a 3—4 mm-t; a kombinációk domásak (XV. tábla, 1—2. ábra), vagy oszloposak (3. ábra), a legkisebbek közt találunk piramisos külsejűeket is az $n\{012\}$ és $m\{110\}$ lapjainak egyenlő nagysága folytán.

Ritkábbak az $m\{110\}$ szerint alakult ikrek, a melyek vas-tagtáblások az ikerlap szerint, a többi határló oszlop- és dóm-alap keskeny (4—5. ábra).

A mérések nagyobb eltérését egymásközt és a számított hajlásoktól a lapok erős rostozottsága vagy más módon zavart felülete okozta. A következő táblázatban a számított értékek a hohensteini arsenopyritre,¹ n pedig a mért élszőgek számára vonatkoznak.

¹ Zeitschrift f. Krystallogr. etc. 1878. 2. 335.

| | Mérés : | <i>n</i> | Számítás : |
|---|---------|----------|---------------------|
| $m : m' = (110) : (\bar{1}\bar{1}0) = 68^\circ 21'$ | | 11 | $68^\circ 13' 0''$ |
| $q : q' = (011) : (0\bar{1}1) = 99^\circ 38'$ | | 10 | $99^\circ 49' 48''$ |
| $n : n' = (012) : (0\bar{1}2) = 61^\circ 32'$ | | 10 | $61^\circ 25' 40''$ |
| $m : e = (110) : (101) = 43^\circ 58'$ | | 1 | $44^\circ 0' 3''$ |
| $: q = : (011) = 64^\circ 36'$ | | 1 | $64^\circ 35' 39''$ |
| $: n = : (012) = 73^\circ 10'$ | | 2 | $73^\circ 21' 25''$ |
| $q : n = (011) : (012) = 19^\circ 11'$ | | 3 | $19^\circ 12' 4''$ |
| $q : q = (011) : (0\bar{1}1) = 50^\circ 30'$ | | 4 | $50^\circ 48' 42''$ |
| $n : n = (012) : (0\bar{1}2) = 33^\circ 49'$ | | 1 | $33^\circ 17' 10''$ |
| $m : m = (110) : (\bar{1}\bar{1}0) = 43^\circ 14'$ | | 4 | $43^\circ 34' 0''$ |

ZSIVNY VIKTOR úr, a Nemzeti Múzeum segédőre volt oly szíves a chemiai vizsgálatot és a fajsúlymeghatározást végezni; ez utóbbi 11°C -ra vonatkoztatva 6. l.

Ismeretes, hogy egyes arsenopyritek kobaltot és nickelt tartalmaznak külön-külön vagy együtt; a kobaltnak mennyisége a danaitban 16%-ra is emelkedik, míg a nickelé többnyire 1%-on alul marad. A szakirodalomban közölt elemzések közt csak egy bolíviai¹ és egy németországi² arsenopyrit tartalmaz 4%-nál több nickelt.

Sajnos, hogy egyselőre teljes quantitativ elemzésre elegendő anyagom nem volt, mégis a vizsgálat eredménye újabb adat arra, hogy a rozsnयी érczekben, bár szórványosan, a *Ni* és *Co* előfordul. Rozsnयी és közelebbi környékén *Ni*- és *Co*-érczek előfordultak, sőt néhol gazdag fészkekben is, még a mult század negyvenes és ötvenes éveiben a «*Rossigang*»-teléren a KENGYEL JÁNOS-bányában és a sajųházai «*Luréliu*»-teléren.³

★

¹ Berg- und Hüttenmänn. Zeitung. 1864. 23. Jahrg. 130—131. l.

² Neues Jahrb. für Mineralogie etc. 1890. 1. 99—100. l.

³ Bányászati és Kohászati Lapok 1879. 12. évf. 52. l. — EISELE G.: Gömör- és Kishont törv. egyes. vármegyének Bányászati Monographiája. Selmeczbánya. 1907. 1. 283. l. — V. v. ZEPHAROVICH: Mineralog. Lexikon. Wien, 1859, 1. 162. és 416. l.

A rozsnýói bournonit úgy, mint Lucziabányán,¹ Horhausen² és Oberlahron, szintén sideriten ül, a kísérő ásványok is nagyobbára ugyanazok; a kristályok kifejlődése egészen más, mint Nagybányán, Felsőbánya, Kapnikbánya vagy Nagyág érc-telérein.

A vastagtáblás kristályok többnyire egészen aprók, alig érik el az 1 mm-t, ritkábban találunk 3—4 mm nagyokat is; lapjaik felülete általában élénkfényű, azonban a nagyok közt meg-támadott érdesfelületűek is vannak. A bournonit gyakori kísérője a kristályodott *tetraëdrit*, ritkább a *chalkopyrit*, *galenit* és *sphalerit*, a mely utóbbinak kristálykái olykor a bournoniton vagy a tetraedriten ülnek.

Az eddig megvizsgált kristályok mind ikrek voltak $m\{110\}$ szerint, a melyeken méréssel a következő alakokat állapíthat-tattam meg:

| | |
|------------|-----------------|
| $a\{100\}$ | $l\{320\}$ |
| $b\{010\}$ | $m\{110\}$ |
| $c\{001\}$ | $\omega\{340\}$ |
| $x\{102\}$ | $f\{120\}$ |
| $o\{101\}$ | $i\{130\}$ |
| $z\{013\}$ | $u\{112\}$ |
| $n\{011\}$ | $y\{111\}$ |
| $e\{210\}$ | $\mu\{332\}$ |
| | $\rho\{121\}$. |

A kombinációk jellegző kifejlődését a 2. ábrán láthatjuk, a mely nagyon emlékeztet az oberlahri³ és saint-pierre du mérage-i⁴ bournonitokra. Az uralkodó $c\{001\}$ mellett nagy lapok-kal fejtettek ki $o\{011\}$ és $u\{112\}$, ritkábban még $n\{011\}$ is; a prismaöv lapjai általában alárendeltek, csak néha szélesebbek $a\{100\}$ és $b\{010\}$. A leggyakoribb alakok, a mennyiben ezeket

¹ Annales histor.-natur. Musei Nation. Hungar. 1913. 11. 263. 1.

² Zeitschr. f. Berg-Hütten und Salinen-Wesen. 1865. 11. 63—94. 1.

³ Abhandl. d. Senckenberg. Gesellsch. 1863. 4. 32. 1. Taf. 3. Fig. 31. (Neue Folge, 2-tes Heft.)

⁴ A. LACROIX: Mineralogie de France. 1897. 2. 707. 1. Fig. 11.

a megvizsgált kristályok mindegyikén megtaláltam: $a\{100\}$, $c\{001\}$, $\tau\{101\}$, $m\{110\}$ és $u\{112\}$; ha nem is általánosak, de közönségesek: $e\{210\}$, $x\{102\}$ és $b\{010\}$.

A bázisnak felülete gyakran zavart, az ikerösszenövés határa nem mindig látható, néha a két egyénhez tartozó részeket az $[o : c]$ élek irányában húzódó finom rostozás árulja el. Míg az oszloplapok közt gyakoriak a teljesen simák, addig az $u\{112\}$ piramislappjai csaknem mindig finoman rostosak az $[o : n]$ élekkel párhuzamosan.

A bournonitnak egy kis kézipéldányát, a melyen nagyobb kristályok sphalerittel, kevés chalcopyrittel és kvarcczal ülnek a pátvaskövön, a bányavezetőség szives előzékenységgel átengedte; a többi példányt, nemkülönbén a fakóérczbe nőtt arsenopyritet arról az érczhányóról gyűjtöttem, a hová a pátvaskóból kiválogatott rézérczeket értékesítés végett felhalmozzák.

Az alakok megállapítására szolgált méréseket és azok számát n a számított hajlásokkal¹ együtt a következő összeállításban sorolom fel.

| | Mérés: | n | Számítás: |
|--|--------|-----|-----------------|
| $a : e = (100) : (210) = 25^\circ 6'$ | | 12 | $25^\circ 8'$ |
| $: l = : (320) = 31^\circ 51'$ | | 4 | $32^\circ 1'$ |
| $: m = : (110) = 43^\circ 12'$ | | 17 | $43^\circ 10'*$ |
| $: \omega = : (340) = 51^\circ 23'$ | | 3 | $51^\circ 21'$ |
| $: f = : (120) = 61^\circ 59'$ | | 2 | $61^\circ 56'$ |
| $: i = : (130) = 70^\circ 29'$ | | 1 | $70^\circ 26'$ |
| $c : x = (001) : (102) = 25^\circ 30'$ | | 11 | $25^\circ 33'$ |
| $: \tau = : (101) = 43^\circ 42'$ | | 24 | $43^\circ 43'*$ |
| $: x = : (013) = 16^\circ 37'$ | | 1 | $16^\circ 37'$ |

¹ H. A. MIERS: The Crystallography of Bournonit. — Mineralog. Magazine 1884. 6. 59—79.

| | Mérés : | <i>n</i> | Számítás : |
|----------------------------------|-------------------------|----------|-----------------|
| $c : n = (001) : (011) =$ | $41^{\circ}45'$ | 8 | $41^{\circ}53'$ |
| $: u =$ | $(112) = 33^{\circ}16'$ | 20 | $33^{\circ}15'$ |
| $: y =$ | $(111) = 52^{\circ}41'$ | 12 | $52^{\circ}40'$ |
| $: \mu =$ | $(332) = 62^{\circ}2'$ | 2 | $63^{\circ}3'$ |
| $m : o = (110) : (101) =$ | $59^{\circ}38'$ | 11 | $59^{\circ}44'$ |
| $o : u = (101) : (112) =$ | $28^{\circ}17'$ | 20 | $28^{\circ}16'$ |
| $: n =$ | $(011) = 57^{\circ}26'$ | 5 | $57^{\circ}28'$ |
| $m : n = (110) : (011) =$ | $62^{\circ}50'$ | 1 | $62^{\circ}48'$ |
| $: \rho =$ | $(121) = 31^{\circ}46'$ | 1 | $31^{\circ}50'$ |
| $u : u' = (112) : (\bar{1}12) =$ | $47^{\circ}4'$ | 1 | $47^{\circ}8'$ |
| $o : f = (101) : (120) =$ | $71^{\circ}1'$ | 1 | $71^{\circ}2'$ |
| $: i =$ | $(130) = 76^{\circ}36'$ | 1 | $76^{\circ}37'$ |
| $y : f = (111) : (120) =$ | $41^{\circ}14'$ | 1 | $41^{\circ}10'$ |

Ikerszögek.

| | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|---|-----------------|
| $a : a = (100) : (100) =$ | $93^{\circ}41'$ | 6 | $93^{\circ}40'$ |
| $: b =$ | $(\bar{0}10) = 3^{\circ}42'$ | 5 | $3^{\circ}40'$ |
| $: \bar{m} =$ | $(110) = 50^{\circ}26'$ | 2 | $50^{\circ}30'$ |
| $a : c = (100) : (\bar{2}10) =$ | $68^{\circ}38'$ | 2 | $68^{\circ}32'$ |
| $m : \bar{m} = (110) : (\bar{1}10) =$ | $7^{\circ}47'$ | 4 | $7^{\circ}20'$ |
| $o : \bar{o} = (101) : (\bar{1}01) =$ | $60^{\circ}33'$ | 6 | $60^{\circ}32'$ |
| $: \bar{n} =$ | $(011) = 3^{\circ}11'$ | 2 | $3^{\circ}4'$ |
| $u : \bar{u} = (112) : (\bar{1}12) =$ | $4^{\circ}11'$ | 6 | $4^{\circ}0'$ |
| $: \bar{n} =$ | $(\bar{0}11) = 25^{\circ}20'$ | 5 | $25^{\circ}12'$ |
| $: \bar{o} =$ | $(101) = 32^{\circ}28'$ | 2 | $32^{\circ}16'$ |

Végül még a bournonitnak egyéb kísérőiről akarok röviden szólni, ezek a tetraedrit, a chalkopyrit, a galenit és a sphalerit. A sideritben a főérczek a tetraedrit és a chalkopyrit vaskosan elég gyakoriak, ámbár nem oly mennyiségben, hogy termelésük érdemes volna. A kristályodott *tetraedrit*¹ újabban ismét előfordult; kristályai egyszerű tetraederek, vagy ennek kombinációi $n\{211\}$, $d\{110\}$ és $a\{100\}$ alakokkal.

¹ Bányász. és Koh. Lapok 1879. 12. évf. 52. l., továbbá Földtani Közlöny 1879. 9. 127 l.

A *chalkopyrit* sphenoidos kristályai ritkák, tetraedrit mellett lencsealakú siderit rhomboéderekkel találhatók.

A *galenit* az érczes telérpéldányokon szemcsésen, vagy az üregek falain kisebb-nagyobb kristályokban fordul elő, mint $a\{100\}$ és $o\{111\}$ kombinációja. Az irodalomban Rozsnyó ásványai közt eddig nem szerepelt.

MELCZER¹ említi, hogy a *sphaleritot* a Sajóháza felé eső telérekben kristályodottan találták. Gyűjtött példányaimon a sphaleritkristályok vörösesbarnák vagy barnássárgák, a nagyobbak lapjai zsírfényűek, de a kicsik (1—1½ mm) kifogástalan simák, fényesek és átlátszók. A kristálykák többnyire szétszórta, egyenként ülnek a sideriten, ritkábban a tetraedriten vagy bournoniton.

¹ EISELE G.: Gömör és Kishont törv. egyes vármegyének Bányászati Monographiája. 536. l.

NÖVÉNYI ENZYMEKRŐL.

DOBY GÉZÁ-tól.

1. A burgonyagumó amyláza.

A különböző növényfajták enzymeit még nagyon kis számban vizsgálták behatóan; a kísérletek többnyire csak egy-egy enzimfajta terjednek ki anélkül, hogy a legtöbb kutató figyelembe venné, hogy az illető enzim milyen növényből vagy növényi részből származik és hogy e növény milyen physiologiai állapotban van.¹ Ezért azután egy-egy enzimfajtaról gyakran nagyon eltérők a kísérleti adatok, a mi az enzymológiának sok bizonytalanságát csak növeli. E zavart majd lassanként csak úgy csökkenthetjük, ha minél több növény enzymrendszerét² tanulmányozzuk, a mi nemcsak az azonos nevű, de különböző származású enzymeik szerkezetének azonosságáról vagy kisebb-nagyobb eltéréséről adhat felvilágosítást, hanem az enzymologia gyakorlati alkalmazásának, főként a pathológiának is hasznára válik.

Ily czélok vezettek a burgonya amylázának vizsgálatakor.

Ismereteink erről az enzymről még nagyon hézagosak. A kutatók legnagyobb része a csirázott árpa keményítő-oldó, illetve czukrosító enzymeivel foglalkozott, míg más növényi amylázokat még alig vizsgáltak meg újabb enzymologiai ismereteink felhasználásával.

A burgonya keményítő-oldó és czukrosító enzymeivel eddig

¹ Különbségeket említ pl. az amyláz és a keményítő származása szerint VAN LAER (Bull. de l'Acad. Sc. Belg. 1910. 716.)

² EULER-KULBERG, Zeitschr. physiol. Ch. 71. (1910.) 14.

legbehatóbban BARANETZKY¹ foglalkozott, majd később kivált MÜLLER-THURGAU² tanulmányozta a burgonyában a cukor képződését keményítóből; mind a kettő megegyezett abban, hogy nyugvó gumóban keményítőt elezukrosító enzim nincs. A későbbi dolgozatok közül csak néhány foglalkozik röviden ez enzimekkel; így CHRZASZCZ³ egész röviden többek között a burgonyát is a diasztáz-tartalmu növényi részek között sorolja fel, azután WINDISCH K. és JETTER⁴ czeفرéző kísérletei szerint burgonyában csak elenyésző csekély diasztáz van és hasonlót említ ugyancsak rövid megjegyzéssel legújabbán KOSTYTSCHEW.⁵ Azonban WINDISCH és JETTER állítását saját kísérletei alapján megczáfolja HEINZELMANN,⁶ a ki a két szerző kísérleteiben kapott alkoholt nem a burgonyában működő diasztáz hatására, hanem a gumókban már jelenlevő cukorra vezeti vissza. Megsebzett burgonyagumóban Grüss mutatott ki «diastase»-t az ő szép hajcsövezési módszerével,⁷ de külön felemlíti, hogy csak akkor, ha a sebet már elég vastagon vonta be a pararéteg. Végül MASSEE említi,⁸ hogy a mai, nemesített burgonyafajtákban kevesebb a diasztáz, mint a kevésbé nemesítettekben.

Kitűnt tehát, hogy még azt sem tudjuk biztosan, van-e a nyugvó burgonyagumóban keményítőt hydrolyzáló enzim. E kérdés tanulmányozása tehát mindenképen érdemesnek látszott.

Kísérleteim, melyeket még az 1912. év végén végeztem, de közbejött akadályok miatt csak most közölhetek, mindenekelőtt bebizonyították, hogy a nyugvó burgonyagumóban is meglehetősen mennyiségű amyláz van, noha ennek koncentrációja távolról sem közelíti meg például a cereáliák magvai amylázának concentra-

¹ BARANETZKY, Die stärkeumbildenden Fermente i. d. Pflanzen, (1878.) 57. oldal.

² MÜLLER-THURGAU, Landwirtsch. Jahrbücher. 1883. és 1885.

³ CHRZASZCZ, Wochenschr. f. Brauerei 25. (1908.) 105.

⁴ WINDISCH és JETTER, Zeitschr. f. Spiritusind. 30. (1907.) 554.

⁵ KOSTYTSCHEW, Ber. Bot. Ges. 31. 125. (1913.)

⁶ HEINZELMANN, Zeitschr. f. Spiritusind. 31. (1908.) 12.

⁷ Grüss, Zeitschr. f. Pflanzenkrankh. XVII. (1907.) 76.

⁸ MASSEE, idézve a Zeitschr. f. Pflanzenkr. 20. (1910.) 99. után. — Az eredeti közleményt legnagyobb sajnálatomra nem szerezhettem meg.

tióját. Hőoptimuma kísérleteim viszonyai között — tehát az eredeti, természetes lében a keményítő védő és a natriumfluorid ¹ aktiváló hatása alatt — 40°-on van, vagyis jóval alacsonyabban, mint a nyugvó növényi szervek amylázáé általában; ² 100°-on az amyláz végképen elvesztette hatását; nem végeztem azonban kísérleteket arra nézve, hogy az így megváltozott enzyms lé aktivitása rövidebb-hosszabb idő múlva visszatér-e.

A burgonyaamyláz aktiválói között legfeltűnőbb a natriumfluorid, mely vizsgálataim szerint például 2·1 %-nyi ($\frac{m}{2}$ -os) koncentrációban az amyláz hatását a háromszorosára emelte. A natriumfluorid a csirázott árpa amylázát is aktiválja, ³ míg az állati amylázokat általában paralyzálja. E kísérletekből tehát kitűnik, hogy a nyugvó burgonyában az amyláznak natriumfluorid által aktiválható, tetemes mennyiségű zymogénje van. ⁴ Épen megfordítva viselkedik ez az amyláz a natriumchloriddal szemben; míg az állati amylázt, kivált a száj nyálkáját, ⁵ erősen és jellegzetesen aktiválja, addig a burgonya amylázának már $\frac{mol}{100}$ -os koncentrációban megárt. ⁶ E két só ellentétes hatását jellemzőnek tartom és azt hiszem, hogy ennek okát valószínűleg a kétféle származású enzim szerkezeti különbségében kell keresnünk.

Ezenkívül még három sónak, a K_2HPO_4 -nak, a KH_2PO_4 -nak és a KNO_3 -nak hatását tanulmányoztam; ezek közül a phosphatok több enzymet aktiválnak. Kísérleteimben többnyire gyengén gátló ⁷ és csak egyetlenegyszer igen gyengén aktiváló hatást találtam. A KNO_3 egészen hatástalannak bizonyult. Ez annál

¹ L. lejebb, 722. l.

² L. például a zab amylázát (KLEMPIN, Bioch. Zeitschr. 10. (1908.) 210.)

³ E. Zuntz aus ABDERHALDEN, Handlex. 1. Aufl. V. 558.

⁴ Érdekes, hogy ilyen zymogen előfordulását burgonyában már HEINZELMANN feltételezte (Zeitschr. Spiritusind. 31. (1908.) 12.), «ha majd sikerül a coenzymjét megtalálni.» A NaF tehát ilyen coenzym.

⁵ Leghatóbban WOHLGEMUTH-nál, Bioch. Zeitschr. 9. (1908.) 10.

⁶ Hasonlót talált a csirázott árpa amylázánál VAN LAER, Bull. de l'Acad. Roy. Belg. 1913. 444.

⁷ Hasonlót talált FERNBACH is (idézve VAN LAER után; Bull. Acad. Roy. Belg. 1911. 106.) a kiesirázott árpa amylázánál.

különösebb, mert e só kationja és anionja a növényekre nézve egyaránt fontos és a burgonyagumóban is előfordul. Valószínűnek tartom, hogy a dialyzált burgonyaamylázt aktiválná,¹ az én vizsgálataimban azonban már a szükséges $KN(O)_3$ -concentratio az enzymes lében meglehetett.

A hidrogén- és hydroxyl-ion a burgonya amylázát csak igen gyenge concentrációban aktiválja. Ez az aktiválás azt a gondolatot keltheti, hogy az amyláz — legalább részben — amphoter² zymogén gyanánt van jelen, melyet ennél fogva akár sav, akár lug gyenge concentratióban aktivál. De lehet az is, hogy akár a sav, akár a lug valamely csekély mennyiségű paralyzálót köt le s így látszólag aktiválja az amylázt.

Ha a burgonya-amyláz oldatát felforraltjuk, ez az oldat forralatlan burgonya-amylázt aktivál. Hasonló aktiválást észlelt MOHR³ a kicsirázott árpa amylázánál s ezt valamely savnak vagy amidoknak tulajdonítja, utóbbit valószínűleg EFFRONT kísérletei alapján. Hasonlót talált ugyancsak csirázott árpa amylázánál LINTNER és WIRTH,⁴ továbbá VAN LAER.⁵ LINTNER és WIRTH már azt tartja, hogy ebben az aktiválásban a felforralt enzymes lé szerves és szervetlen alkotórészeinek egyaránt részük van. Én is úgy vélem, hogy itt nemcsak a MOHR említette, hanem sokféle más vegyületről is lehet szó. Ha a burgonya-amyláz oldatát agyagcellán szűrjük, teljesen elveszti hatását.

Különöbben érdekelt az a kérdés, hogy a cukrok szerkezete és configurációja összefügg-e paralyzáló hatásukkal.⁶ A cukrok gátló hatásával amyláznál meglehetősen sokan foglalkoztak.

¹ A sóktól mentes diastáz hatástalanságát már WRÓBLEWSKY (Ber. 31. (1898.), 1129.) említi. Lásd, még STARKENSTEIN, Biochem. Zeitschr. 24. (1910.) 210.

² Lásd VAN LAER, Bull. Acad. Roy. Belg. 1913. 432.

³ MOHR, Wochenschr. f. Brauerei 22. (1905.) 501. — VAN LAER, Bull. de l'Ac. Roy. Belg. 1913. 440.

⁴ WIRTH és LINTNER, Zeitschr. f. d. ges. Brauwesen 31. (1908.) 421—425., idézve WIRTH, „Unters. ü. d. Bestimm. der diast. Kraft d. Malzes“, doct. értekezés, München, (1908.) 36. után.

⁵ VAN LAER, Bull. de l'Acad. Roy. Belg. 1913. 440.

⁶ E kérdést legelőször ARMSTRONG, Proc. Roy. Soc. 74. (1904.) 516.) (cit., Wochenschr. f. Brauerei 22. (1901.) 701. 701. után) vetette fel.

A legelsők között BARANETZKY¹ volt, a ki a glukóz gátló hatását mutatta ki, hasonlóan később MÜLLER-THURGAU² a cukrosodás folyamatánál. Ujabb időben kivált WOHL és GLIMM³ foglalkozott e kérdéssel Merck-féle amylázon. Kísérleteimben a cukrokat nem százalékos, hanem mólos concentratio szerint vettem, mert feltételezhetjük, hogy a gátló hatás az enzyimnek valószínűleg adsorptiós természetű lekötése,⁴ sőt esetleg az ennek folytán létrejövő reversiós, synthesises folyamat⁵ révén áll be, erre pedig az aldehyd-, illetve a ketongyök a legalkalmasabb, a mely kondenzálásoknál leggyakrabban kapcsolódik. Így tehát tulajdonképpen e gyöknek a concentratioja a fontos. Kísérleteim eredményei azt mutatták, hogy a cukrok a következő sorrendben növekedően gátolják a burgonya-amyláz hatását:

Mannóz,
galaktóz, nádcukor,
arabinóz,
fruktóz, tejezukor,
glukóz,
maltóz.

Kitűnt tenát, hogy az amylóz⁶ hydrolytos bomlási termékei, a maltóz és glukóz gátolják legerősebben az amyláz hatását, még pedig a maltóz, mint az amylóz első bomlási terméke, erősebben, mint a glukóz. A cukrokkal végzett kísérletekből általában azt következtethetjük, hogy ily természetes enzyimrendszernél, a mily-nnel kísérleteimet végeztem, első sorban

¹ BARANETZKY, Die stärkeumb. Ferm. etc. 31.

² MÜLLER-THURGAU, Landw. Jahrbuch, 1885. 795.

³ WOHL és GLIMM, Biochem. Zeitschr. 27. (1910.) 349.

⁴ BAYLISS. Chem. Zentbl. 1911, II. 1095. VAN LAER (Bull. l' Acad. Roy. Belg. 1911, 824.) kivált a diasztáz és maltóz ily absorptiós termékét tette valószínűvé, továbbá a diasztázét és keményítőtét (u. o. 362.). STARKENSTEIN (Biochem. Zeitschr. 24. (1910.) 217.) viszont ez utóbbit tagadja.

⁵ Legujabban különösen BOURQUELOT, HÉRISSEY és BRIDEL szép enzyimes glukosid-synthesisei bizonyították kétségtelenül e folyamatok gyakoriságát. de (Journ. de Pharm. et de Chim. 1912. és 1913.)

⁶ MAQUENNE és ROUX, «Recherches sur l'amidon et sa saccharification diastasique». (Ann. Chim. Phys. [8.] 9. (1906.) 179.)

az a cukor gátolja a reactiót, mely a reactio közben a substratumból keletkezik, azután az, a mely a burgonya gumójában kötve vagy szabadon előfordul. A növényi szervben tudvalevően egész sora van az enzymeeknek, vagy általában katalyzálóknak, melyek a keményítő hydrolysisét és a termékek átalakulását egymásután fokozatosan végrehajtják és amelyek közé az amylázt, esetleg dextrinázt, a maltázt, invertázt, esetleg β -glukoszidázt, arabánt, galaktánt hydrolyzáló enzyemet, stb. számíthatjuk. Ugyan-ezek (az amyláz helyett amylokoaguláz) a concentratiós, stb. viszonyok változásával kondenzálást közvetítenek és így érthető, hogy a burgonyában első sorban a keményítő hydrolytos termékei s azután más polysaccharidok vagy hydrolytos termékeik gátolják az amyláz hatását. Ezért hat legerősebben a maltóz, azután a glukóz, stb., és ezért hatástalan a mannóz. Másodsorban érvényesül a disaccharidoknál a redukáló képesség; innen van, hogy a redukáló, noha teljesen idegen tejcukor erősebben hat, mint a nádcukor, mely utóbbi valószínűleg hatástalan volna, de a burgonya levében jelenlevő, csekély invertáztól glukózára és fruktózára bomlik, melyeknek lassu, de folytonos keletkezése azt a látszatot kelti, mintha maga a nádcukor hatna. Feltűnő, hogy a hexózok paralyzáló hatása nem függ attól, vajjon a dulcít vagy a mannit csoportjába tartoznak, a mi szintén arra mutat, hogy a hatást a moleculának még ennél is szűkebben meghatározott configurációja és a katalyzáló minősége szabja meg.

Ha WOHL és GLIMM adatait nem a százalékos, hanem szintén a molos concentratio hatása szerint sorakoztatjuk, a következő sorrendet kapjuk:

Fruktóz,
nádcukor,
mannóz,
galaktóz,
glukóz,
maltóz.

Így tehát itt is a maltóz hatásosabb a glukóznál, míg a fruktóz ugyanoly hatástalan, mint a magam kísérleteiben a mannóz, a nádcukor hatása pedig körülbelül azonos. Azonban

a WOHL és GLIMM-féle adatokat a MERCK-féle diasztázzról csak hozzávetőleg hasonlíthatjuk össze a magaméival, mert e két szerző az amyláz hatását a redukáló cukor mennyiségének szaporodásával mérte. Mindenesetre feltűnőnek tartom azt a különbséget, mely a cukrok paralyzáló hatásának sorrendjében WOHL és GLIMM és a magam kísérletei között megnyilvánul, különösen a fruktóz és mannóz nagyon eltérő viselkedésében. Mert kísérleteim szerint a burgonya amylázánál nem a cukor aldehyd-gyöke határozza meg első sorban a paralyzáló hatást, hanem ez a fentebb részletezett, bonyolultabb körülményektől függ. A WOHL és GLIMM és a magam vizsgálta amyláz között mutatkozó különbség két tényező következménye lehet: vagy a kétféle enzymes oldatban nem egészen ugyanazok az enzymek vannak jelen, vagy maga az amyláz szerkezete, esetleg configuratioja valamely részletében eltérő. Hogy e feltevésem helyességét tovább kutathassam, a cukrok gátló hatását szerkezetükkel és configuratiójukkal összefüggően tovább fogom tanulmányozni, még pedig más enzymeken, melyeken a reactio sebességét pontosan és gyorsan meg lehet állapítani. Ha ily módon az illető teljes enzymrendszert és a lehetőleg elkülönített enzymet párhuzamosan vizsgáljuk, azt hiszem, adatokat gyűjthetünk arra nézve, hogy a különböző növényfajtákban előforduló azonos nevű enzymek moleculájának szerkezete megegyezik-e.

Megállapítottam azután, hogy a burgonya amyláza a SCHÜTZ-féle szabályt¹ a reactio időbeli lefolyásáról éppen úgy követi, mint a zab amyláza,² vagyis hogy a substratum bizonyos mennyiségének hydrolysiséhez szükséges enzymmennyiség a reactióhoz szükséges idő négyzetgyökével fordítva arányos.

Végül kiterjesztettem a vizsgálatokat abban az irányban is, vajjon az amyláztartalmu oldat eltartás közben változtatja-e aktivitását. Már BARANETZKY³ is foglalkozott e kérdéssel és azt találta, hogy a nyugvó gumóknak eleinte hatástalan levé-

¹ SCHÜTZ, Zeitschr. f. physiol. Chem. 9. (1884.) 517. és SCHÜTZ und HUPPERT, Pflüg. Arch. 80. (1900.) 470.

² KLEMPIN, Bioch. Zeitschr. 10. (1908.) 204.

³ BARANETZKY, D. stärkeumbild. Fermente etc. 57.

ben körülbelül 10 napi eltartás után diasztázt lehetett kimutatni. Azonban az ő kísérletei annyira hozzátétőlegeseek voltak és a fertőzést sem zárták ki, hogy e kérdést okvetlenül alaposan kellett tanulmányozni. Kísérleteim azt mutatták hogy a burgonyagumók levében az amyláz koncentrációja hosszabb (3—9 napi) eltartás alatt csaknem mindig kissé növekedik, később bizonyos idő múlva ismét csökken. Ez az amyláz tehát hasonlóan viselkedik, mint a csírázott árpa «diastase»-ja,¹ noha a két jelenség abban különbözik, hogy az utóbbi «diastase» erősödése («autoexcitatio») az amylopektináz keletkezésében nyilvánul, míg a magam kísérleteiben az oldható keményítőre ható amyláz gyarapodik. Ezt a jelenséget, melyet MAQUENNE és Roux szerint az autolysis következményének kell tulajdonítanunk, a pathológiában használhatjuk fel, a mint ezt egy következő közleményben BODNÁR JÁNOS-sal együtt ki fogom mutatni.

Kísérleteimnek még egy általános, biochemiai vonatkozására kell rámutatnom. MÜLLER-THURGAU,² mikor a növényekben, nevezetesen a burgonya gumójában lehüléskor végbemenő cukorképződést keményítőtől tanulmányozta, kiemelte, hogy «diastase»-t a burgonyában nem talált. Ezért azt tartja, hogy az a tényező, mely a keményítő ez elcukrosodását lehetővé teszi, nem diasztáz. Minthogy vizsgálataim kétségtelenül arra mutatnak, hogy a nyugvó gumóban is van amyláz, mely az enzymben minden fontosabb tulajdonságát mutatja, a cukornak nyugvó gumókban lehüléskor beálló felhalmozódását most már végérvényesen megmagyarázhatjuk. A keményítő ugyanis a bár kis koncentrációju amyláz működése folytán lassan, de folyton elcukrosodik, kivált akkor, ha a cukor koncentrációja alacsony. A burgonya amylázának aránylag alacsony hőoptimuma is jól egyezik ezzel. Minél inkább növekszik azután a cukor koncentrációja, annál lassabb lesz az elcukrosodás, ha a keményítő fölöslegben van is, mert — mint láttuk — a keményítő hydrolytos termékei az amyláz hatását gátolják, bizonyára ez enzim leköttetése által. Ha azután a hőmérséklet emelkedik, a keményítő-

¹ MAQUENNE és ROUX, Ann. Chim. Phys. (8.) 9. (1906.) 179.

² MÜLLER-THURGAU, Landw. Jahrb. 11. (1882.) 814.

kondenzálás endothermás folyamata lesz túlsúlyban, melyet még magas cukorconcentratio és vagy a WOLFF és FERNBACH-féle keményítőkoaguláz,¹ vagy maga az amyláz és bizonyára még egész fokozatos sora az enzymeeknek gyorsít. Tehát a nyugvó gumóban is folyton elezukrosodik és folyton viszontképződik a keményítő és csak a külső tényezők változása és a lélekzés szabja meg, melyik folyamat van túlsúlyban, a mi azután, kivált alacsony hőmérsékleten, azt a látszatot kelti, mintha csak az egyik folyamat menne végbe.

KISÉRLETI RÉSZ.

A diasztáz néven ismert katalyzálók több enzimet foglalnak magukban²; ezek közül kísérleteimben csak egyet, az amylázt, vagyis a többé-kevésbé tiszta amylázra ható enzimet tettem vizsgálataim tárgyává, mert így a viszonyok egyszerűbbek és áttekinthetőbbek. Ezenkívül arra törekedtem, hogy az enzymbrendszert minél kevesebb változást szenvedjen; ezért gondosan kerültem minden oly műveletet, mely az amyláz enzymbrendszert bármily módon megváltoztathatná, tehát nem választottam le az enzimet, vagy oldatát nem párologtattam be, stb., hanem a burgonyát egyszerűen megdaráltam, batiszton szűrtem, a benne levő, kevés keményítőt centrifugálással és asbesth-tel felszerelt Gooch-féle tégelyen szűrve eltávolítottam s azután eltartás közben toluollal óvtam meg a fertőzéstől. Az enzymes oldat a tyrozináz hatásától frissen is barna, átlátszatlan, néhány napi állás után sötétbarna, átlátszó folyadék.

A módszerek közül a WOHLGEMUTH-féle eljárást³ választottam, mint a mely — egyéb előnyein kívül — más enzyme, kivált a maltáz zavaró hatását egészen kizárja. Azonban egy-egy sorozat tagjai között nem a mértani haladvány tagjainak különbségét vettem, hanem rendszerint egy-egy tized cm^3 -nyi különbségeket, mert az egyes eltérések az összehasonlítandó

¹ WOLFF és FERNBACH, Compt. Rend. 137. 718.

² MAQUENNE és ROUX, l. c.

³ WOHLGEMUTH, Bioch. Zeitschr. 9. (1908.) 1.

hatások között előreláthatóan kisebbek voltak, semhogy a mértani haladvány alkalmazásánál a különbségeket észrevehettem volna. Nagyobb enzimconcentrációnál ($1\cdot5-2\text{ cm}^3$) kellemetlen volt az, hogy a reakciós oldatból 40° -on 24 óra alatt laza, barna, pelyhes csapadék vált ki, mely jóddal összerázva oly sötétre festette a folyadékot, hogy a színreakciót nem lehetett kellően megfigyelni. Minthogy a csapadék oly laza volt, hogy az oldat tisztáját róla leönteni nem lehetett, legjobbnak bizonyult, ha vagy pipettával szívtam ki a folyadék tisztáját, vagy az egész folyadékot néhány csepp tömény eczetsavval jól összeráztam, miáltal a reactio is rögtön megszakadt s azután a hűtés közben beálló ülepedés után a folyadékot leszűrtem. A csapadék, a mint erről külön kísérletben meggyőződtem, keményítőt nem ragadott magával s az oldatban a jódos színreakciót kitűnően lehetett megfigyelni.

A kísérletek idejét az enzymes oldatnak aránylag gyenge aktiválása miatt 24 órában szabtam meg, kivéve a reactio időbeli lefolyásának tanulmányozásánál és a hőoptimum megállapításánál; utóbbinál azért kellett az egy órai időt választanom, mert hosszabb ideig a nagyon sokféle hőmérsékletet bajos állandóan betartani.

A kémlőcsövek tartalmát már a kísérlet elején egyenlő térfogatra egészítettem ki éppen úgy, mint KLEMPIN,¹ mert előzetes kísérletben meggyőződtem arról, hogy ugyanannyi keményítőt ugyanannyi enzymes oldat különböző hígítás mellett különböző sebességgel cukrosít el, a mint e táblázat mutatja:

I. összeállítás.

| A kísérleti folyadék öss- zes térfogata, cm^3 | L | $D_{246}^{40^\circ}$ | Aktivitási % |
|---|-----|----------------------|-----------------|
| 5 | 0·4 | 2·0 | 120 |
| 10 | 0·5 | 1·67 | 100 |
| 20 | 0·7 | 1·25 | 75 |

¹ KLEMPIN, Biochem. Zeitschr. I. c.

Minthogy kísérleteim 24 óráig tartottak, a fertőzést ki kellett zárnom. Az egyébként kitűnő toluol itt nem vált be, mert a nyitott kémleőcsővekből könnyen és egyenlőtlenül elpárolgott; ezért helyette a reakciós folyadék 0.3%-át kitevő natriumfluoridot használtam.

A kísérleteket tehát így végeztem: A kémleőcsővekbe 10 cm^3 összes térfogathoz szükséges vizet, 1 cm^3 3%-os natriumfluorid-oldatot és az esetleg szükséges, idegen vegyület oldatát, majd a megfelelő mennyiségű enzy mes oldatot és végül 1 cm^3 1%-os Kahlbaum-féle oldható keményítőt ¹ mértem, miközben a kémleőcsővek megfelelő, fémből való, rugós állványon $8-10^\circ$ -os vízben álltak. A keményítő bemérése 2—3 perczig tartott. A keményítő oldatát mindennap frissen készítettem és 3 térf. % toluollal eltartva, gyakorlati okokból a következő nap használtam fel. A reakciós folyadékkal telt kémleőcsőveket azután rögtön, az állvánnyal együtt egyszerre, elzárható bádogszelenczében levő, 40° -os vízbe helyeztem és a szelenczét rögtön a 40° -os tenyésztő szekrénybe tettem. Ily módon, ha körülbelül tíz tagból álló sorozatot tettem fel, az első és utolsó tagnál a keményítő hozzákeverése, vagyis a reactio kezdete között alig két percnyi különbség volt, a mit még az egy órás kísérletekben is el lehetett hanyagolni, annál inkább, mert a kellő hőmérsékletre való felhevítés egyszerre történt. Minden kísérletsorozatnál természetesen ugyanolyan ellenőrző sorozatot állítottam be idegen vegyület stb. nélkül. Ha az enzy mes oldat aktivitását közelítően sem ismertem, előzetes kísérletet végeztem oly sorozattal, melynek tagjai között az enzy mes oldat mennyisége fél-fél cm^3 -rel különbözőt s ezután tettem fel a végleges sorozatot, egymástól 0.1 cm^3 -nyi enzy mes oldattal különböző tagokkal. A kísérlet végén a kémleőcsőveket állványostól folytonosan folyó, $8-10^\circ$ -os vízzel lehűtöttem, a mi egy-két perc alatt megtörtént, a kémleőcsővek tartalmát 20 cm^3 -re hígítottam és jóddal összeráztam. Az a kémleőcső, a melyben éppen még fel lehet ismerni az ibolyaszínt, a határ ($L = \text{«limes»}$), s az ennél több enzy met tartalmazó.

¹ 1 gr. keményítő 100 cm^3 összes oldatban, WOHL szerint 1 térfogat % (Bioch. Zeitscht. 27. (1910.) 353. ¹ jegyzet.)

következő kémlőcsövet vesszük az aktivitás kiszámításának alapjául. Minthogy ugyanis az ebben levő enzymes oldat mennyisége 1 cm^3 1%-os keményítőoldatot éppen hydrolyzált, kiszámítjuk belőle, hogy az enzymes oldat 1 cm^3 -e hány cm^3 1%-os oldható keményítőoldatot hydrolyzálna. Az így kapott számot D -vel (diastase-ból) jelöljük, megjegyezve egyúttal, hogy mely hőfokra és hány órai kísérletre vonatkozik, pl.: $D \frac{40^\circ}{24} h$.

Az amyláz kimutatása nyugvó burgonyagumóban. Kísérleteimet az 1912. év novemberében kezdtem, tehát oly időben, a melyben a hűvös pinczében tartott burgonya «teljes» nyugalmi állapotban van. A kísérletek közül, melyek a fenti tételt bizonyítják, csak egyet mutatok be a II. összeállításban:

II. összeállítás.¹

| Sorszám | 1%-os keményítő oldat, cm^3 | Enzymes oldat, cm^3 | Víz cm^3 | Színeződés 2 csepp $\frac{n}{10}$ J-dal |
|---------|---|---------------------------------|----------------------|---|
| 1 | 1 | 0.5 | 18.5 | Sötétkék |
| 2 | 1 | 1.0 | 18.0 | Ibolya |
| 3 | 1 | 2.0 | 17.0 | Barna |

Ha az enzymes oldatot előbb felforraltam, jóddal mind a három folyadék sötétkékre színeződött. Ez a később leírt kísérletekkel együtt, melyek enzymekre jellemző eredményeket adtak, bizonyítja, hogy a burgonyában amyláz van jelen.

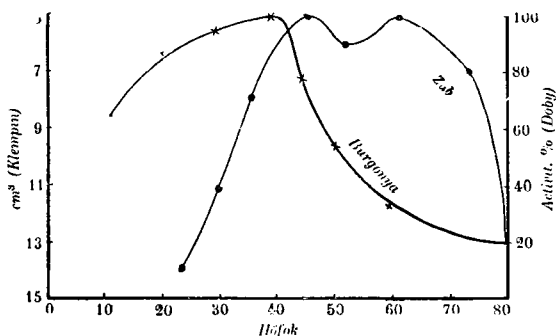
A burgonya-amyláz hőoptimuma. További kísérleteimben legelőször azt kellett tudnom, hogy adott viszonyok között mely hőmérsékleten hat ez az amyláz legerősebben. A kísérleteket eczélből — mint már említettem — egy órai időtartammal végeztem. Az eredmények ezek:

¹ Itt toluolt használtam fertőtlenítésre. Natriumfluoridot 0.5 %-os mennyiségben használt pl. Merck-féle diasztáz, takadiasztáz tanulmányozásánál PILOCHE, Chem. Centralbl. 1908.

III. összeállítás.

| Hőfok | <i>L</i> | <i>D</i> _{60'} | Aktivitási ¹ % |
|-------|----------|-------------------------|------------------------------|
| 11° | 3·0 | 0·32 | 68 |
| 20° | 2·2 | 0·43 | 91 |
| 30° | 2·1 | 0·45 | 96 |
| 40° | 2·0 | 0·47 | 100 |
| 45° | 2·8 | 0·34 | 72 |
| 50° | 4·0 | 0·24 | 51 |
| 55° | 4·6 | 0·21 | 45 |
| 60° | 6·5 | 0·14 | 30 |
| 80° | 10·9 | 0·09 | 19 |

A burgonya-amiláz hőoptimuma tehát 40° és így jóval alacsonyabb, mint pl. a zab nyugvó magjának amylázáé,² a mint ez legjobban az 1. rajzból kitűnik, a melyen a burgonya-amiláz magam megállapította viselkedését a zab amylázéval hasonlí-



1. ábra. A burgonya és zab amylázának hőoptimuma.

tottam össze. A burgonya-amiláz optimumának 60%-át már mintegy 8°-on eléri, míg a zabé csak 34° körül jut el ehhez az értékhez. Ezzel szemben a burgonya enzyme a 40°-os optimumon túl rohamosan gyöngül úgy, hogy már 45°-on csak

¹ E névvel azt a számot jelölöm, mely kifejezi, hogy az adott viszonyok között az egyik adat *D* értékének hány %-át teszi ki a többi. Itt például a 40°-os kísérletben elért *D*_{60'}-at veszem 100-nak s ehhez viszonyítom a többi.

² KLEMPIN, Biochem. Zeitschr. 10. (1908.) 210.

olyan activ, mint 11° -on, 60° -on pedig eredeti aktivitásának már csak 30 %-át tartja meg, míg a zab amyláza e hőfokon még legnagyobb aktivitását fejt ki, a mely már 45° -on beáll. Azt lehetne gondolni, hogy e nagy érzékenység részint arra mutat, hogy az enzymes lében levő proteinek a kísérlet közben koagulálva, magukkal ragadták az amyláz egy részét és így inaktívtázták,¹ részint pedig valószínűnek látszik, hogy hosszabb, például 24 órás kísérleti idővel még ez az alacsony optimum is alászállna. Azonban a következtetések egyike sem állhat meg, a mint később, a reactio időbeli lefolyásából ki fog tűnni s így a 40° -os hőmérséklet kísérleti viszonyaim között valóban optimuma volt a burgonya amylázának.

Egyébként tudjuk, hogy az enzymeek nagyon különbözően állnak ellen a hőnek aszerint, hogy milyenek a külső körülmények. Ezt a hőoptimumot tehát éppen úgy, mint más enzymekét, nem mondhatjuk jellemzőnek.

Hasonlóan kell magyaráznunk, hogy $\frac{k^t}{k^{t-10}}$ kísérleteimben kivétel nélkül jóval kisebb 2-nél, míg csirázó árpa amylázánál² például $\frac{k_{35^{\circ}}}{k_{25^{\circ}}}$ 2 körül, néha még e fölött is van. Ez is bizonyítja, mennyire érzékeny a burgonya-amyláz.

Ha az amylázt felforraljuk, teljesen elveszti hatását; például 1 cm^3 1 %-os keményítőt 24 óra alatt 0.7 cm^3 enzymes oldat már teljesen hydrolyzált, míg a felforralt enzymes-oldatból 1.6 cm^3 hatása után is jóddal sötétkékké lett a folyadék. Az eredmény ugyanaz volt, akár tisztára szűrve, akár a forraláskor kivált csapadékkal együtt használtam a forralt enzymes oldatot.

Agyagcellán szűrt amyláz. Az enzymes oldatot kis Pukall-féle, előbb 140° -on sterilizett agyagszűrőn szűrtem; ha az így kapott oldat 1.5 cm^3 -ét a szokott módon 1 cm^3 1 %-os keményítőoldattal 24 óráig 40° -on tartottam, jóddal sötétkékre színeződött, míg a szüretlen enzymes oldat L -e 0.6 cm^3 volt.

¹ Ezt tapasztalta pl. VAN LAER a kicsirázott árpa amylázánál (Bull. de l'Acad. Roy. Belg. 1911. 108.), továbbá állati amylázoknál STARKENSTEIN (Biochem. Zeitschr. 24. (1910.) 194.) és SCHIROKAUER és WILENKO (Biochem. Zeitschr. 33. (1911.) 278.).

² Bull. de la Soc. Chim. Belg. 26. (1912.) 27.

Natriumfluorid hatása. Az erre vonatkozó kísérletekre különösen szükségem volt, mert — mint már említettem — a toluolt gyors párolgása miatt nem lehetett csiramentesítésre használni. Azonban az ellenőrző sorozatban a natriumfluorid hatásának tanulmányozásakor mégis 3 % toluolt kellett alkalmaznom.

Minthogy a natriumfluorid vízben aránylag nehezen oldódik, csak 3 %-os oldatot vehettem a leméréshez és koncentrációját a kísérleti folyadékokban annyira emeltem, a mennyire a többi hozzáélegytendő oldat mennyisége engedte. Az eredmények ezek:

IV. összeállítás.

| <i>NaF</i> | | <i>L</i> | $D_{246}^{40^\circ}$ | Aktivitási % |
|-------------------------|------------------|----------|----------------------|-----------------|
| molos con- centratio | % az oldatban | | | |
| 0 | 0 | 0·8 | 1·11 | 100 |
| $\frac{m}{1400}$ | 0·003 | 0·8 | 1·11 | 100 |
| $\frac{m}{140}$ | 0·03 | 0·7 | 1·25 | 113 |
| $\frac{m}{28}$ | 0·15 | 0·5 | 1·67 | 150 |
| $\frac{m}{14}$ | 0·30 | 0·5 | 1·67 | 150 |
| $\frac{m}{3·5}$ | 1·2 | 0·3 | 2·5 | 225 |
| $\frac{m}{2}$ | 2·1 | 0·2 | 3·33 | 300 |
| $\frac{m}{1·75}$ | 2·4 | 0·2 | 3·33 | 300 |

Kitűnik tehát, hogy az aktiválás már 0·03 %-nyi *NaF* tartalomnál kezdődik és a legmagasabb értéket, vagyis a *NaF* nélkül való aktivitás háromszorosát 2·1 %-nál éri el, a melyen túl e sónak aktiváló hatása már nincs. A hatás eleinte a koncentrációnál erősebben nő, de már 0·15 %-nyi koncentrációtól kezdve ezzel arányosan növekedik, míg a legnagyobb értéket eléri. Valószínűnek kell tartanom, hogy a *NaF* a concentratio bizonyos értékén túl már paralyznál is, ezt azonban a gyakorlatban nem érhetjük el a *NaF* csekély oldhatósága miatt. Mindenestre feltűnő, hogy ez a só, mely az enzymeeknek többnyire

már gyenge concentratio mellett is erősen megárt, a burgonya amylázát még 2·4 %-os oldatban is tetemesen aktiválja.

Más sók hatása. A *natriumchlorid* tiszta állapotban EFFRONT szerint¹ az árpa amylázának nem árt meg, csak a nyers konyhasó, tehát ennek a szennyezései. Éppen ezért kísérleteimet tiszta MERCK-féle *NaCl*-dal végeztem; az eredmények ezek:

V. összeállítás.

| A <i>NaCl</i> concentratioja | <i>L</i> | $D_{246}^{40^\circ}$ | Aktivitási % |
|---------------------------------|----------|----------------------|-----------------|
| 0 | 0·6 | 1·42 | 100 |
| $\frac{m}{1000}$ | 0·6 | 1·42 | 100 |
| $\frac{m}{100}$ | 0·8 | 1·1 | 77 |
| $\frac{m}{10}$ | 0·8 | 1·1 | 77 |
| $\frac{m}{2}$ | > 1·0 | < 1·0 | < 70 |
| <i>m</i> | > 1·5 | < 0·63 | < 44 |

Látjuk, hogy a burgonya amylázának a tiszta *NaCl* is megárt s ehhez a *NaF*-dal végzett kísérletek alapján hozzátehetjük, hogy nem a *Na*-ion, hanem a *Cl*-ion az ártalmas, a melynek épen ellenkező, aktiváló hatását a nyálka amylázára kivált WOHLGEMUTH² kísérletei óta ismerjük.

A *kálium*-, a *phosphat*- és *nitrát-ion* fontossága a növényekre ismeretes, hiszen a legfontosabb növényi táplálóanyagok közé tartoznak és enzymek aktiválóinak is már többször beváltak.

A kétféle kaliumphosphat és a kaliumnitrát hatását, mely mindig gyengén paralizáló volt, illetve egyáltalában nem érvényesült, mutatja a

¹ EFFRONT-BÜCHELER: «Die Diastasen» 125.

² WOHLGEMUTH, Biochem. Zeitschr. 9. (1908.) 10.

VI. összeállítás.

| A só koncentrációja | | L | $D_{246}^{40^\circ}$ | Aktivitási % | A kísérlet ideje |
|---------------------|--------------------|------|----------------------|-----------------|---------------------|
| K_2HPO_4 | 0 | 0·6 | 1·42 | 100 | 1912 december |
| | $\frac{m}{1000}$ | 0·8 | 1·1 | 77 | |
| | $\frac{m}{100}$ | 0·8 | 1·1 | 77 | |
| | $\frac{m}{10}$ | 0·8 | 1·1 | 77 | |
| | 0 | 0·5 | 1·67 | 100 | |
| | $\frac{m}{100000}$ | 0·45 | 2·0 | 120 | 1913 április |
| | $\frac{m}{10000}$ | 0·45 | 2·0 | 120 | |
| | $\frac{m}{1000}$ | 0·45 | 2·0 | 120 | |
| | 0 | 0·6 | 1·42 | 100 | |
| KH_2PO_4 | $\frac{m}{1000}$ | 0·7 | 1·25 | 88 | 1912 december |
| | $\frac{m}{100}$ | 0·9 | 1·0 | 70 | |
| | $\frac{m}{10}$ | 1·5 | 0·63 | 44 | |
| | 0 | 0·35 | 2·5 | 100 | 1913 április |
| | $\frac{m}{10000}$ | 0·35 | 2·5 | | |
| | $\frac{m}{1000}$ | 0·35 | 2·5 | | |
| | $\frac{m}{100}$ | 0·35 | 2·5 | | |
| | $\frac{m}{10}$ | 0·35 | 2·5 | | |

A *hydrogen- és hydroxil-ion hatása*: Sav gyenge koncentrációban a legtöbb keményítőt cukrosító enzimet aktiválja; különösen világosan tűnt ez ki MAQUENNE és Roux ¹ kísérleteiben, a melyeket szerzőik akként magyaráztak, hogy a sav a só alakjában lekötött amylopektinázt felszabadítja. Kísérleteimben a sósav csak nagyon gyenge koncentrációban aktiválta az amylázt; mindazokból a reakciós folyadékokból, melyekben sósav volt, a kísérlet tartama alatt csapadék vált ki. Hogy a sósavnak esetleges hydrolytos hatása félre ne vezessen, e kísérletekben párhuzamosan a következő két oldatot tettem fel:

¹ MAQUENNE és Roux, Compt. R. nd. 142. (1906.) 1059.

1. 7 cm^3 víz + 1 cm^3 3 %-os NaF + 1 cm^3 1 %-os oldható keményítő + $1\text{ cm}^3 \frac{n}{10} \text{HCl}$.

2. mint 1., de $\frac{n}{10} \text{HCl}$ helyett $n \text{HCl}$.

Mind a két oldat a reactio befejeztével jóddal feketés kékre festődött, jelölül annak, hogy a sósav ily concentrációban a kísérleti feltételek között nem hydrolyzálta a keményítőt s így jóval kisebb concentrációjú sósav sem okozhatott ily természetű hibát. Az eredmények ezek:

VII. összeállítás.

| A HCl concen- trációja | L | $D_{246}^{40^\circ}$ | Aktivitási % |
|------------------------------------|---------|----------------------|-----------------|
| 0 | 0.5 | 1.67 | 100 |
| " 10,000 | 0.45 | 2.00 | 120 |
| " 1000 | 0.6 | 1.42 | 85 |
| " 100 | > 2.0 | 0.5 | < 30 |
| " 10 | 2.0 | 0.5 | < 30 |

A *lúggal* végzett kísérletek közül azokból, a melyekben 0.5 cm^3 -nél több enzymes oldat volt, szintén csapadék vált ki a reactio tartama alatt. A kísérleti eredményeket a következő összeállítás mutatja:

VIII. összeállítás.

| A NaOH concen- trációja | L | $D_{246}^{40^\circ}$ | Aktivitási % |
|-------------------------------------|---------|----------------------|-----------------|
| 0 | 0.5 | 1.67 | 100 |
| " 10,000 | 0.5 | 1.67 | 100 |
| " 1000 | 0.45 | 2.0 | 120 |
| " 100 | 1.5 | 0.63 | 38 |
| " 10 | > 3.0 | 0.33 | < 20 |

A forralt amyláz aktiváló hatása. Az enzymes oldatot ERLÉNMEYER-lombikban felforraltam és a kiváló pelyhes, barna csapadékot lehűtés után leszűrtem; a folyadékkal 24 óra alatt 40°-on a következő eredményeket kaptam:

IX. összeállítás.

| Sorszám | Enzym | Víz | Felforralt enzymes oldat | 3%-os NaF | 1%-os keményítő | Reactio <i>J</i> -dal |
|-----------------|-------|-----|--------------------------------|--------------|--------------------|-----------------------|
| cm ³ | | | | | | |
| 1 | 0.4 | 5.6 | 2.0 | 1 | 1 | Halvány ibolya |
| 2 | 0.6 | 5.4 | 2.0 | 1 | 1 | Barna |
| 3 | 0.7 | 5.3 | 2.0 | 1 | 1 | Sárga |

Ugyanakkor az enzymes oldat *L*-e felforralt lé nélkül 0.6 cm³ volt, az aktivitási százalék tehát a felforralt enzymes oldat hozzáadásától 100-ról mintegy 150-re emelkedett.

Cukrok hatása. — E tétel tanulmányozására a következő cukrokat használtam:

Monosaccharidok: Arabinóz, gluróz, mannóz, fruktóz, galaktóz.

Disaccharidok: Maltóz, saccharóz, laktóz.

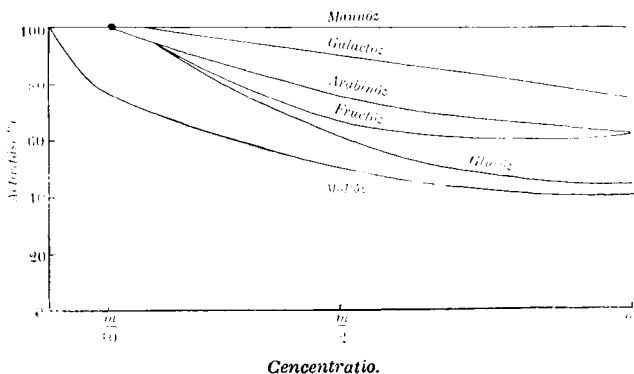
Legtöbbjét háromféle concentrációban alkalmaztam, még pedig mólosban, fél és tized mólosban. Kivétel volt a mannóz és laktóz; az előbbiből csak mólos concentrációt használtam, minthogy már ebből is kitűnt, hogy egészen hatástalan. A laktózból *m*-os concentrációval nem kísérletezhettem, mert ezt nehéz oldhatósága a kísérleti körülmények között lehetetlenné tette. E cukrok tiszta, kereskedelmi készítmények voltak, a mannózt a *Phytelephas macrocarpa* endospermiumából magam állítottam elő a rendes módon a hydrazonon át. Az eredmények ezek:

X. összeállítás.

| A cukor | | L | $D_{246}^{40^\circ}$ | Aktivitási % |
|----------|----------------|-----|----------------------|-----------------|
| neve | concentrációja | | | |
| Arabinóz | 0 | 0.5 | 1.67 | 100 |
| | $\frac{m}{10}$ | 0.5 | 1.67 | 100 |
| | $\frac{m}{2}$ | 0.7 | 1.25 | 75 |
| | m | 1.0 | 0.91 | 64* |
| Glukóz | 0 | 0.6 | 1.42 | 100 |
| | $\frac{m}{10}$ | 0.6 | 1.42 | 100 |
| | $\frac{m}{2}$ | 1.0 | 0.91 | 64 |
| | m | 1.4 | 0.67 | 47 |
| Mannóz | 0 | 0.6 | 1.42 | 100 |
| | m | 0.6 | 1.42 | 100 |
| Galaktóz | 0 | 0.6 | 1.42 | 100 |
| | $\frac{m}{10}$ | 0.6 | 1.42 | 100 |
| | $\frac{m}{2}$ | 0.7 | 1.25 | 88 |
| | m | 0.8 | 1.1 | 77 |
| | 0 | 0.5 | 1.67 | 100 |
| Fructóz | m | 0.5 | 1.67 | 100 |
| | $\frac{m}{10}$ | 0.8 | 1.1 | 66 |
| | $\frac{m}{2}$ | 1.0 | 0.91 | 64* |
| | m | 0.6 | 1.42 | 100 |
| Maltóz | 0 | 0.8 | 1.1 | 77 |
| | $\frac{m}{10}$ | 1.2 | 0.77 | 54 |
| | $\frac{m}{2}$ | 1.5 | 0.63 | 44 |
| | m | 0.6 | 1.42 | 100 |
| Sahharóz | $\frac{m}{10}$ | 0.6 | 1.42 | 100 |
| | $\frac{m}{2}$ | 0.7 | 1.25 | 88 |
| | m | 0.8 | 1.1 | 77 |
| | 0 | 0.5 | 1.67 | 100 |
| Laktóz | m | 0.5 | 1.67 | 100 |
| | $\frac{m}{10}$ | 0.8 | 1.1 | 66 |
| | $\frac{m}{2}$ | 0.8 | 1.1 | 66 |

* E kísérletben a cukormentes, ellenőrző sorozatban $L = 0.6 \text{ cm}^3$ volt.

E táblázatban rögtön szembeötlik a maltóz erősen gátló hatása; pl. $\frac{m}{10}$ -os koncentrációban csakis ez a disaccharid csökkenti az amyláz hatását úgy, hogy ebből csak 77 % marad meg; és míg a glukóz $\frac{m}{2}$ -os oldata az amyláz hatását csak 64 %-ra szorítja le, addig a maltóz ugyane koncentráció mellett már csak 54 %-át hagyja meg az amyláz aktivitásának.



2. ábra. Cukrok gátló hatása.

Ha a cukrok hatását a szerint állítjuk össze, hogy egy-egy cukor koncentrációja mellett az amyláz eredeti aktivitásának hány százaléka marad meg, fogalmat nyerünk a cukrok paralyzáló hatásának viszonylagos nagyságáról, még pedig:

XI. összeállítás.

| Aktivitási % | Concentráció | | | | | | | |
|--------------|----------------|----------------|--------|----------------|----------------|--------------------|----------------|----------------|
| | arabinóz | glukóz | mannóz | galaktóz | fruktóz | maltóz | sabharóz | laktóz |
| 100 | $\frac{m}{10}$ | $\frac{m}{10}$ | $m !$ | $\frac{m}{10}$ | $\frac{m}{10}$ | $< \frac{m}{10} !$ | $\frac{m}{10}$ | $\frac{m}{10}$ |
| 88 | — | — | — | $\frac{m}{2}$ | — | — | $\frac{m}{2}$ | — |
| 75—77 | $\frac{m}{2}$ | — | — | m | — | $\frac{m}{10}$ | m | — |
| 66 | — | — | — | — | $\frac{m}{2}$ | — | — | $\frac{m}{2}$ |
| 64 | m | $\frac{m}{2}$ | — | — | m | — | — | — |
| 54 | — | — | — | — | — | $\frac{m}{2}$ | — | — |
| 47 | — | m | — | — | — | — | — | — |
| 44 | — | — | — | — | — | m | — | — |

E szerint tehát legkevésbé paralyzál a mannóz, körülbelül egyenlően — emelkedő sorrendben — a galaktóz és sahharóz, az arabinóz, fruktóz és laktóz, még erősebben a glukóz és legerősebben a keményítőhöz legközelebb álló disaccharid, a maltóz.

A paralyzáló czukrok az én kísérleteimben is csak oly concentrációban éreztették hatásukat, a milyen concentratio kísérleteimben a keményítőből távolról sem keletkezhett volna. Azonban a nagy concentrációknak kétségtelenül mégis van jelentőségük a sejtben, a hol a keményítő concentrációja igen gyakran bizonyára nagyon nagy.

A *burgonya amyláza* a *Schütz-féle szabályt* követi. A kísérleteket e tétel bebizonyítása végett akként végeztem, hogy előbb 0.5 cm^3 -nyire kikerestem azt az enzyommennyiséget, mely 1 cm^3 1 %-os keményítőoldatot a már részletezett kísérleti feltételek mellett $1\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 és 32 óra alatt éppen elbont. Ezután 0.1 cm^3 -nyi pontossággal kerestem ki az enzy-moldatnak ehhez szükséges mennyiségét. Az eredmények a következők:

XII. összeállítás.

| | | | | | | | |
|------------------------|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| t (idő órákban): | $1\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32; |
| L (cm^3): | 2.3 | 1.8 | 1.5 | 1.0 | 0.7 | 0.5 | 0.35. |

Már így is látszik, hogy a két órás kísérlettől kezdve *fél* akkora enzymes mennyiségnek *négyszer* annyi kellett ugyanannyi (1 cm^3 1 %-os) keményítő teljes hydrolysisére: Míg 1.5 cm^3 enzy-m 2 óra alatt fejezte be a reactiót, 0.7 cm^3 $2^2.2 = 8$ óra alatt, 0.35 cm^3 $2^2.8 = 32$ óra alatt, vagy 1 cm^3 enzy-m 4 óra alatt, 0.5 cm^3 enzy-m $2^2.4 = 16$ óra alatt stb.

Ha az idő egységeül a $1\frac{1}{2}$ órát véve a fenti összeállításból kiszámítjuk $L\sqrt{t}$ értékét, ez állandó lesz, amint a következő táblázat mutatja:

XIII. Összeállítás.

| t | L | $L\sqrt{t} = k$ |
|-----|------|------------------------|
| 1 | 2.3 | $2.3\sqrt{1} = 2.30$ |
| 2 | 1.8 | $1.8\sqrt{2} = 2.55$ |
| 4 | 1.5 | $1.5\sqrt{4} = 3.00$ |
| 8 | 1.0 | $1.0\sqrt{8} = 2.88$ |
| 16 | 0.7 | $0.7\sqrt{16} = 2.80$ |
| 32 | 0.5 | $0.5\sqrt{32} = 2.83$ |
| 64 | 0.35 | $0.35\sqrt{64} = 2.80$ |

k értéke kissé erősebben változik az első két időtartamnál, még pedig kisebb az átlagnál, a mi arra mutat, hogy a reactio sebessége nagyobb volt a többinél. Lehet, hogy ez onnan van, mert a reactio alatt mindegyik kémlecsőben csapadék vált ki; ez a hosszabb ideig tartó reactióknál ráért leülepedni, míg a rövidebb ideji kísérletekben nem ülepedhetett le oly tökéletesen, annál kevésbé, mert az enzymes oldat mennyisége s így a csapadéké is több volt. Ennélfogva az oldat tisztáját a kísérlet végén nem lehetett oly tisztán leszívni s így a jódos reactio sem volt oly éles; ehhez hozzájárult, hogy itt erősebben érvényesült az enzymes oldat jódelnyelőkéessége. Az első két időtartam állandójának pontatlansága tehát a kísérleti nehézségek következménye lehet. Azonban valószínűnek tartom, hogy itt az enzymnek a keményítőhöz viszonyított nagy mennyiségével van dolgunk; erről VAN LAER¹ kifejtette, hogy a reactiót erősebben gyorsíthatja, mint a hogy az enzym concentrációjának megfelel, a mit adsorptió jelenségekkel magyaráz. Erre mutat az is, hogy a sorozat két első tagja közül annál van a nagyobb eltérés, a melynél az enzym alkalmazott mennyisége a nagyobb.

¹ Bull. de l'Acad. Roy. Belg. 1911. 310., továbbá 814—817. és 821.

A többi állandó értéke azonban oly jól egyezik, hogy a szabály érvényessége kétségtelenül kitűnik.

Ebből a kísérleti sorozatból különben még egyebet is következtethetünk. Mindenekelőtt kitűnik, hogy a kísérletek közben kiváló csapadék nem ragad magával amylázt, mert különben a sok csapadékú, tehát a nagy enzymentartalmú oldatokban aránylag gyengébbnek kellene lennie az amyláznak, vagyis k értéke nagyobb lenne, holott ép az ellenkezőjét látjuk. — Ezenkívül újabb bizonyítékot kapunk arra, hogy a burgonya amylázának optimuma hosszabb idei kísérlet alatt is 40° marad, mert különben k annál nagyobb lenne, minél hosszabb ideig tart a kísérlet, holott éppen a hosszabb idei kísérletekben bizonyult be legszebben az állandósága.

A burgonya amylázának erősödése eltartás alatt. — Ha a burgonya kisajtolt levét körülbelől 3 % toluollal csíramentesen eltartjuk, aktivitása egy ideig nagyobbodik, a mint ezt az alábbi táblázat mutatja:

XIV. összeállítás.

| A kísérlet napja | L | $D_{40^\circ}^{24h.}$ | Aktivitási % | Hány napig állott az enzy-mes oldat ? | Mikor készült az enzy-mes oldat ? |
|------------------|------|-----------------------|--------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| XII. 20. | 0·6 | 1·43 | 100 | 6 | XII. 14.-én |
| • 23. | 0·5 | 1·67 | 117 | 9 | |
| • 26. | 0·5 | 1·67 | 117 | 12 | |
| • 27. | 0·5 | 1·67 | 117 | 13 | |
| • 28. | 0·5 | 1·67 | 117 | 14 | |
| • 30. | 0·6 | 1·43 | 100 | 16 | |
| I. 1. | 0·6 | 1·43 | 100 | 18 | I. 4.-én |
| • 4. | 0·6 | 1·43 | 100 | 21 | |
| I. 5. | 0·6 | 1·43 | 100 | 1 | |
| • 7. | 0·5 | 1·67 | 117 | 3 | |
| • 11. | 0·4 | 2·0 | 140 | 7 | |
| • 12. | 0·35 | 2·5 | 175 | 8 | |
| • 13. | 0·4 | 2·0 | 140 | 9 | |

A burgonya levét e kísérletekhez körülbelől $5-6^\circ$ -os pin-czében, sötét helyen tartottam el. Az aktivitás változása az első mintánál gyengébb, a másodiknál ellenben különösen jól lehet

megfigyelni; ennél hét napi eltartás alatt az eredeti aktivitás 175 %-át éri el. Kísérleteim tehát BARANETZKY hozzávetőleges észleléseit szabatosan megerősítették; az amyláz erősödésének időpontjára nézve azonban kétféle kísérletem között elég nagy eltérés mutatkozik, noha a burgonya származása és fajtája mind a kétszer teljesen azonos. A különbségeket a tavaszi ébredés felé való közeledés okozza, a mint ez BODNÁR-ral együtt végzett kísérleteinkből ¹ ki fog tűnni.

¹ V. ö. a következő közleményt.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 május 18.-án tartott üléséből.)

NÖVÉNYI ENZYMEKRŐL.

2. A burgonya amyláza és pathológiai elváltozása.

DOBY GÉZÁ-tól és BODNÁR JÁNOS-tól.

Azokat a kísérleteket, melyekben egyikünk¹ a burgonyának levélsodródása nevű betegsége közben beálló, biochemiai elváltozásokat kutatta, kiterjesztettük a gumók amylázára.

Kísérleteinket lehetővé tették azoknak a kísérleteknek eredményei, a melyekkel Doby² a nyugvó burgonyagumók amylázának fontosabb tulajdonságait megállapította. E kísérletek eredményei közül kivált azt a kettőt használtuk fel, melyek a burgonya amylázának optimumáról és aktivitásának erősödéséről — az oldat fertőzéstől mentes eltartása közben — szólnak.

Kísérleteinket a m. kir. növényélet- és -körtani állomás kísérleti telepeiről származó, gondosan kiválogatott anyaggal végeztük, még pedig 11 mintánál egészséges és beteg gumót párhuzamosan, 9 mintánál pedig csupán beteg gumókat vizsgálva. Az eredmények két részre oszlanak a szerint, a mint általában a burgonya amylázáról, vagy ennek és a betegségnek összefüggéséről szólnak.

• Munkálatainkat tulajdonképen két irányban végeztük. Figyelemmel kísértük, miképen változik az amyláz concentrációja magában a burgonyában s azután a burgonyából kisajtott lében ennek eltartása alatt. E vizsgálatok eredményeit összevetve és

¹ Doby, Kisérl. Közl. 14. (1911.) 5. füz., 15. (1912.) 2. füz. és Zeitschr. f. Pflanzenk. 21. (1911.) 10. és 321., 22. (1912.) 204. és 401.

² Előző közlemény.

felhasználva a burgonya-amyláz általános tulajdonságait, arra a következtetésre jutottunk, hogy az amyláz egy része a burgonyában oly zymogén alakjában van jelen, mely a nyugalmi állapot vége felé aktiv enzyimmé változik át, de ugyanez történik sokkal gyorsabban, ha a gumók levét antiseptikusan eltartjuk.

Következő kísérletek feladata lesz keresni, hogy milyen tényezők okozzák a zymogén átalakulását enzyimmé, de erre FORD és GUTRIE,¹ továbbá VAN LAER² kísérletei adnak útmutatást. E szerzők árpa, illetve csirázó árpa porát papainnal csávázták, mire az amyláz sokkal aktívabb lett, mint a papainnal való csávázás nélkül. Valószínűnek tartjuk tehát, hogy a téli nyugalom alatt a burgonyában is proteolytos enzimek működése alakítja át lassanként az amyláz zymogénjét szabad enzyimmé; ez az átalakulás a sejtek elroncsolása után a kisajtolt lében még gyorsabban megy végbe s ezért «erősödik» a burgonya amyláza az antiseptikusan eltartott lében.

Azonban a nyugalmi állapotnak körülbelül a közepéig még zymogén is kevesebb van a burgonyában, mint később; a zymogén gyarapodása körülbelül január elején kezdődik, mert innen kezdve észlelhetjük csak a lé aktivitásának tetemesebb gyarapodását eltartás közben. A burgonya amylázáról tudjuk, hogy felette érzékeny.³ Innen van, hogy minél nagyobb a burgonyalé eredeti, friss aktivitása, annál kevésbé erősödik ez az aktivitás a lé eltartása közben, illetve annál gyorsabban megy tönkre. Mert, a míg a kész enzim kevés a lében és a zymogén sok, ebből az autolysis által annyi új enzim keletkezik, hogy a folyton elroncsolódó, már meglevő enzim csökkenését nemcsak, hogy észre nem vesszük, hanem még enzimgyarapodást is megállapítunk. Ellenben tavasz felé egyre kevesebb a zymogén és több a kész enzim a burgonyában, minek folytán a kisajtolt, friss lé aktivitása erősebb ugyan, de eltartás közben egyre kevésbé vagy már egyáltalában nem gyarapodik, sőt a már kész enzim is gyorsan pusztul; de most már nincs zymogén,

¹ FORD és GUTRIE, Journ. Fed. Inst. Brew. 1908. 61.

² VAN LAER, Bull. de l'Acad. Roy. Belg. 1913. 417.

³ L. DOBY előző közleményét.

a mely ezt a pusztulást új enzym képződésével ellensúlyozná, úgy, hogy a lé aktivitásának csökkenése teljes egészében jut érvényre.

Ezek azok az eredmények, a melyeket kísérleteink adataiból kiolvashatunk: Egyrésről a burgonya frissen készült levének aktivitása annál nagyobb, minél közelebb jutunk a tavasz felé, másrészt a télen készült lé aktivitása eltartás közben kevésbé nő, de sokáig megmarad; a később készült lé aktivitása egyre erősebben nő, de rövidebb tartamú; végül a későn tavasszal készült lé már nem erősödik és tartóssága is egyre csökken.

Kísérleteink magyarázatát adják MÜLLER-THURGAU¹ észleléseinek, a melyek szerint burgonyában lehülés által annál könnyebben és annál több cukor képződik, minél előbbre haladt a nyugalmi idő.

Megállapítottuk még, hogy a burgonya amylázának koncentrációja (frissen készült lében) nem jellemző sem a fajtára, sem a termési helyre, hanem mindenesetre nagyon bonyolult tényezőktől függ, a melyek felderítése még igen sok kísérleti munkát követel. A számbavehető tényezők közé a talajviszonyokon kívül még az időjárást, a növények leszármazását, a trágyázást stb. is fel kell venni, de kísérleteink tanúsága szerint még így is nagyon óvatosan kell eljárni, nehogy az enzymes oldat kora, a nyugalmi idő szaka stb. hibát okozhasson a következtetéseikben.

Az amyláz aktivitása a gumók nagyságától csaknem teljesen független.

Áttérve most munkánk tulajdonképeni végső céljára, megállapítottuk, hogy egészséges és beteg növények gumói között az amyláz koncentrációjának abszolút értékében nincs szabályszerűség, ellenben a burgonyában levő kész enzymnek és a zymogénnek egymáshoz való aránya beteg és egészséges gumóban különböző. *Egészséges burgonyában általában aránylag több a zymogén, tehát a tartalék, mint betegben.* Ez abban nyilvánult meg, hogy az egészséges gumók leve eltartás közben többet erősödött és tartósabb volt, mint a betegeké.

¹ MÜLLER-THURGAU, Landw. Jahrb., 11. (1882.) 814.

Biochemiai ismereteink a levélsodródásról ezekkel az adatokkal ismét bővültek. Sajnos, könnyen használható, chemiai ismeretű tünetet e vizsgálatokkal sem sikerült találni, ellenben SORAUER feltevését¹ az enzyimes viszonyok rendellenességeiről újabb adatokkal támogatják. Kísérleteink tehát újabb bizonyítékot nyújtanak arra, hogy a levélsodródással nemcsak mycologiai,² hanem chemiai elváltozások is járnak.

Azonban vizsgálataink megdöntik MASSEE³ ama következtetését, hogy a nemesített burgonyában kevesebb az amyláz, mint a nem-nemesítettben és hogy ennek folytán a burgonya ellenálló képessége a nemesítés folytán megcsappant; ha ez így volna, akkor beteg gumókban az amyláz koncentrációjának is kisebbnek kellene lennie. Megfigyeléseink ellenben megerősítik azt a következtetést, melyet egyikünk⁴ már a beteg és egészséges gumók nyers chemiai összetételéből és oxidázainak koncentrációs viszonyaiból levont és a mely szerint a keményítőt hydrolyzáló enzim koncentrációja valószínűleg nem függ közvetlenül az egészségi állapottól. Kísérleteink épen azt bizonyítják, hogy elváltozások valóban vannak, de ezek annyira finomak, hogy csakis beható vizsgálatok deríthetik fel.

Tanulmányozásra várna még az a kérdés is, hogy e chemiai kóros elváltozásokat növényi kórokozó élősködők idézik-e elő,⁵ továbbá, hogy az amyláz optima és idegen vegyületekkel való aktiválhatása mennyire különböző egészséges és beteg gumókban.

Kísérleti rész.

A kísérleteket egészen úgy végeztük, mint egyikünk (Doby) a burgonya amyláza tulajdonságainak tanulmányozásakor, vagyis

¹ SORAUER, Internat. phytopathol. Dienst. I. (1908.) 33.

² KÖCK és KORNAUTH, Zeitschr. f. d. landw. Versicherungswesen i. Österr. 1912. 179.

³ MASSEE, ref. a Zeitschr. f. Pflanzenkrankh. 20. (1910.) köt. 99. old.-án.

⁴ DOBY, Kísérlet. Közl. 25. (1912.) 2. füzet, IV. közlemény és Zeitschr. f. Pflanzenkr. 22. (1912.) 401.

⁵ HIMMELBAUR: Österr.-ung. Zeitschr. f. Zuckerind. etc. 1912. Különlenyomat.

a WOHLGEMUTH-féle módszert használtuk csekély módosítással, még pedig 40° -on 24 óráig tartó kísérletekben. Minthogy L értéke többnyire 0.1 és 0.8 közé esett, előzetes kísérletet egymástól 0.5 cm^3 -rel különböző enzymes mennyiséggel legtöbbször nem is kellett végezni, hanem minden sorozatot mindjárt fel lehetett tenni oly tagokkal, melyek egymástól 0.1 cm^3 -rel tértek el. Nagyobb aktivitásnál az enzymes oldatot WOHLGEMUTH szerint 10-szeresére hígítottuk és így a tagok egymástól 0.01 cm^3 -rel tértek el, illetve szükség szerint csak 0.05 cm^3 -rel. Kísérleteinkben mindenekelőtt fontos volt, hogy enzymes oldataink mindig egyenlő viszonyok között készüljenek és hogy valóban az illető egész minta amyláz-concentrációját képviseljék. E végből megkísérlettük, hogy a burgonya összeaprítása okoz-e különbséget az oldat aktivitásában; a burgonyát 1. répa-fűróval, 2. húsvágógéppel, 3. hengeres reszelővel aprítottuk el s azután levét úgy szűrtük, mint az előző közlemény leírja. A meghatározások adatai ezek:

| | 1. | 2. | 3. |
|-----------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| L | 0.6 cm^3 | 0.6 cm^3 | 0.4 cm^3 |
| $D_{24.6}^{40}$ | 1.4 " | 1.4 " | 2.0 " |

A hengeres reszelővel való elaprítás tehát a legnagyobb értéket adta és minthogy ez egyszersmind a legkényelmesebb eljárás, e mellett maradtunk.

Az egyes mintákban a gumó nagysága nagyon eltérő volt; ezért egy átlagosan kivett mintát nagyság szerint 4 részre osztottunk és az egyes részek aktivitását külön-külön határoztuk meg. Az eredmények ezek:

| Részek | A gumók | | Egy gumó átlagos súlya gr. | L | $D_{24.6}^{40}$ |
|--------|---------|---------------------|----------------------------------|-----|-----------------|
| | száma | összes súlya gr. | | | |
| 1 | 48 | 970 | 20 | 0.3 | 2.5 |
| 2 | 34 | 570 | 17 | 0.4 | 2.0 |
| 3 | 29 | 310 | 11 | 0.4 | 2.0 |
| 4 | 36 | 260 | 7 | 0.4 | 2.0 |

A különbözően nagy gumókban tehát az amyláz koncentrációja egészen egyenlő; a csekély eltérés a legnagyobb gumóknál

oly kicsiny, hogy észrevehető eltérést nem okozhat, ha az átlagos mintát csak valamennyire is kellő gonddal vesszük.

Az amyláz koncentrációjának növekedése a burgonya téli nyugalma alatt. Munkánk terve szerint minden minta aktivitását a burgonya tavaszi elültetéseig többször kellett volna meghatározni; minthogy azonban az enzymes oldatok változó aktivitásának ellenőrzése nagyon sok munkát adott, az összes minták aktivitását csak kétszer vizsgálhattuk meg. A meghatározások első ízben február 10.-e és márczius elseje közé, második ízben márczius 21.-e és április 8.-a közé estek és így minden mintánál 37—42 nap felt el az 1. és 2. meghatározás között. A gumók az első vizsgálatkor még teljes nyugalomban voltak, vagy legfeljebb az utoljára sorra kerülőkön látszott a rügyek alig kezdődő fakadása. A második vizsgálatkor a rügyek már fakadni kezdettek, de a hajtások $1\frac{1}{2}$ cm-nél hosszabbak nem voltak. E hajtásokat a gumók elaprítása előtt természetesen gondosan eltávolítottuk. Minden mintában az amyláz mérésekor a szárazanyagot is meghatároztuk, még pedig oly módon, hogy minden burgonya felét elszeletelve és alkohollal megnedvesítve, vízfürdön előszáritottuk, megdaráltattuk és szellőző szárítószekrényben kiszáritottuk. E meghatározásokat itt főlegesen volna közölnünk, csak megemlítjük, hogy teljesen megerősítették a régebbi chemiai adatokat,¹ a melyek szerint egészséges gumóknak szárazanyag-tartalma nagyobb, mint beteg gumóké.

A frissen készült amylázoldatok adatait az 1.—3. táblázatban találjuk; azonban a friss oldatok aktivitását legjobban úgy hasonlíthatjuk össze, ha az első meghatározás D_{24}^{100} értékét 100-nak vesszük és ezzel mérjük a második feldolgozáskor kapott értéket $\left(\frac{100 D_{24}^{100 \text{ első}}}{D_{24}^{100 \text{ második}}} \right)$. Ezeket az adatokat mutatja a következő összeállítás.

A friss amylázoldatok aktivitásának viszonzyszámai:

¹ SPIECKERMANN: Jahresber. d. Vercinig. ang. Bot. 8. (1910.) 1. és 173. — KORNAUTH és KÖCK: Zeitschr. f. d. landw. Vers.-wes. i. Österr. 14. (1911.) 5. és 7. füzet. — DOBY: Kisérlet. Közl. 15. (1912.) 2. füzet és Zeitschr. f. Pflanzenkrankh. 22. (1912.) 204.

| Minta | | 1-3. | 3-4. | 7-8. | 9-10. | 11-12. | 13-14. | 15-16. | 17-18. | 19-20. | 21-22. |
|--|-------|------|------|------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Hány nap telt el az 1. és 2. felvétel között | | 39 | 39 | 42 | 41 | 42 | 37 | 39 | 38 | 37 | 37 |
| $\left(\frac{100 D_2}{D_1}\right)$ | e^1 | 165 | 198 | 125 | 335 | 268 | 250 | 50 | 172 | 83 | 83 |
| | b^1 | 150 | 120 | 236 | 335 | 151 | 231 | 60 | 268 | 125 | 83 |
| Minta | | 23. | 24. | 25. | 27. | 28. | 29. | | | | |
| Hány nap telt el az 1. és 2. felvétel között | | 38 | 37 | 40 | 38 | 39 | 39 | | | | |
| $\left(\frac{100 D_2}{D_1}\right)$ | b | 333 | 79 | 79 | 91 | 42 | 42 | | | | |

Feltűnő itt, hogy a felső csoportban levők túlnyomó részében $\frac{100 D_2}{D_1}$ nagyobb 100-nál, tehát az amyláz koncentrációja növekedett, míg az alsó csoport mintáinál ez a koncentráció, egynek a kivételével, mindenütt csökkent. A legnagyobb növekedés febr. 14.-étől márczius 27.-éig az eredeti aktivitás 3—4-szerese volt (9—10. minta). Ezzel szemben az egyik (12.) mintánál megfigyeltük, hogy az aktivitás márcz. 29.-én a febr. 15.-én észlelt értéknek már csak 15%-át tette ki. Az alsó csoport értékei mind beteg és nem-magyaróvári minták adatai.

Ha az amyláz koncentrációját még február eleje előtt is meghatároztuk volna, bizonyára alacsonyabb értéket kaptunk volna, amint ez az 1. minta vizsgálatából kitűnik. Ennél a D_{24h}^{400} és a $\frac{100 D_2}{D_1}$ értékei ezek:

| | | | | |
|-----------------------|---------|------|--------|---------|
| | XII 20. | I 4. | II 10. | III 21. |
| D_{24h}^{400} | 1.4 | 1.4 | 2.0 | 3.3 |
| $\frac{100 D_2}{D_1}$ | 100 | 100 | 140 | 240 |

Amikor tehát a fenn felsorolt mintáknál febr. 10.-én végeztük az első mérést, bizonyára máris megnövekedett amylázal volt dolgunk.

¹ e =egészséges, b =beteg.

Az amyláz aktivitásának megnövekedése ugyanabban az enzyemes oldatban eltartás alatt. Ugyanazokat az oldatokat, melyeknek aktivitását frissen meghatároztuk, 3% toluollal jól záró üvegben 8—10°-on, sötét helyen eltartottuk és időközönként újból megvizsgáltuk, még pedig elsőízben febr. 10.-e és márcz. elseje között, másodízben márcz. 21.-e és ápr. 8.-a között. A kísérletek összes eredményeit az 1.—4. táblázatban állítottuk össze. Ezek közül az 1. összeállítás a febr. 10.-e és márcz. 1.-je között készített oldatokban talált L -értékeket foglalja magában, a 2. összeállítás az ezekből számított D_{24h}^{400} adatait, a 3. táblázat az L és D_{24h}^{400} értékeit azoknál az oldatoknál, melyek márcz. 21.-e és ápr. 8.-a között készültek. Végül a 4. táblázat az összes oldatok $\frac{100 D_t}{D_0}$ értékeit mutatja; D_0 -val jelöljük az eredeti, friss oldat D_{24h}^{400} -jét, míg D_t e fogalom értékeit az oldat eltartása közben nyert meghatározásoknál jelenti; ily módon tehát $\frac{100 D_t}{D_0}$ az oldat aktivitásának százalékos erősödését fejezi ki, mérve a friss oldat aktivitásával.

E táblázatokban mindenekelőtt újabb bizonyítékát látjuk annak, hogy a friss oldatok aktivitása annál nagyobb, minél idősebb a gumó. Mert, noha az amyláz aktivitása tág határok között ingadozik, mégis — kivált az egészségeseknél — az előző időben D_{24h}^{400} a 2.5-et nem haladja túl, míg később, tavasz felé általában magasabbak az értékek.

Az erősödés legnagyobb értékét, az eredeti aktivitás 1.5-szeresét a magyaróvári beteg «Up to date»-nál találjuk 26 nap múlva. Egyébként a legnagyobb erősödést nagyon különböző idő alatt érik el az oldatok és a 4. táblázatból világosan kitűnik, hogy minél fiatalabb a burgonya, annál nagyobb az erősödése, minél idősebb, azaz minél közelebb áll a kihajtáshoz, annál gyengébb, sőt febr. 21.-én túl erősödést már nem is sikerült megállapítanunk és az oldatok aktivitása is egyre hamarabb

gyengül. A míg például febr. 22.-e előtt az egészséges burgonyák amyláza még mintegy 70 nap múlva is többnyire erősödik, addig az oldatok később, különösen márcz. 20.-a után legfeljebb 13 napig tartják meg eredeti aktivitásukat.

Ha a minták gyakori ellenőrzését még többször végezhetük volna, valószínűleg mindenütt megállapíthattuk volna az amyláznak — legalább csekély és rövid idei — erősödését. Hogy ugyanegy mintánál a nyugalmi idő különböző szakában készített enzyμες oldatokban mily különbözően erősödik, az legjobban az első minta értékeiből tűnik ki, melynek a következő összeállítás két első sorozatában feltüntetett adatait Doby közleményeiből vesszük.

| Az enzyμες oldat készült | Az activitás viszonyyszámai, ha a kezdeti aktivitást 100-nak vesszük, az | | | | | | | | | |
|--------------------------------|---|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|--------|
| | 1. | 2 | 3. | 6. | 7. | 8—9. | 12. | 21. | 29. | 36-69. |
| | napon | | | | | | | | | |
| XII. 14. | — | — | 100 | — | 143 | 143 | 100 | — | — | — |
| I. 4. | 100 | 121 | 143 | 178 | 143 | — | — | — | — | — |
| II. 10. | 100 | — | — | — | — | — | — | 125 | 125 | — |
| III. 21. | 100 | — | — | — | 100 | 100 | — | 52 | — | — |

Az oldat erősödése tehát a nyugalmi állapot alatt bizonyos legmagasabb értéket mutat, melynél előbb és később mindig kisebb; görbéje tehát domború.

Az amyláz független a termelési helytől és a fajtától. Egészséges burgonyáink különböző helyekről nem voltak s így az amyláz ingadozását a termelési hely szerint csak beteg gumókon hasonlíthattuk össze.

Az adatok ezek:

| A minta | | | Activitás $D_{24h}^{40^\circ}$ a friss oldatban | | | |
|---------|-----------------|------------|---|--------------------|------------------|--------------|
| száma | neve | termőhelye | az 1. felvétélkor | | a 2. felvétélkor | |
| | | | II. 10.—13. | II. 26— III. 1. | III. 21.—27. | IV. 4.—8. |
| 2. | Up to date | Magyaróvár | 1·67 | — | 2·5 | — |
| 24. | | Parisháza | — | 3·3 | — | 2·5 |
| 29. | | Poroszká | — | >11·0 | — | 8·3 |
| 31. | | Gidrafa | — | >11·0 | — | — |
| 4. | Wohltnann | Magyaróvár | 1·67 | — | 2·0 | — |
| 26. | | Parisháza | — | >11·0 | — | — |
| 23. | | Poroszká | — | 3·3 | — | 11·0 |
| 25. | | Gidrafa | — | 3·3 | — | 2·5 |
| 6. | Magnum bonum | Magyaróvár | 2·5 | — | — | — |
| 8. | | Magyaróvár | 1·4 | — | 3·3 | — |
| 28. | | Parisháza | — | >11·0 | — | 8·3 |
| 30. | | Poroszká | — | >11·0 | — | — |
| 27. | | Gidrafa | — | >11·0 | — | 10·0 |

Az amyláz értéke tehát sem a származási helyre, sem a fajtára nem jellemző. A míg például a magyaróvári «Up to date» amylázának értéke II. 10.-én 1·67 és IV. 21.-én 2·5, addig ugyane fajtaváltozatok értékei ez idő alatt más termelő helyekről származó mintákban 3·3 és 11·0 között ingadoznak. A fajtától való teljes függetlenség legjobban kitűnik a két magyaróvári «Magnum bonum»-nál, melyeknek korábbi származása különböző és amylázának értékei is merőben eltérnek.

Az amyláz abszolút értékei ($D_{24h}^{40^\circ}$) friss oldatban egészséges gumókban febr. elején 1·4 és 5·0 között, márczius végén 1 és 10 között váltakoznak, vagyis a legtöbb eddig megvizsgált állati eredeti amylázhoz képest nagyon gyenge. Növényi amylázokkal nem igen hasonlíthatjuk össze, mert WOHLGEMUTH módszerével növényi amylázokat tudtunkkal nem vizsgáltak. KLEMPIN¹ vizsgálatai az összehasonlításra nem alkalmasak, mert az amylázt a zab magvaiból glycerinnel vonta ki, a mit a zab csekély nedvességtartalma miatt nem is lehetett elkerülni; csakhogy ezáltal az amyláz eredeti koncentrációja nagyon csökkent.

¹ KLEMPIN : Biochem. Zeitschr. 10. (1908.) 210.

Az *amyláz összefüggése a betegséggel.* Az 1.—4. táblázat az egészséges és beteg burgonyagumók különbségeit is legjobban tünteti fel. Egészséges és beteg gumók *friss* aktivitásában szabályszerűség nincs; ellenben az első felvételtől származó oldatok egészségeseknél többnyire erősödtek. A beteg gumóknál csakis háromszor figyelhattunk meg erősödést (2., 8., 12. sz.), ez is legfeljebb 37 napra terjedt, míg az egészségeseknél legkorábban a 68. napon figyelhattunk meg gyengülést.

A második felvételnél már az egészséges gumók *amyláza* sem erősödött, de mégis jóval tartósabb, mint a betegeké, mert az egészségesek legtöbbje a 10.—13. napon még megtartotta aktivitását, míg a betegek *amyláza* többnyire már a 8.—9. napon csökkent. Különösen feltűnő ez a 14. sz.-nál, valamint a 26.—31. mintáknál, melyeknek eredeti aktivitása, kivált az első felvételnél, szokatlanul magas (I_{24h}^{400} 11 és 16·7 között) és erősödésük mégis rohamosan csökken. Így a 28. és 29. minta a második felvételnél, tehát 11 nap alatt az eredeti aktivitásnak már csak 4—5% -át mutatta.

1. táblázat.

(1. főlvetel, a friss oldatok II. 10.-e és III. 1.-je között készültek.)

| A minta | | Egészégi állapot | Hány cm ³ amyláz (= <i>L.</i>) hydrolyzált 24 óra alatt 40°-on 1 cm ³ kemé- nyítő-oldatot | | | | | | |
|---------|------------------------------|---------------------|--|---------|----------|----------|----------|---------|--|
| száma | neve és származása | | | | | | | | |
| 1. | Up to date Magyaróvár | 2 | II. 10. | — | III. 8. | III. 11. | III. 19. | IV. 21. | |
| 2. | | e. | 0.4 | — | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | |
| | | b. | 0.5 | — | 0.3 | 0.3 | 0.4 | 0.6 | |
| 3. | Wohltman Magyaróvár | e. | II. 11. | — | III. 8. | III. 11. | III. 20. | IV. 22. | |
| 4. | | b. | 0.5 | — | 0.5 | 0.5 | 0.7? | 0.4 | |
| | | b. | 0.5 | — | 0.7 | 0.65 | 0.7 | 0.9 | |
| 5. | Magnum bonum Magyaróvár | e. | II. 12. | — | III. 10. | — | — | IV. 22. | |
| 6. | | b. | 0.6 | — | 0.5 | — | — | 0.4 | |
| | | b. | 0.3 | — | 0.5 | — | — | 0.5 | |
| 7. | Magnum bonum Magyaróvár | e. | II. 13. | — | III. 10. | III. 12. | — | IV. 22. | |
| 8. | | b. | 0.4 | — | 0.3 | 0.3 | — | 0.3 | |
| | | b. | 0.6 | — | 0.5 | 0.55 | — | 0.7 | |
| 9. | Fürst Bismarck Magyaróvár | e. | II. 14. | II. 26. | — | III. 12. | — | IV. 24. | |
| 10. | | b. | 0.4 | 0.3 | — | 0.3 | — | 0.4 | |
| | | b. | 0.4 | 0.35 | — | 0.4 | — | 0.6 | |
| 11. | Unica Magyaróvár | e. | II. 15. | II. 27. | — | III. 13. | — | V. 5. | |
| 12. | | b. | 0.3 | 0.3 | — | 0.3 | — | 0.6 | |
| | | b. | 0.05 | 0.04 | — | 0.06 | — | 0.2 | |
| 13. | Silesia Magyaróvár | e. | II. 20. | II. 28. | — | III. 17. | — | V. 5. | |
| 14. | | b. | 0.2 | 0.15 | — | 0.15 | — | 0.2 | |
| | | b. | 0.3 | 0.35 | — | 0.3 | — | 0.8 | |
| 15. | Max Eyth Magyaróvár | e. | II. 21. | III. 1. | — | III. 17. | — | V. 5. | |
| 16. | | b. | 0.15 | 0.1 | — | 0.15 | — | 0.2 | |
| | | b. | 0.15 | 0.15 | — | 0.25 | — | 0.4 | |

| száma | A minta neve és származása | Egészségi állapot ¹ | Hány cm ³ amyláz (=L) hydrolyzált 24 óra alatt 40 °-on 1 cm ³ kemé- nyítő-oldatot | | | | | | |
|-------|----------------------------------|-----------------------------------|---|---------|---------|----------|----------|----------|--|
| | | | II. 22. | III. 3. | — | III. 18. | — | V. 7. | |
| 17. | P. Krüger Magyaróvár | e. | 0·3 | 0·3 | — | 0·3 | — | 0·3 | |
| 18. | | b. | 0·35 | 0·55 | — | 0·6 | — | 0·8 | |
| 19. | Bussola Magyaróvár | e. | II. 24. | III. 4. | — | III. 23. | — | — | |
| 20. | | b. | 0·2 | 0·2 | — | 0·2 | — | — | |
| 21. | Bonar Magyaróvár | e. | II. 25. | III. 4. | — | III. 24. | III. 26. | III. 27. | |
| 22. | | b. | 0·2 | 0·3 | — | 0·3 | — | — | |
| 23. | Wohltmann Poroszká | e. | 0·2 | 0·25 | — | 0·55 | 1·0 | 1·5 | |
| 24. | | b. | II. 26. | III. 5. | III. 8. | III. 24. | III. 28. | — | |
| 25. | Up to date Parisháza | e. | 0·2 | 0·3 | 0·3 | >0·5 | 4·0 | — | |
| 26. | | b. | II. 26. | III. 5. | III. 8. | III. 24. | III. 26. | III. 28. | |
| 27. | Wohltmann Gidrafa | e. | 0·2 | 0·4 | 0·4 | — | >1·0 | >3·0 | |
| 28. | | b. | II. 27. | III. 6. | — | — | — | III. 28. | |
| 29. | Magnum bonum Gidrafa | e. | <0·1 | 0·07 | — | — | — | 0·1 | |
| 30. | | b. | II. 27. | III. 6. | III. 8. | — | — | III. 28. | |
| 31. | Magnum bonum Parisháza | e. | <0·1 | 0·12 | 0·13 | — | — | 0·15 | |
| 32. | | b. | II. 28. | III. 6. | — | — | — | III. 28. | |
| 33. | Up to date Poroszká | e. | <0·1 | 0·04 | — | — | — | 0·09 | |
| 34. | | b. | II. 28. | III. 7. | — | — | — | III. 27. | |
| 35. | Magnum bonum Poroszká | e. | <0·1 | 0·07 | — | — | — | 0·1 | |
| 36. | | b. | III. 1. | III. 7. | III. 8. | — | — | III. 27. | |
| 37. | Up to date Gidrafa | e. | <0·1 | 0·1 | 0·13 | — | — | 0·2 | |
| 38. | | b. | III. 1. | III. 7. | — | — | — | III. 28. | |
| 39. | | e. | <0·1 | 0·08 | — | — | — | 0·1 | |
| 40. | | b. | | | | | | | |

¹ e. = egészséges, b. = beteg.² Minden felső sor az elemzés napjait jelöli meg.

2. táblázat.

(1. fölvétel, a friss enzimes oldatok II. 10.-e és III. 1.-je között készültek.)

| A minta | | Egészségi állapot | $D_{24\ h}^{40^{\circ}}$ | | | | | | | | |
|---------|------------------------|-------------------|---|------|------|-------|-------|------|------|-------|--|
| száma | neve és származása | | Hány cm ³ 1 %-os keményítő-oldatot hydrolyzál 24 óra alatt 40°-on 1 cm ³ amylázoldat, ha kora, napokban kifejezve | | | | | | | | |
| | | | 0 | 6—7 | 8—10 | 24—26 | 27—29 | 30 | 37 | 68—79 | |
| 1. | Up to date | e. | 2·0 | — | — | 2·5 | 2·5 | — | 2·5 | 2·5 | |
| 2. | Magyaróvár | b. | 1·67 | — | — | 2·5 | 2·5 | — | 2·0 | 1·4 | |
| 3. | Wohltmann | e. | 1·67 | — | — | 1·67 | 1·67 | — | — | 2·0 | |
| 4. | Magyaróvár | b. | 1·67 | — | — | 1·25 | 1·4 | — | 1·25 | — | |
| 5. | Magnum bonum | e. | 1·4 | — | — | 1·67 | — | — | — | 2·0 | |
| 6. | Magyaróvár | b. | 2·5 | — | — | 1·67 | — | — | — | 1·67 | |
| 7. | Magnum bonum | e. | 2·0 | — | — | 2·5 | 2·5 | — | — | 2·5 | |
| 8. | Magyaróvár | b. | 1·4 | — | — | 1·67 | 1·6 | — | — | 1·25 | |
| 9. | Fürst Bismarek | e. | 2·0 | — | 2·5 | 2·5 | — | — | — | 2·0 | |
| 10. | Magyaróvár | b. | 2·0 | — | 2·0 | 2·0 | — | — | — | 1·4 | |
| 11. | Unica | e. | 2·5 | — | 2·5 | 2·5 | — | — | — | 1·4 | |
| 12. | Magyaróvár | b. | 16·7 | — | 20·0 | 14·3 | — | — | — | 4·0 | |
| 13. | Silesia | e. | 4·0 | — | 5·0 | 5·0 | — | — | — | 4·0 | |
| 14. | Magyaróvár | b. | 2·9 | — | 2·5? | 2·9 | — | — | — | — | |
| 15. | Max Eyth | e. | 5·0 | — | — | 5·0 | — | — | — | 4·0 | |
| 16. | Magyaróvár | b. | 5·0 | — | 5·0 | 3·3 | — | — | — | 2·0 | |
| 17. | Paul Krüger | e. | 2·9 | — | 2·9 | 2·9 | — | — | — | 2·9 | |
| 18. | Magyaróvár | b. | 2·5 | — | 1·67 | 1·4 | — | — | — | 1·2 | |
| 19. | Bussola | e. | 4·0 | — | 4·0 | 4·0 | — | — | — | — | |
| 20. | Magyaróvár | b. | 4·0 | — | 4·0 | 2·9 | — | — | — | — | |
| 21. | Bonar | e. | 4·0 | 2·9 | — | 2·9 | — | — | — | — | |
| 22. | Magyaróvár | b. | 4·0 | 3·3 | — | 1·67 | — | — | — | — | |
| 23. | Wohltmann Poroszka | b e t e g | 3·3 | 2·5 | 2·5 | <1·67 | — | 0·25 | — | — | |
| 24. | Up to date Parisháza | | 3·3 | 2·5 | 2·5 | <1·67 | 0·9 | 0·67 | — | — | |
| 25. | Wohltmann Gidrafa | | 3·3 | 2·0 | 2·0 | — | <0·9 | <0·3 | — | — | |
| 26. | Wohltmann Parisháza | | >11·0 | 12·5 | — | — | 6·7 | — | — | — | |
| 27. | Magnum bonum Gidrafa | | >11·0 | 7·7 | 7·1 | — | 6·3 | — | — | — | |
| 28. | Magnum bonum Parisháza | | >11·0 | 20·0 | — | 10·0 | — | — | — | — | |
| 29. | Up to date Poroszka | | >11·0 | 12·5 | — | 9·0 | — | — | — | — | |
| 30. | Magnum bonum Poroszka | | >11·0 | 9·0 | 7·1 | 3·3 | — | — | — | — | |
| 31. | Up to date Gidrafa | | >11·0 | 11·0 | — | 9·0 | — | — | — | — | |

3. táblázat.

(2. főlvétel, a friss enzimes oldatok III. 21.-e és IV. 8.-a között készültek.)

| száma | A minta neve és származása | Egészségi állapot | <i>L</i> cm ³ -ekben | | | | <i>D</i> ^{40°} _{24 h} ha az oldat kora, napokban kifejezve | | | |
|-------|----------------------------------|----------------------|------------------------------------|----------|---------|---------|---|-----|-------|---------|
| | | | | | | | 0 | 7-8 | 10-13 | 25-29 |
| 1. | Up to date | e. | III. 21. | III. 29. | IV. 2. | IV. 18. | | | | |
| 2. | Magyaróvár | b. | 0·2 | 0·2 | 0·2 | 0·5 | 3·3 | 3·3 | 3·3 | 1·67 |
| | | | 0·3 | 0·3 | 0·4 | 0·7 | 2·5 | 2·5 | 2·0 | 1·25 |
| 3. | Wohltmann | e. | III. 22. | III. 29. | IV. 2. | IV. 18. | | | | |
| 4. | Magyaróvár | b. | 0·25 | 0·2 | 0·4 | 0·9 | 3·3 | 3·3 | 2·0 | 1·0 |
| | | | 0·45 | 0·4 | 0·5 | 0·8 | 2·0 | — | 1·67 | 1·1 |
| 7. | Magnum bonum | e. | III. 27. | — | IV. 9. | IV. 21. | | | | |
| 8. | Magyaróvár | b. | 0·3 | — | 0·3 | kb. 1·0 | 2·5 | — | 2·5 | kb. 1·0 |
| | | | 0·2 | — | 0·5 | <0·5 | 3·3 | — | 1·67 | >1·67 |
| 9. | Fürst Bismarck | e. | III. 27. | — | IV. 9. | IV. 21. | | | | |
| 10. | Magyaróvár | b. | 0·1 | — | 0·1 | kb. 1·0 | 6·7 | — | 6·7 | kb. 1·0 |
| | | | 0·1 | — | 0·2 | <0·5 | 6·7 | — | 3·3 | >1·67 |
| 11. | Unica | e. | III. 29. | — | IV. 9. | IV. 26. | | | | |
| 12. | Magyaróvár | b. | 0·1 | — | 0·1 | 0·8 | 6·7 | — | 6·7 | 1·1 |
| | | | III. 31. | — | 0·45 | 0·7 | 2·5 | — | 2·0 | 1·25 |
| 13. | Silesia | e. | III. 29. | — | IV. 9. | IV. 26. | | | | |
| 14. | Magyaróvár | b. | 0·05 | — | 0·2 | 0·5 | 10·0 | — | 3·3 | 1·67 |
| | | | 0·1 | — | 0·3 | >0·7 | 6·7 | — | 2·5 | <1·25 |
| 15. | Max Eyth | e. | IV. 1. | — | IV. 11. | IV. 29. | | | | |
| 16. | Magyaróvár | b. | 0·3 | — | 0·5 | >0·7 | 2·5 | — | 1·67 | <1·25 |
| | | | 0·25 | — | 0·6 | >0·8 | 3·3 | — | 1·43 | <1·1 |
| 17. | P. Krüger | e. | III. 31. | — | IV. 11. | IV. 29. | | | | |
| 18. | Magyaróvár | b. | 0·15 | — | 0·15 | 0·5 | 5·0 | — | 5·0 | 1·67 |
| | | | 0·1 | — | 0·3 | 0·7 | 6·7 | — | 2·5 | <1·25 |
| 19. | Bussola | e. | IV. 2. | — | IV. 15. | — | | | | |
| 20. | Magyaróvár | b. | 0·2 | — | 0·3 | — | 3·3 | — | 2·5 | — |
| | | | 0·15 | — | 0·4 | — | 5·0 | — | 2·0 | — |
| 21. | Bonar | e. | IV. 3. | — | IV. 15. | — | | | | |
| 22. | Magyaróvár | b. | 0·25 | — | 0·15 | — | 3·3 | — | 5·0 | — |
| | | | 0·20 | — | 0·3 | — | 3·3 | — | 2·5 | — |

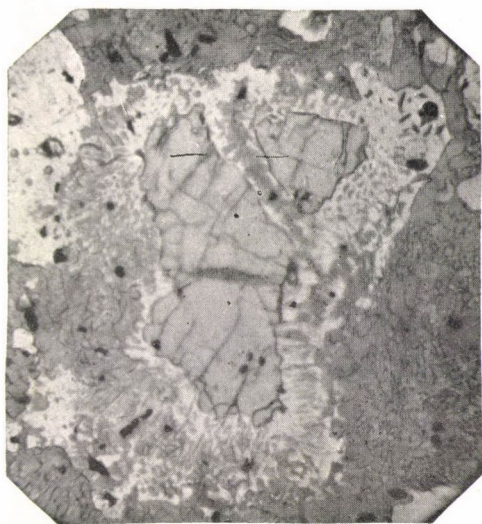
| A minta | | Egész- ségi állapot | $D_{24h}^{40^{\circ}}$ ha az anytláz kora napokban | | | | |
|---------|---------------------------|---------------------------|--|----------------|------|-----|----|
| száma | neve és származása | | L | | | 0 | 13 |
| | | | | | | | |
| 23. | Wohltmann Poroszká | b. | IV. 5. 0·08 | IV. 18. 0·1 | 11·0 | 5·0 | |
| 24. | Up to date Parisháza | b. | IV. 4. 0·35 | IV. 18. 0·6 | 2·5 | 1·4 | |
| 25. | Wohltmann Gidrafa | b. | IV. 7. 0·35 | IV. 19. 0·6 | 2·5 | 1·4 | |
| 27. | Magnum bonum Gidrafa | b. | IV. 7. 0·09 | IV. 19. 0·4 | 10·0 | 2·0 | |
| 28. | Magnum bonum Parisháza | b. | IV. 8. 0·11 | IV. 19. 2·5 | 8·3 | 0·3 | |
| 29. | Up to date Poroszká | b. | IV. 8. 0·11 | IV. 19. 2·0 | 8·3 | 0·4 | |

4. táblázat.

(az amylázoldatok aktivitásának változása, kifejezve a frissen készült oldat aktivitásának százalékában.) $\frac{100 D_t}{D_0}$

| A minta | | | Az enzyμες oldatok kora volt, napokban kifejezve | | | | | | | | | | | |
|---------|------------------------|-------------------|--|-----|------|-------|-------|----|-----|-------|--|-------|--------|--|
| száma | neve és származása | Egészségi állapot | az 1. főlvételkor (a friss oldat készült II/10.-e és III/1.-je között) | | | | | | | | a 2. főlvételkor (a friss oldat készült III 21. és IV 8. között) | | | |
| | | | 0 | 6-7 | 8-10 | 24-26 | 27-29 | 30 | 37 | 48-79 | 0 | 10-13 | 25-29 | |
| 1. | Up to date | e. | 100 | — | — | 125 | 125 | — | 125 | 125 | 100 | 100 | 51 | |
| 2. | Magyaróvár | b. | 100 | — | — | 150 | 150 | — | 120 | 84 | 100 | 80 | 50 | |
| 3. | Wohltmann | e. | 100 | — | — | 100 | 100 | — | — | 120 | 100 | 61 | 30 | |
| 4. | Magyaróvár | b. | 100 | — | — | 75 | — | — | 75 | — | 101 | 84 | 55 | |
| 5. | Magnum bonum | e. | 100 | — | — | 119 | — | — | — | 143 | — | — | — | |
| 6. | Magyaróvár | b. | 100 | — | — | 67 | — | — | — | 67 | — | — | — | |
| 7. | Magnum bonum | e. | 100 | — | — | 125 | 125 | — | — | 125 | 100 | 100 | kb. 40 | |
| 8. | Magyaróvár | b. | 100 | — | — | 119 | 114 | — | — | 89 | 100 | 51 | >51 | |
| 9. | Fürst Bismarck | e. | 100 | — | 125* | 125 | — | — | — | 100 | 100 | 100 | kb. 15 | |
| 10. | Magyaróvár | b. | 100 | — | 100* | 100 | — | — | — | 70 | 100 | 49 | >25 | |
| 11. | Unica | e. | 100 | — | 100* | 100 | — | — | — | 56 | 100 | 100 | 16 | |
| 12. | Magyaróvár | b. | 100 | — | 120* | 86 | — | — | — | 24 | 100 | 80 | 50 | |
| 13. | Silesia | e. | 100 | — | 125 | 125 | — | — | — | 100 | 100 | 33 | 17 | |
| 14. | Magyaróvár | b. | 100 | — | — | 100 | — | — | — | — | 100 | 37 | 19 | |
| 15. | Max Eyth | e. | 100 | — | — | 100 | — | — | — | 80 | 100 | 67 | 50 | |
| 16. | Magyaróvár | b. | 100 | — | 100 | 67 | — | — | — | 40 | 100 | 43 | 33 | |
| 17. | P. Krüger | e. | 100 | — | 100 | 100 | — | — | — | 100 | 100 | 100 | 33 | |
| 18. | Magyaróvár | b. | 100 | — | 67 | 56 | — | — | — | 48 | 100 | 37 | 19 | |
| 19. | Bussola | e. | 100 | — | 100 | — | 100 | — | — | — | 100 | 76 | — | |
| 20. | Magyaróvár | b. | 100 | — | 100 | — | 72 | — | — | — | 100 | 40 | — | |
| 21. | Bonar | e. | 100 | 72 | — | — | 72 | — | — | — | 100 | 152 | — | |
| 22. | Magyaróvár | b. | 100 | 82 | — | — | 42 | — | — | — | 100 | 76 | — | |
| 23. | Wohltmann | b e t e s | 100 | 76 | 76 | 51 | — | 8 | — | — | 100 | 45 | — | |
| 24. | Poroszka | | 100 | 76 | 76 | <51 | 27 | 20 | — | — | 100 | 56 | — | |
| 25. | Up to date Parisháza | | 100 | 60 | 60 | — | <27 | <9 | — | — | 100 | 56 | — | |
| 26. | Wohltmann | | 100 | 100 | — | — | 54 | — | — | — | — | — | — | |
| 27. | Gidrafa | | 100 | 70 | 64 | — | 57 | — | — | — | 100 | 20 | — | |
| 28. | Magnum bonum Parisháza | | 100 | 100 | — | — | 50 | — | — | — | 100 | 4 | — | |
| 29. | Up to date Poroszka | | 100 | 100 | — | — | 72 | — | — | — | 100 | 5 | — | |
| 30. | Magnum bonum Poroszka | | 100 | 100 | 80 | 37 | — | — | — | — | — | — | — | |
| 31. | Up to date | | 100 | 100 | — | — | 82 | — | — | — | — | — | — | |
| | Gidrafa | | 100 | 100 | — | — | 82 | — | — | — | — | — | — | |

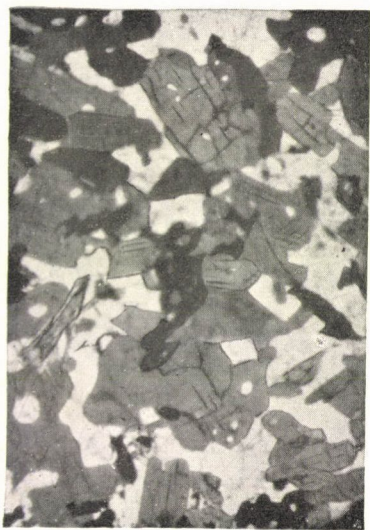




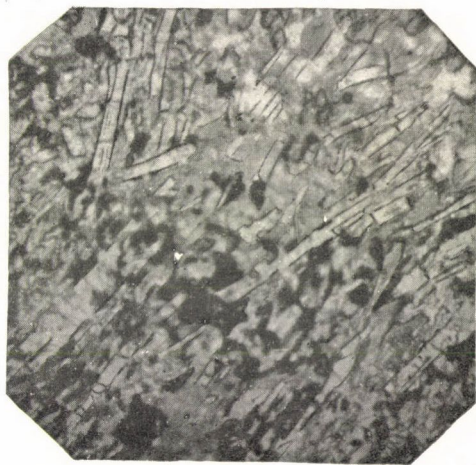
1.



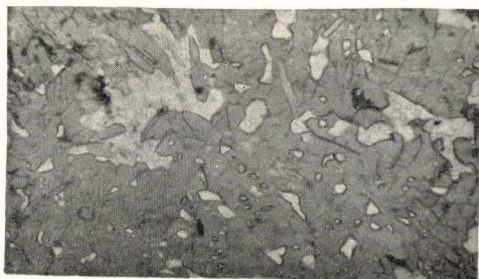
2.



3.



4.

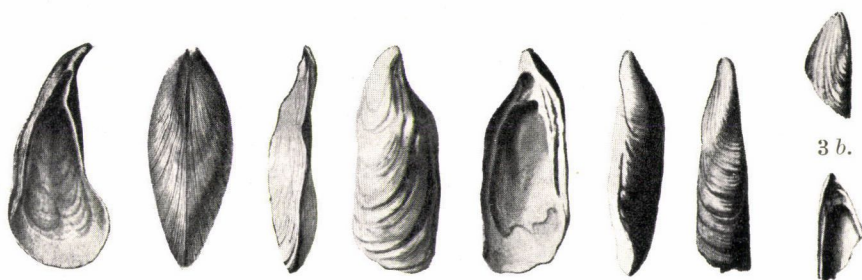


5.

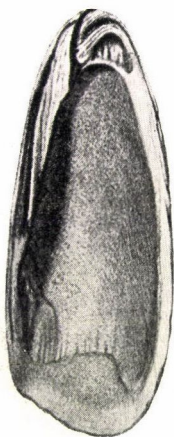
II. tábla.

- 1 a. *Congeriu spathulata* PARTSCH belső oldala.
- 1 b. *Congeriu spathulata* PARTSCH a hasi táj felől.
- 2 a. *Dreyssensiomya dactylus* BRUS sp. külső oldala.
- 2 b. *Dreyssensiomya dactylus* BRUS sp. belső oldala.
- 2 c. *Dreyssensiomya dactylus* BRUS sp. a hasi táj felől.
- 2 d. *Dreyssensiomya dactylus* BRUS sp. a háti táj felől.
- 2 e. *Dreyssensiomya dactylus* BRUS sp. hátulról.
- 3 a. *Dreyssensiomya dactylus* BRUS sp. külső oldala.
- 3 b. *Dreyssensiomya dactylus* BRUS sp. csőrének külső oldala.
- 3 c. *Dreyssensiomya dactylus* BRUS sp. csőrének belső oldala.
- 4 a. *Dreyssensiomya arcuata* FUCHS sp. külső oldala.
- 4 b. *Dreyssensiomya arcuata* FUCHS sp. belső oldala.
- 5 a. *Dreyssensiomya aperta* DESH sp. külső oldala.
- 5 b. *Dreyssensiomya aperta* DESH sp. a háti táj felől.
- 5 c. *Dreyssensiomya aperta* DESH sp. hátulról.
- 6 a. *Dreyssensiomya intermedia* FUCHS belső oldala.
- 6 b. *Dreyssensiomya intermedia* FUCHS háti tája.
- 7 a. *Dreyssensiomya Schröckingeri* FUCHS belső oldala.
- 7 b. *Dreyssensiomya Schröckingeri* FUCHS hasi tája.

Az 1a. és 1b. $\frac{1}{2}$ -szeres nagyságban, a többi természetes nagyságban.



1 a. 1 b. 2 c. 2 a. 2 b. 2 d. 3 a. 3 b.



5 a.



4 a.



2 e.



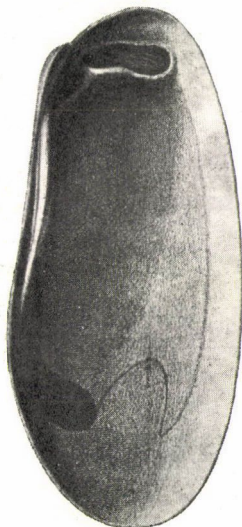
5 c.



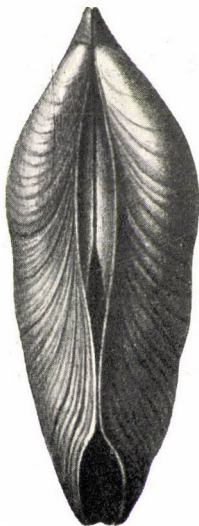
4 b.



5 b.



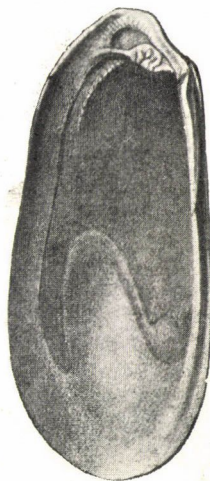
6 a.



6 b.



7 b.



7 a.

